



Baština Akademije nauka i umjetnosti Bosne i Hercegovine

Proračun kontinuiranog nosača na širokim elastičnim osloncima

Marendić, Vjekoslav

1962.

Akademija nauka i umjetnosti Bosne i Hercegovine

<https://bastina.anubih.ba/items/5f633f1c-3d28-43dc-ac97-0e490c30e79d>

Preuzeto s Baštine Akademije nauka i umjetnosti Bosne i Hercegovine

<https://bastina.anubih.ba/>

NAUČNO DRUŠTVO NR BOSNE I HERCEGOVINE

DJELA

KNJIGA XIX

**ODJELJENJE PRIVREDNO-TEHNIČKIH NAUKA
KNJIGA 3.**

VJEKOSLAV MARENDIĆ

**PRORAČUN KONTINUIRANOG
NOSAČA NA ŠIROKIM
ELASTIČNIM OSLONCIMA**

SARAJEVO

1962

NAUČNO DRUŠTVO NR BOSNE I HERCEGOVINE

DJELA

KNJIGA XIX

ODJELJENJE PRIVREDNO-TEHNIČKIH NAUKA

KNJIGA 3.

VJEKOSLAV MARENDIĆ

PRORAČUN KONTINUIRANOG NOSAČA NA ŠIROKIM ELASTIČNIM OSLONCIMA



SARAJEVO

1 9 6 2

Urednik
JULIJE HAHAMOVIĆ,
redovni član Naučnog društva NR B i H



Štampa Beogradski grafički zavod

S A D R Ž A J

	Strana
UVOD	5
OPĆE OZNAKE I POSTAVKE	7
Deformacija dijela nosača na elastičnoj podlozi	8
Jednadžba šest momenata	13
Ispitivanje dijela nosača na osloncu	16
Naprezanje podloge	21
Opterećenje nosača na osloncu	23
Koeficijent podloge	26
SPECIJALNI SLUČAJEVI	28
1. Konzolni nosač	28
Primjer 1	30
2. Nosač na dva oslonca	35
Nosač s prepustima	36
Simetrični nosač	37
Simetrični nosač s prepustima	38
Simetrični nosač i simetrično opterećenje	38
Simetrični nosač s prepustima i simetrično opterećenje	45
Nejednako slijeganje oslonaca	46
Nosač s jednim širokim i jednim tačkastim osloncem	47
Primjer 2	48
Primjer 3	57
3. Nosač na tri oslonca	60
Simetrični nosač i opterećenje	62
Nejednako slijeganje oslonaca	64
4. Dio nosača na osloncu simetrično opterećen	65
Primjer 4	67
5. Nosač s beskonačno mnogo jednakih polja i oslonaca	76
Jednoliko opterećenje q na cijelom nosaču	78
Jednoliko opterećenje na svakom drugom polju	79
Opterećenje silom P u sredini svakog polja	80
Opterećenje silom P u sredini svakog drugog polja	81
Opterećenje silom P u rubovima oslonaca	82
Primjer 5	83
Naprezanje podloge	86

6. Nosač na polubeskonačno širokim osloncima	87
Proizvoljno opterećenje	90
Simetrično opterećenje	91
Nosač s jednim normalnim i jednim polubeskonačnim osloncem	93
Primjer 6	94
USPOREDBA REZULTATA S PROPISIMA	95
NAPOMENE.....	99
Vrijednosti funkcija sin i cos	101
Vrijednosti koeficijenata	102
Vrijednosti funkcija tg i tgh	103
Vrednosti funkcija e^{-sx} ($\cos sx + \sin sx$); e^{-sx} ($\cos sx - \sin sx$); $e^{-sx} \cos sx$; $e^{-sx} \sin sx$	104
Résumé	105
Literatura	106



U V O D

Statika nosača, bez obzira da li se radi o slobodno ili elastično okretnim, nepopustljivim ili elastično popustljivim osloncima, tretira te oslonce kao tačke. Ovakvo tačkasto oslanjanje se ostvaruje u slučaju nekih nosača izvedbom naročitih ležajnih tjelesa, pa se pomoću izračunatih vrijednosti statičkih veličina može dobiti slika naponskog stanja takvih nosača. (Nosači velikog raspona kod mostova i sl.)

U građevinskoj praksi, u slučaju nekih vrsta objekata naročito u visokogradnjama, nosači se oslanjaju na oslonce (stubove, zidove), koji imaju izvjesnu veću ili manju, širinu. U slučaju malih širina oslanjanja, tj. kad je širina oslanjanja malena u odnosu na raspon, mogu se upotrijebiti rezultati dobijeni pod pretpostavkom tačkastog oslanjanja. S porastom širine oslonaca statičke veličine se sve više razlikuju od onih koje se dobijaju uz pretpostavku tačkastog oslanjanja. Posljedica toga jest da rezultati dobijeni uz pretpostavku tačkastog oslanjanja postaju potpuno neuporabivi. U praksi se s ovakvim nosačima postupa većinom tako da se vrijednosti statičkih veličina procjenjuju prema iskustvu i osjećanju uporabom raznih koeficijenata. Nisu rijetki slučajevi i štetnih pojava na ovakvim nosačima usljed pogrešne procjene statičkih veličina.

Problem nosača na širokim osloncima nije bogato tretiran u stručnoj literaturi. Koliko je autoru ovog rada bio dostupan uvid u istraživanje, u literaturi, prvi se ovim problemom pozabavio 1912. god. H. Marcus¹⁾. On obrađuje nosač s jednim poljem, s jednim i oba široka oslonca, te nosač s dva polja sa srednjim širokim osloncem. Ističući da se ne može dati opća metoda za rješenje ovog problema, on za svaki slučaj razvija diferencijalne jednačbe; za dio nosača na osloncu, te za dio nosača među njima, izjednačuje ugibe i kutove zaokreta na spoju ovih dijelova i tako dobija nepoznate rubne momente. Na ovaj način je praktična primjena ovog rada prilično onemogućena, jer za svako opterećenje i za svaku vrstu nosača treba razviti cijeli postupak dobijanja potrebnih jednačbi.

1921. god. nosač s jednim poljem na dva široka oslonca, simetričan i simetrično opterećen jednom silom u sredini, rješava K. H a y a s h i²⁾. Ni njegova metodika rješavanja ne omogućuje praktičnu primjenu, jer daje vrijednost rubnog momenta samo za taj specijalni slučaj opterećenja, dok bi za neko drugo opterećenje trebalo nanovo sprovesti čitav postupak, koji je prilično složen, pošto se u izjednačivanju ugiba i kuta zaokreta operiše sa 7 konstanti. Ovakav način rješavanja bio bi, u slučaju nosača preko više širokih oslonaca a proizvoljno opterećenog, praktički vrlo teško izvodiv.

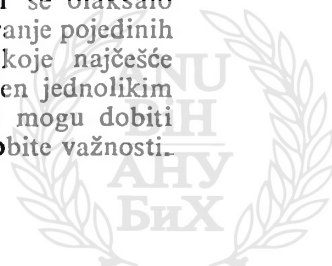
M. Hetényi³⁾ daje takođe rješenje za nosač sa dva široka oslonca simetričan i simetrično opterećen jednom silom u sredini te s jednolikim opterećenjem po dužini polja. Njegova metodika rješavanja je već znatno jednostavnija i prikladnija, jer uvodi gotove izraze za kutove zaokreta na rubovima oslonaca.

Za razliku od dosad navedenih autora daje K. Jäger⁴⁾ rješenje za nosač na beskonačno mnogo jednakih polja i oslonaca s jednakim i simetričnim opterećenjem u svakom polju. Kao statički prekobrojni veličinu uvodi on momenat u sredini oslonca mjesto rubnog momenta, što mu je omogućeno jer se radi o potpunoj simetriji oslonaca. Na taj način ima posla samo s dvije integracione konstante, što uveliko pojednostavljuje čitav proračun.

Da bi se uticaj širokih oslonaca što jednostavnije uzeo u obzir, naši propisi za beton i armirani beton uvode fiktivnu šemu nosača u kojoj je raspon nešto veći (za 5%) od svijetlog otvora. Po toj šemi se nosač proračunava kao da je tačkasto oslonjen.

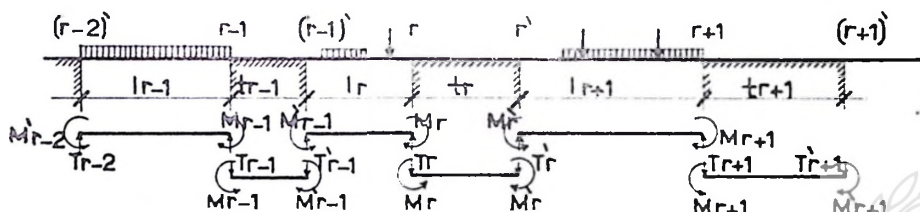
Iz izloženog se vidi da rješenje nosača na širokim osloncima još nije dato u takvom obliku da bi se moglo u praksi nesmetano upotrebljavati.

Ovaj rad daje opće rješenje kontinuiranog nosača na širokim osloncima uvođenjem *jednadžbe šest momenata*, koja dozvoljava proračunavanje bilo kakvog nosača s proizvoljnim opterećenjem. Da bi se olakšalo numeričko postavljanje potrebnih jednadžbi i lakše iskorištavanje pojedinih izraza i formula, date su tabelarno vrijednosti funkcija koje najčešće dolaze. Za kontinuirani nosač preko više polja, opterećen jednolikim opterećenjem, ucrtani su dijagrami iz kojih se neposredno mogu dobiti veličine svih momenata, što je za praktičnu primjenu od osobite važnosti.



OPĆE OZNAKE I POSTAVKE

Razmatramo kontinuirani nosač konstantnog momenta inercije I i modula elastičnosti E preko proizvoljnog broja proizvoljno širokih oslonaca. Dio takvog nosača prikazan je na sl. 1.



Sl. 1.

Usvajaju se slijedeće pretpostavke:

- 1) opterećenje proizvoljno unutar polja (opterećenje po širini oslonca posmatrat će se naknadno),
- 2) oslonci se elastično progibaju po zakonu:

$$y = \frac{q}{k}$$

gdje je y progib u proizvoljnoj tački oslonca, q je intenzitet opterećenja oslonca u toj tački, a k intenzitet opterećenja po jedinici širine oslonca koji izaziva jedinični progib; ovaj koeficijent podloge k ovisan je, dakle, o materijalu oslonca; *)

- 3) debljina oslonca jednaka je širini nosača i

4) dodirna površina između nosača i oslonca može preuzimati vlačna naprezanja isto kao i tlačna, tj. nema dizanja nosača od oslonca; (ova vlačna naprezanja su ili vrlo malena ili ih uopće nema usljed opterećenja oslonca).

Ako u rubovima oslonaca, tj. u tačkama $(r-2)'$ do $(r+1)'$, presiječemo nosač, onda na mjestima gdje smo izvršili presjek moramo priložiti odgovarajuće momente i poprečne sile da bi pojedini dijelovi ostali u istom stanju kao i prije presijecanja.

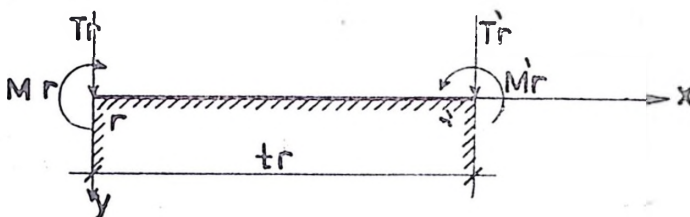
Ovi momenti i poprečne sile su nepoznate statičke veličine, čije iznalaženje i jest glavna svrha ovog rada.

Gornjim presijecanjem dobili smo dijelove nosača između oslonaca, s opterećenjima koje im pripada i momentima i poprečnim silama na krajevima, koje možemo lako riješiti primjenom pravila statike i čvrstoće, te dijelove nosača na osloncima, tj. na elastičnoj podlozi, koji su podvrgnuti djelovanju momenata i poprečnih sila na kraju. Ovi se dijelovi nosača ne daju riješiti elementarnim sredstvima statike i čvrstoće, pa ih treba zasebno osmotriti.

DEFORMACIJA DIJELA NOSAČA NA ELASTIČNOJ PODLOZI

Uzmimo dio nosača na osloncu r , s rubovima x i r' prema sl. 2

On je opterećen momentima M_r i $M_{r'}$ te poprečnim silama T_r i $T_{r'}$ na krajevima.



Sl. 2.

Diferencijalna jednačina za ovakav nosač na elastičnoj podlozi glasi:

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = -q,$$

gdje je q opterećenje nosača podlogom.

Prema pretpostavljenim elastičnim svojstvima oslonaca:

$q = k_r y$ (k_r je koeficijent podloge za oslonac $r-r'$) pa će diferencijalna jednačina glasniti:

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = -k_r y \quad (1)$$

Opće rješenje ove diferencijalne jednačine je poznato i glasi:

$$y = Ae^{s_r x} \cosh s_r x + Be^{s_r x} \sinh s_r x + Ce^{-s_r x} \cosh s_r x + De^{-s_r x} \sinh s_r x, \quad (2)$$

gdje je:

$$s_r = \sqrt[4]{\frac{k_r}{4EI}} \quad (3)$$

Integracione konstante A , B , C i D dobijamo iz četiri rubna uslova.

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -M_r \text{ za } x=0,$$

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -M_{r'} \text{ za } x=l_r,$$

$$EI \frac{d^3 y}{dx^3} = -T_r \text{ za } x=0,$$

$$EI \frac{d^3 y}{dx^3} = T_r' \text{ za } x=t_r.$$

Radi toga potrebne su formule za $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$, $\frac{d^3 y}{dx^3}$. One glase:

$$\frac{dy}{dx} = A s_r e^{s_r x} (\cos s_r x - \sin s_r x) + B s_r e^{s_r x} (\cos s_r x + \sin s_r x) - \\ - C s_r e^{-s_r x} (\cos s_r x + \sin s_r x) + D s_r e^{-s_r x} (\cos s_r x - \sin s_r x);$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -2 A s_r^2 e^{s_r x} \sin s_r x + 2 B s_r^2 e^{s_r x} \cos s_r x + 2 C s_r^2 e^{-s_r x} \sin s_r x - 2 D s_r^2 e^{-s_r x} \cos s_r x;$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = -2 A s_r^3 e^{s_r x} (\cos s_r x + \sin s_r x) + 2 B s_r^3 e^{s_r x} (\cos s_r x - \sin s_r x) + \\ + 2 C s_r^3 e^{-s_r x} (\cos s_r x + \sin s_r x) - 2 D s_r^3 e^{-s_r x} (\cos s_r x - \sin s_r x).$$

Umetanjem rubnih uslova dobijamo ove četiri jednačbe:

$$2 B s_r^2 - 2 D s_r^2 = -\frac{M_r}{EI},$$

$$-2 A s_r^2 e^{z_r} \sin z_r + 2 B s_r^2 e^{z_r} \cos z_r + 2 C s_r^2 e^{-z_r} \sin z_r - 2 D s_r^2 e^{-z_r} \cos z_r = -\frac{M_r'}{EI},$$

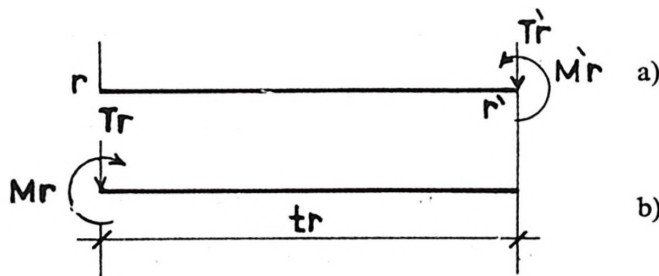
$$-2 A s_r^3 + 2 B s_r^3 + 2 C s_r^3 + 2 D s_r^3 = -\frac{T_r}{EI},$$

$$-2 A s_r^3 e^{z_r} (\cos z_r + \sin z_r) + 2 B s_r^3 e^{z_r} (\cos z_r - \sin z_r) +$$

$$+ 2 C s_r^3 e^{-z_r} (\cos z_r - \sin z_r) + 2 D s_r^3 e^{-z_r} (\cos z_r + \sin z_r) = -\frac{T_r'}{EI},$$

gde je: $z_r = s_r t_r$.

Radi jednostavnosti rastavimo ovaj odnos na dva dijela prema slici 3, pa će se konačni rezultat dobiti superpozicijom.



Sl. 3.

Za opterećenje pod a) će biti:

$$2Bs_r^2 - 2Ds_r^2 = 0 \text{ (iz prve jednačbe),}$$

odnosno:

$$B = D.$$

Iz treće jednačbe:

$$-2As_r^2 + 2Bs_r^2 + 2Cs_r^2 + 2Ds_r^2 = 0,$$

pa je:

$$A = B + C + D = 2B + C.$$

Ovo uvrstimo u drugu i četvrtu jednačbu i kad sredimo, dobijamo:

$$4Bs_r^2 (\cos z_r \sinh z_r - e^{-z_r} \sin z_r) - 4Cs_r^2 \sin z_r \sinh z_r = -\frac{M_r'}{EI},$$

$$4Bs_r^3 (\cos z_r \cosh z_r - \sin z_r \sinh z_r - e^{-z_r} \cos z_r - e^{-z_r} \sin z_r) - \\ - 4Cs_r^3 (\cos z_r \sin z_r + \sin z_r \cosh z_r) = \frac{T_r'}{EI}.$$

Iz ovih dviju jednačbi slijede izrazi za konstante B i C, a iz njih i za A i D:

$$B = D = \frac{T_r' \sin z_r \sinh z_r - M_r' s_r (\sin z_r \cosh z_r + \cos z_r \sinh z_r)}{4EI s_r^3 (\sin^2 z_r - \sinh^2 z_r)},$$

$$C = \frac{T_r' (\cos z_r \sinh z_r - e^{-z_r} \sin z_r) - M_r' s_r (\cos z_r \cosh z_r - \\ - \sin z_r \sinh z_r - e^{-z_r} \cos z_r - e^{-z_r} \sin z_r)}{4EI s_r^3 (\sin^2 z_r - \sinh^2 z_r)}$$

$$A = \frac{T_r' (\cos z_r \sinh z_r - e^{-z_r} \sin z_r) - M_r' s_r (\cos z_r \cosh z_r - \\ - \sin z_r \sinh z_r + e^{-z_r} \sin z_r - e^{-z_r} \cos z_r)}{4EI s_r^3 (\sin^2 z_r - \sinh^2 z_r)}$$

Kad uvrstimo vrijednosti ovih konstanti u izraz (2) te izvršimo potrebno sažimanje i sređivanje, dobijamo:

$$y_a = \frac{1}{2EI s_r^3 (\sin^2 z_r - \sinh^2 z_r)} \{ T_r' [\sin h z_r \cosh s_r (t_r - x) - \\ - \sin z_r \cos s_r x \cosh s_r (t_r - x)] - M_r' s_r [\cos h z_r \cosh s_r x \cos s_r (t_r - x) - \\ - \sin h z_r \cos h s_r x \sin s_r (t_r - x)] - \cos z_r \cos s_r x \cosh s_r (t_r - x) - \\ - \sin z_r \cos s_r x \sin h s_r (t_r - x) \}.$$

Za opterećenje pod b), (sl. 3), dobijamo rješenje ako mjesto x stavimo $t_r - x$, pa je:

$$y_b = \frac{1}{2 E I s_r^3 (\sin^2 z_r - \sin^2 s_r)} \{ T_r [\sin h z_r \cos s_r x \cos h s_r (t_r - x) - \\ - \sin z_r \cos h s_r x \cos s_r (t_r - x)] - M_r s_r [\cos h z_r \cos s_r x \cos h s_r (t_r - x) - \\ - \sin h z_r \sin s_r x \cos h s_r (t_r - x) - \cos z_r \cos h s_r x \cos s_r (t_r - x) - \\ - \sin z_r \sin h s_r x \cos s_r (t_r - x)] \}.$$

Za dobijanje ukupnog progiba y moramo ove dvije vrijednosti zbrojiti.

$$y = y_a + y_b.$$

Kad to učinimo, dobijamo:

$$y = \frac{1}{2 E I s_r^3 (\sin^2 z_r - \sin^2 s_r)} \{ T_r [\sin h z_r \cos s_r x \cos h s_r (t_r - x) - \\ - \sin z_r \cos h s_r x \cos s_r (t_r - x)] + T_r' [\sin h z_r \cos h s_r x \cos s_r (t_r - x) - \\ - \sin z_r \cos s_r x \cos h s_r (t_r - x)] - M_r s_r [\cos h z_r \cos s_r x \cos h s_r (t_r - x) - \\ - \sin h z_r \sin s_r x \cos h s_r (t_r - x) - \cos z_r \cos h s_r x \cos s_r (t_r - x) - \\ - \sin z_r \sin h s_r x \cos s_r (t_r - x)] - M_r' s_r [\cos h z_r \cos h s_r x \cos s_r (t_r - x) - \\ - \sin h z_r \cos h s_r x \sin s_r (t_r - x) - \cos z_r \cos s_r x \cos h s_r (t_r - x) - \\ - \sin z_r \cos s_r x \sin h s_r (t_r - x)] \} \quad (4)$$

Kut zaokreta tangente na elastičnu liniju dobijamo kao prvu derivaciju prednjeg izraza po $x - u$, koji glasi:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2 E I s_r^3 (\sin^2 z_r - \sin^2 s_r)} \{ T_r [-\sin h z_r \sin s_r x \cos h s_r (t_r - x) - \\ - \sin h z_r \cos s_r x \sin h s_r (t_r - x) - \sin z_r \sin h s_r x \cos s_r (t_r - x) - \\ - \sin z_r \cos h s_r x \sin s_r (t_r - x)] + T_r' [\sin h z_r \sin h s_r x \cos s_r (t_r - x) + \\ + \sin h z_r \cos h s_r x \sin s_r (t_r - x) + \sin z_r \sin s_r x \cos h s_r (t_r - x) + \\ + \sin z_r \cos s_r x \sin h s_r (t_r - x)] + M_r s_r [\cos h z_r \sin s_r x \cos h s_r (t_r - x) + \\ + \cos h z_r \cos s_r x \sin h s_r (t_r - x) + \sin h z_r \cos s_r x \cos h s_r (t_r - x) - \\ - \sin h z_r \sin s_r x \sin h s_r (t_r - x) + \cos z_r \sin h s_r x \cos s_r (t_r - x) + \\ + \cos z_r \cos h s_r x \sin s_r (t_r - x) + \sin z_r \cos h s_r x \cos s_r (t_r - x) + \\ + \sin z_r \sin h s_r x \sin s_r (t_r - x)] - M_r' s_r [\cos h z_r \sin h s_r x \cos s_r (t_r - x) + \\ + \cos h z_r \cos h s_r x \sin s_r (t_r - x) - \sin h z_r \sin h s_r x \sin s_r (t_r - x) + \\ + \sin h z_r \cos h s_r x \cos s_r (t_r - x) + \cos z_r \sin s_r x \cos h s_r (t_r - x) +$$

$$+ \cos z_r \cos s_r x \sin h s_r (t_r - x) + \sin z_r \sin s_r x \sin h s_r (t_r - x) + \\ + \sin z_r \cos s_r x \cos h s_r x \cos h s_r (t_r - x)]. \quad (5)$$

Za dalje razvijanje potrebni su nam progibi i kutovi zaokreta tangente na elastičnu liniju u rubovima oslonca r i r' . Njih dobijamo ako u izraze za y i $\frac{dy}{dx}$ metnemo $x = 0$ i $x = t_r$.

Progibi:

$$y_r = \frac{1}{2 E I s_r^3 (\sin h^2 z_r - \sin^2 z_r)} [T_r (\sin h z_r \cos h z_r - \sin z_r \cos z_r) + \\ + T'_r (\sin h z_r \cos z_r - \sin z_r \cos h z_r) - M_r s_r (\sin h^2 z_r + \sin^2 z_r) + \\ + 2 M'_r s_r \sin h z_r \sin z_r] \\ y'_r = \frac{1}{2 E I s_r^3 (\sin h^2 z_r - \sin^2 z_r)} [T_r (\sin h z_r \cos z_r - \sin z_r \cos h z_r) + \\ + T'_r (\sin h z_r \cos h z_r - \sin z_r \cos z_r) + 2 M_r s_r \sin h z_r \sin z_r - \\ - M'_r s_r (\sin h^2 z_r + \sin^2 z_r)],$$

Kutovi zaokreta:

$$\varphi_r = \frac{1}{2 E I s_r^2 (\sin h^2 z_r - \sin^2 z_r)} [2 T'_r \sin h z_r \sin z_r - T_r (\sin h^2 + \sin^2 z_r) + \\ + 2 M_r s_r (\sin h z_r \cos h z_r + \sin z_r \cos z_r) + 2 M'_r (s_r \sin h z_r \cos z_r + \cos h z_r \sin z_r)], \\ \varphi'_r = \frac{1}{2 E I s_r^2 (\sin h^2 z_r - \sin^2 z_r)} [T'_r (\sin h^2 z_r + \sin^2 z_r) - 2 T_r \sin h z_r \sin z_r + \\ + 2 M_r s_r (\sin h z_r \cos z_r + \cos h z_r \sin z_r) - 2 M'_r s_r (\sin h z_r \cos h z_r + \\ + \sin z_r \cos z_r)].$$

Izrazi uz T_r , T'_r , M_r , M'_r , su za dati nosač te širinu oslonca t_r i koeficijent podloge k_r , jednoznačno određene velicine pa ćemo, radi pojednostavljivanja izraza, uvesti slijedeće oznake:

$$\left. \begin{aligned} \sin h^2 z_r - \sin^2 z_r &= a_r \\ \sin h^2 z_r + \sin^2 z_r &= c_r \\ \sin h z_r \cos h z_r - \sin z_r \cos z_r &= d_r \\ \sin h z_r \cos z_r - \sin z_r \cos h z_r &= e_r \\ \sin h z_r \sin z_r &= f_r \\ \sin h z_r \cos h z_r + \sin z_r \cos z_r &= g_r \\ \sin h z_r \cos z_r + \cos h z_r \sin z_r &= h_r \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Uz te oznake poprimaju izrazi za progibe i za kutove zaokreta slijedeći oblik:

Progibi: **)

$$\left. \begin{aligned} y_r &= \frac{T_r d_r + T'_r e_r - M_r s_r c_r + 2 M'_r s_r f_r}{2 E I s_r^3 a_r} \\ y'_r &= \frac{T_r e_r + T'_r d_r + 2 M_r s_r f_r - M'_r s_r c_r}{2 E I s_r^3 a_r} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Kutovi zakreta: **)

$$\left. \begin{aligned} \varphi_r &= \frac{2 T'_r f_r - T_r c_r + 2 M_r s_r g_r - 2 M'_r s_r h_r}{2 E I s_r^3 a_r} \\ \varphi'_r &= \frac{T'_r c_r - 2 T_r f_r + 2 M_r s_r h_r - 2 M'_r s_r g_r}{2 E I s_r^3 a_r} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

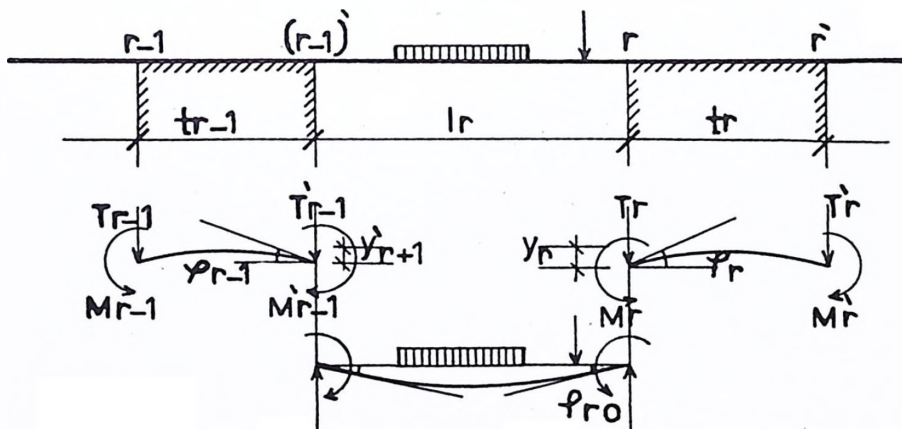
JEDNADŽBA ŠEST MOMENATA

Sad možemo pristupiti određivanju nepoznatih rubnih momenata na osloncima. Kako svaki oslonac ima 2 nepoznata rubna momenta, to uz n oslonca imamo $2n-2$ nepoznatih momenata, pošto su momenti na prvom rubu prvog oslonca i na drugom rubu zadnjeg oslonca poznati ili zadani. Sistem je, dakle, $2n-2$ puta statički neodređen.

Za određivanje nepoznatih rubnih momenata treba sastaviti $2n-2$ jednadžbi. Za svaki rub dobijamo po jednu jednadžbu iz uslova neprekinutosti elastične linije na rubovima oslonaca, tj. iz uslova da je tangenta na elastičnu liniju u rubovima zajednička kako za dio nosača među osloncima tako i za dio na osloncima.

Za rub r oslonca t_r taj će uslov glasiti:

$$***) \frac{M'_{r-1} l_r}{6 EI} + \frac{M_r l_r}{3 EI} + \varphi_{ro} + \varphi_r + \psi_r = 0. \quad (9)$$



Sl. 4.

Ovdje je φ_{r0} kut zaokreta tangente na elastičnu liniju u tački r proste grede raspona 1, za zadano opterećenje.

φ_r je kut zaokreta tangente na elastičnu liniju u tački r nosača na elastičnoj podlozi dužine t_r , za koji imamo gotov izraz (8), tj.:

$$\varphi_r = \frac{2 T_r f_r - T_r c_r + 2 M_r s_r g_r - 2 M_r s_r h_r}{2 E I s_r^3 a_r}.$$

ψ_r je kut zaokreta nosača raspona 1, usljed nejednakosti progiba u tačkama $(r-1)$ i r , te iznosi:

$$\psi_r = \frac{1}{l_r} (y'_{r-1} - y_r).$$

Za y'_{r-1} i y_r imamo gotove izraze (7), koji glase:

$$y'_{r-1} = \frac{T_{r-1} e_{r-1} + T_{r-1} d_{r-1} + 2 M_{r-1} s_{r-1} f_{r-1} - M_{r-1} s_{r-1} c_{r-1}}{2 E I s_{r-1}^3 a_{r-1}},$$

$$y_r = \frac{T_r d_r + T_r e_r - M_r s_r c_r + 2 M_r s_r f_r}{2 E I s_r^3 a_r}.$$

pa za ψ_r dobijamo:

$$\psi_r = \frac{1}{2 l_r E I} \left(\frac{T_{r-1} e_{r-1} + T_{r-1} d_{r-1} + 2 M_{r-1} s_{r-1} f_{r-1} - M_{r-1} s_{r-1} c_{r-1}}{s_{r-1}^3 a_{r-1}} - \frac{T_r d_r + T_r e_r - M_r s_r c_r + 2 M_r s_r f_r}{s_r^3 a_r} \right).$$

U ovim formulama dolaze vrijednosti poprečnih sila u rubovima oslonaca. Mjesto njih uvrštavamo poznate izraze:

$$T_{r-1} = T_{(r-1)0} - \frac{M_{r-1} - M_{r-2}}{l_{r-1}},$$

$$T'_{r-1} = T'_{(r-1)0} - \frac{M'_{r-1} - M_r}{l_r},$$

$$T_r = T_{r0} - \frac{M_r - M'_{r-1}}{l_r},$$

$$T'_r = T'_{r0} - \frac{M'_r - M_{r+1}}{l_{r+1}},$$

gdje su $T_{(r-1)0}$, $T'_{(r-1)0}$, T_{r0} , T'_r poprečne sile u odgovarajućim rubovima oslonaca od proste grede usljed vanjskog opterećenja.

Nakon uvrštavanja svih ovih vrijednosti u jednadžbu (9) te poslije sređivanja i sažimanja, dobijamo slijedeću jednadžbu za rub r :

$$\begin{aligned}
 & \frac{s_r^2}{1_{r-1} s_{r-1}^3} a_r e_{r-1} M'_{r-2} + \frac{s_r^2}{s_{r-1}^2} a_r \left(2 f_{r-1} - \frac{e_{r-1}}{s_{r-1} 1_{r-1}} \right) M_{r-1} + \\
 & + \left[a_r s_r^2 \left(\frac{1}{3} 1_r^2 a_{r-1} - \frac{d_{r-1}}{1_r s_{r-1}^3} - \frac{c_{r-1}}{s_{r-1}^2} \right) - a_{r-1} \left(c_r + \frac{d_r}{s_r 1_r} \right) \right] M'_{r-1} + \\
 & + \left[a_r s_r^2 \left(\frac{2}{3} 1_r^2 a_{r-1} + \frac{d_{r-1}}{1_r s_{r-1}^3} \right) + a_{r-1} \left(2 c_r + 2 s_r 1_r g_r + \frac{d_r}{s_r 1_r} \right) \right] M_r + \\
 & + a_{r-1} \left(\frac{e_r}{s_r 1_{r+1}} - 2 \frac{1_r}{1_{r+1}} f_r - 2 s_r 1_r h_r - 2 f_r \right) M'_r + \frac{a_{r-1}}{s_r 1_{r+1}} (2 s_r 1_r f_r - e_r) M_{r+1} = \\
 & = -2 E I s_r^2 1_r a_r a_{r-1} \varphi_{r0} - \frac{s_r^2}{s_{r-1}^3} a_r e_{r-1} T_{(r-1)0} - \frac{s_r^2}{s_{r-1}^2} a_r d_{r-1} T'_{(r-1)0} + \\
 & + a_{r-1} \left(\frac{d_r}{s_r} + 1_r c_r \right) T_{r0} + a_{r-1} \left(\frac{e_r}{s_r} - 2 1_r f_r \right) T'_{r0}. \quad (10)
 \end{aligned}$$

Analogno dobijamo jednadžbu za rub $(r-1)$:

$$\begin{aligned}
 & \frac{a_r}{s_{r-1} 1_{r-1}} (2 s_{r-1} 1_r f_{r-1} - e_{r-1}) M'_{r-2} + a_r \left(\frac{e_{r-1}}{s_{r-1} 1_{r-1}} - 2 \frac{1_r}{1_{r-1}} f_{r-1} - \right. \\
 & \left. - 2 s_{r-1} 1_r h_{r-1} - 2 f_{r-1} \right) M_{r-1} + \left[a_{r-1} s_{r-1}^2 \left(\frac{2}{3} 1_r^2 a_r + \frac{d_r}{1_r s_r^3} \right) + \right. \\
 & + a_r \left(2 c_{r-1} + 2 s_{r-1} 1_r g_{r-1} + \frac{d_{r-1}}{s_{r-1} 1_r} \right) \left. \right] M'_{r-1} + \left[a_{r-1} s_{r-1}^2 \left(\frac{1}{3} 1_r^2 a_r - \right. \right. \\
 & \left. - \frac{d_r}{1_r s_r^3} - \frac{c_r}{s_r^2} \right) - a_r \left(c_{r-1} + \frac{d_{r-1}}{s_{r-1} 1_r} \right) \left. \right] M_r + \frac{s_{r-1}^2}{s_r^2} a_{r-1} \left(2 f_r - \frac{e_r}{s_r 1_{r+1}} \right) M'_r + \\
 & + \frac{s_{r-1}^2}{1_{r+1} s_r^3} a_{r-1} e_r M_{r+1} = -2 E I s_{r-1}^2 1_r a_r a_{r-1} \varphi'_{(r-1)0} + \\
 & + a_r \left(\frac{e_{r-1}}{s_{r-1}} - 2 1_r f_{r-1} \right) T_{(r-1)0} + a_r \left(\frac{d_{r-1}}{s_{r-1}} + 1_r c_{r-1} \right) T'_{(r-1)0} - \\
 & - \frac{s_{r-1}^2}{s_r^2} a_{r-1} d_r T_{r0} - \frac{s_{r-1}^2}{s_r^2} a_{r-1} e_r T'_{r0}. \quad (11)
 \end{aligned}$$

Ovo su jednadžbe *šest momenata*. Ovakvu jednadžbu smo u stanju napisati za svaki rub oslonca, i tako dobijamo sistem od $2n-2$ jednadžbi. Rješavanjem ovog sistema mogu se dobiti vrijednosti momenata savijanja na rubovima oslonaca, a iz ovih i poprečne sile na tim rubovima.

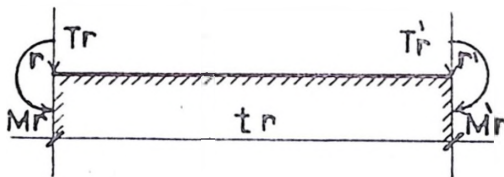
Članovi uz nepoznate momente na lijevoj strani i uz faktore koji ovise o vanjskom opterećenju na desnoj strani jednadžbi mogu se za svaki zadani slučaj izračunati. Da se to izračunavanje olakša, date su tabelarno vrijednosti za izraze označene s a, c, d, e, f, g, h.

Nakon određivanja rubnih momenata i poprečnih sila, lako možemo dobiti moment i poprečnu silu u svakoj tački nosača između oslonaca koristeći se poznatim pravilima iz statike.

Prije nego što predemo na primjenu dobivenih jednadžbi u specijalnim slučajevima koji u praksi najčešće dolaze, treba ispitati dijelove nosača na osloncima, tj. izračunati momente i poprečne sile u bilo kojoj tački nosača na osloncu, kao i naprezanje podloge u toj tački.

ISPITIVANJE DIJELA NOSAČA NA OSLONCU

Posmatrajmo dio nosača na osloncu $r-r'$ dužine t_r koji je na rubu r opterećen momentom M_r i poprečnom silom T_r , a na rubu r' momentom M_r' i poprečnom silom T_r' (sl. 5).



Sl. 5.

Da dobijemo moment savijanja i poprečnu silu u bilo kojoj tački tog dijela nosača, potrebni su nam izrazi:

$$M_{rx} = -EI \frac{d^2 y}{dx^2} \quad \text{i} \quad T_{rx} = -EI \frac{d^3 y}{dx^3},$$

koje dobijamo kao drugu, odnosno treću derivaciju po x -u izraza (4).

Oni glase:

$$\begin{aligned} M_{rx} = & -\frac{1}{s_r (\sin^2 z_r - \sin^2 s_r)} \{ T_r [\sin h z_r \sin s_r x \sin h s_r (t_r - x) - \\ & - \sin z_r \sin h s_r x \sin s_r (t_r - x)] + T_r' [\sin h z_r \sin h s_r x \sin s_r (t_r - x) - \\ & - \sin z_r \sin s_r x \sin h s_r (t_r - x)] + M_r s_r [\cos z_r \sin h s_r x \sin s_r (t_r - x) + \\ & + \sin z_r \cos h s_r x \sin s_r (t_r - x) - \cos h z_r \sin s_r x \sin h s_r (t_r - x) - \\ & - \sin h z_r \cos s_r x \sin h s_r (t_r - x)] - M_r' s_r [\cos h z_r \sin h s_r x \sin s_r (t_r - x) + \\ & + \sin h z_r \sin h s_r x \cos s_r (t_r - x) - \cos z_r \sin s_r x \sin h s_r (t_r - x) - \\ & - \sin z_r \sin s_r x \cos h s_r (t_r - x)] \}, \end{aligned}$$

te:

$$T_{rx} = \frac{1}{(\sin^2 z_r - \sin^2 s_r)} T_r [\sin h z_r \cos s_r x \sin h s_r (t_r - x) - \\ - \sin h z_r \sin s_r x \cos h s_r (t_r - x) - \sin z_r \cos h s_r x \sin s_r (t_r - x) + \\ + \sin z_r \sin h s_r x \cos s_r (t_r - x)] + T'_r [\sin h z_r \cos h s_r x \sin s_r (t_r - x) - \\ - \sin h z_r \sin h s_r x \cos s_r (t_r - x) - \sin z_r \cos s_r x \sin h s_r (t_r - x) + \\ + \sin z_r \sin s_r x \cos h s_r (t_r - x)] + M_r s_r [\cos z_r \cos h s_r x \sin s_r (t_r - x) - \\ - \cos z_r \sin h s_r x \cos s_r (t_r - x) + \sin z_r \sin h s_r x \sin s_r (t_r - x) - \\ - \sin z_r \cos h s_r x \cos s_r (t_r - x) - \cos h z_r \cos s_r x \sin h s_r (t_r - x) + \\ + \cos h z_r \sin s_r x \cos h s_r (t_r - x) + \sin h z_r \sin s_r x \sin h s_r (t_r - x) + \\ + \sin h z_r \cos s_r x \cos h s_r (t_r - x)] - M'_r s_r [\cos h z_r \cos h s_r x \sin s_r (t_r - x) - \\ - \cos h z_r \sin h s_r x \cos s_r (t_r - x) + \sin h z_r \cos h s_r x \cos s_r (t_r - x) + \\ + \sin h z_r \sin h s_r x \cos s_r (t_r - x) - \cos z_r \cos s_r x \sin h s_r (t_r - x) + \\ + \cos z_r \sin s_r x \cos h s_r (t_r - x) - \sin z_r \cos s_r x \cos h s_r (t_r - x) + \\ + \sin z_r \sin s_r x \sin h s_r (t_r - x)]:$$

Ako u ove izraze uvedemo sljedeće zamjene:

$$\left. \begin{aligned} \sin s_r (t_r - x) &= \sin z_r \cos s_r x - \cos z_r \sin s_r x \\ \cos s_r (t_r - x) &= \cos z_r \cos s_r x + \sin z_r \sin s_r x \\ \sin h s_r (t_r - x) &= \sin h z_r \cos h s_r x - \cos h z_r \sin h s_r x \\ \cos h s_r (t_r - x) &= \cos h z_r \cos h s_r x - \sin h z_r \sin h s_r x \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

dobijamo nakon sređivanja:

$$M_{rx} = - \frac{1}{s_r (\sin^2 z_r - \sin^2 s_r)} \{ \sin s_r x \cos h s_r x [T_r \sin^2 z_r - T'_r \sin z_r \sin h z_r - \\ - M_r s_r (\sin z_r \cos z_r + \sin h z_r \cos h z_r) + M'_r s_r (\sin h z_r \cos z_r + \sin z_r \cos h z_r)] - \\ - \sin s_r x \sin h \sin s_r x [T_r (\sin h z_r \cos h z_r - \sin z_r \cos z_r) + \\ + T'_r (\sin h z_r \cos z_r - \sin z_r \cos h z_r) - M_r s_r (\sin^2 z_r + \sin^2 s_r) + \\ + 2 M'_r s_r \sin h z_r \sin z_r] + \sin h s_r x \cos s_r x [T'_r \sin h z_r \sin z_r - T_r \sin^2 z_r + \\ + M_r s_r (\sin s_r \cos z_r + \sin h z_r \cos h z_r) - M'_r s_r (\sin z_r \cos z_r + \sin h z_r \cos z_r)] - \\ - \cos s_r x \cos h s_r x M_r s_r (\sin^2 z_r - \sin^2 s_r) \},$$

te:

$$\begin{aligned}
 T_{rx} = & -\frac{1}{\sin h^2 z_r - \sin^2 z_r} \{ \sin s_r x \sin h s_r x [T_r (\sin h^2 z_r + \sin^2 z_r) - \\
 & - 2 T_r' \sin z_r \sin h z_r - 2 M_r s_r (\sin z_r \cos z_r + \sin h z_r \cos h z_r) + \\
 & + 2 M_r' s_r (\sin h z_r \cos z_r + \sin z_r \cos h z_r)] + \\
 & + \cos s_r x \cos h s_r x T_r (\sin h^2 z_r - \sin^2 z_r) - \\
 & - \sin s_r x \cos h s_r x [T_r (\sin h z_r \cos h z_r - \sin z_r \cos z_r) + \\
 & + T_r' (\sin h z_r \cos z_r - \sin z_r \cos h z_r) - 2 M_r s_r \sin h^2 z_r + 2 M_r' s_r \sin z_r \sin h z_r] - \\
 & - \cos s_r x \sin h s_r x [T_r (\sinh z_r \cos h z_r - \sin z_r \cos z_r) + \\
 & + T_r' (\sin h z_r \cos z_r - \sin z_r \cos h z_r) - 2 M_r s_r \sin^2 z_r + 2 M_r' s_r \sin z_r \sin h z_r] \}.
 \end{aligned}$$

Koristeći se oznakama (6), te uvodeći:

$$\sin^2 z_r = i_r,$$

$$\sin h^2 z_r = j_r,$$

dobijamo jednostavnije izraze:

$$\begin{aligned}
 M_{rx} = & -\frac{1}{s_r a_r} [\sin s_r x \cos h s_r x (T_r j_r - T_r' f_r - M_r s_r g_r + M_r' s_r h_r) - \\
 & \sin s_r x \sin h s_r x (T_r d_r + T_r' e_r - M_r s_r c_r + 2 M_r' s_r f_r) + \\
 & + \cos s_r x \sin h s_r x (T_r' f_r - T_r i_r + M_r s_r g_r - M_r' s_r h_r) - \\
 & - \cos s_r x \cos h s_r x M_r s_r a_r]
 \end{aligned} \tag{13}$$

te:

$$\begin{aligned}
 T_{rx} = & -\frac{1}{a_r} [\sin s_r x \sin h s_r x (T_r c_r - 2 T_r' f_r - 2 M_r s_r g_r + 2 M_r' s_r h_r) + \\
 & + \cos s_r x \cos h s_r x T_r a_r - \\
 & - \sin s_r x \cos h s_r x (T_r d_r + T_r' e_r - 2 M_r s_r j_r + 2 M_r' s_r f_r) - \\
 & - \cos s_r x \sin h s_r x (T_r d_r + T_r' e_r - 2 M_r s_r i_r + 2 M_r' s_r f_r)].
 \end{aligned} \tag{14}$$

Nas zanimaju ekstremne vrijednosti momenata, pa nam je za to potrebno znati mjesta, odnosno x -e, gdje one nastupaju. To ćemo dobiti ako izraz (14) sravnimo s nulom. Podjelimo ujedno jednadžbe s $\cos s_r x \cos h s_r x$, pa ćemo dobiti:

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{tg} s_r x \operatorname{tg} h s_r x (T_r c_r - 2 T_r' f_r - 2 M_r s_r g_r + 2 M_r' s_r h_r) + T_r a_r - \\
 & - \operatorname{tg} s_r x (T_r d_r + T_r' e_r - 2 M_r s_r j_r + 2 M_r' s_r f_r) - \\
 & - \operatorname{tg} h s_r x (T_r d_r + T_r' e_r - 2 M_r s_r i_r + 2 M_r' s_r f_r) = 0.
 \end{aligned}$$

Pošto su svi izrazi u zagradama, kao i slobodni član, poznati, tj. mogu se za svaki zadani slučaj izračunati, to ćemo radi jednostavnosti pisati jednadžbu u ovom obliku:

$$A_{Tr} \operatorname{tg} s_r x + B_{Tr} \operatorname{tg} h s_r x - C_{Tr} \operatorname{tg} s_r x s_r x \operatorname{tg} h s_r x D_{Tr}. \quad (15)$$

gdje su:

$$\left. \begin{aligned} A_{Tr} &= T_r d_r + T_r e_r - 2 M_r s_r j_r + 2 M_r s_r f_r \\ B_{Tr} &= T_r d_r + T_r e_r - 2 M_r s_r i_r + 2 M_r s_r f_r \\ C_{Tr} &= T_r c_r - 2 T_r f_r - 2 M_r s_r g_r + M_r s_r h_r \\ D_{Tr} &= T_r a_r \end{aligned} \right\}, \quad (16)$$

Dakle momenti imaju ekstremnu vrijednost za sve $s_r x$ koji zadovoljavaju jednadžbu (15).

Ovu jednadžbu ne možemo riješiti u eksplicitnom obliku. Zbog toga ćemo postupiti na slijedeći način:

Ako pogledamo vrijednosti za $\operatorname{tg} h$ vidimo da se one brzo približuju jedinici. Stavimo najprije da je $\operatorname{tg} h s_r x = 1,00$, pa je:

$$\operatorname{tg} s_r x' = \frac{D_{Tr} - B_{Tr}}{A_{Tr} - C_{Tr}},$$

odnosno:

$$s_r x'_1 = \arctg \frac{D_{Tr} - B_{Tr}}{A_{Tr} - C_{Tr}}, \quad (17)$$

$$s_r x'_2 = s_r x'_1 + \pi,$$

$$s_r x'_3 = s_r x'_1 + 2\pi \text{ itd.}$$

Oni $s_r x'$ za koje se $\operatorname{tg} h s_r x'$ razlikuje od jedinice za manje od unaprijed usvojene veličine ϵ mogu se uzeti kao definitivni. Ostale $s_r x'$, koji ne zadovoljavaju taj uslov, računamo ponovno, tj.:

$$s_r x = \arctg \frac{D_{Tr} - B_{Tr} \operatorname{tg} h s_r x'}{A_{Tr} - C_{Tr} \operatorname{tg} h s_r x'}, \quad (18)$$

ponavljajući račun do postizanja tražene tačnosti.

Naravno da samo oni $s_r x$ imaju smisla koji su manji od $s_r t_r$, odnosno manji od z_r .

Veličinu ϵ tako odabiremo da možemo postići poželjnu tačnost. Za praktičnu primjenu dostaje da ona bude $\pm 1 \text{ cm}$. Ako uzmemo u obzir da je red veličine za s_r oko $0,01 \text{ cm}^{-1}$, onda dobijamo za ϵ veličinu $0,01$, pošto je:

$$\epsilon = \Delta x s_r = 1 \cdot 0,01 = 0,01.$$

Ovom ε -nu odgovara $s_r x$, koji se dobije iz:

$$\operatorname{tg} h s_r x = \frac{1 - e^{-2s_r x}}{1 + e^{-2s_r x}} = (1 - e^{-2s_r x})(1 - e^{-2s_r x}) = 1 - \varepsilon,$$

$$1 + e^{-4s_r x} - 2e^{-2s_r x} = 1 - \varepsilon,$$

$$e^{-4s_r x} - 2e^{-2s_r x} + \varepsilon = 0.$$

Ako stavimo da je $e^{-2s_r x} = u$, onda je:

$$u^2 - 2u + \varepsilon = 0,$$

odnosno:

$$u = 1 \pm \sqrt{1 - \varepsilon} = 1 \pm \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\right),$$

ili:

$$e^{-2s_r x} = \frac{1}{2}\varepsilon,$$

odakle slijedi:

$$s_r x = \frac{1}{2} \ln \frac{2}{\varepsilon} = \frac{1}{2} \ln 200,$$

$$s_r x = 2,645 = 2,65.$$

Dakle sve $s_r x$, izračunate po formuli (17), koji su veći od 2,65 ili jednaki 2,65 uzimamo kao definitivne. One $s_r x$ koji su manji od te veličine moramo računati po formuli (18).

Kad tako dobijemo vrijednosti $s_r x$ za koje momenti savijanja dobijaju svoje ekstremne vrijednosti, pristupamo određivanju tih ekstremnih momenata koristeći se formulom (13), koju ćemo radi jednostavnosti pisati u ovom obliku:

$$M_{rx} = -\frac{1}{s_r a_r} (A_{Mr} \sin s_r x \cos h s_r x - B_{Mr} \sin s_r x \sin h s_r x + C_{Mr} \cos s_r x \sin h s_r x - D_{Mr} \cos s_r x \cos h s_r x), \quad (19)$$

gdje su:

$$\left. \begin{aligned} A_{Mr} &= T_r j_r - T_r f_r - M_r s_r g_r + M_r s_r h_r \\ B_{Mr} &= T_r d_r + T_r e_r - M_r s_r c_r + 2 M_r s_r f_r \\ C_{Mr} &= T_r f_r - T_r i_r + M_r s_r g_r - M_r s_r h_r \\ D_{Mr} &= M_r s_r a_r \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Ako poprečne sile na rubovima r i r' imaju smjer gravitacije što odgovara predznacima $-T_r$ i $+T_r$, (što je u praksi najčešće) tada imamo neparni broj ekstremnih vrijednosti momenata, odnosno vrijednosti $s_r x$ za koje one nastaju, od kojih su prva i posljednja minimum. Iz toga

možemo zaključiti da najveći negativni momenti ne nastupaju na rubovima oslonaca, već na udaljenosti x_1 , odnosno x_n od oslonca r , gdje su:

$$x_1 = \frac{s_r x_1}{s_r} \quad \text{odnosno} \quad x_n = \frac{s_r x_n}{s_r}$$

mjesta u kojima nastupa prva i posljednja ekstremna vrijednost momenta savijanja.

NAPREZANJE PODLOGE

Pritisak na podlogu po jedinici dužine oslonca proizilazi iz osnovne diferencijalne jednačbe te iznosi:

$$q_r = k_r y$$

Naprezanje podloge dobijamo ako pritisak po jedinici dužine dijelimo sa širinom nosača b , tj.:

$$\sigma_r = \frac{q_r}{b} = \frac{k_r}{b} y \quad (21)$$

Za y imamo poznat iznos (4). Prevedesit ćemo ga tako da se koristimo zamjenama (12), pa imamo:

$$\begin{aligned} y = & \frac{1}{2 E I s_r^2 (\sin^2 z_r - \sin^2 s_r)} \{ T_r [\sin h z_r \cos s_r x (\cos h z_r \cos h s_r x - \\ & - \sin h z_r \sin h s_r x) - \sin z_r \cos h s_r x (\cos z_r \cos s_r x + \sin z_r \sin s_r x)] + \\ & + T_r [\sin h z_r \cos h s_r x (\cos z_r \cos s_r x + \sin z_r \sin s_r x) - \\ & - \sin z_r \cos s_r x (\cos h z_r \cos h s_r x - \sin h z_r \sin h s_r x)] - \\ & - M_r s_r [\cos h z_r \cos s_r x (\cos h z_r \cos h s_r x - \sin h z_r \sin h s_r x) - \\ & - \sin h z_r \sin s_r x (\cos h z_r \cos h s_r x - \sin h z_r \sin h s_r x) - \\ & - \cos z_r \cos h s_r x (\cos z_r \cos s_r x + \sin z_r \sin s_r x) - \\ & - \sin z_r \sin h s_r x (\cos z_r \cos s_r x + \sin z_r \sin s_r x)] - \\ & - M_r s_r [\cos h z_r \cos h s_r x (\cos z_r \cos s_r x + \sin z_r \sin s_r x) - \\ & - \sin h z_r \cos h s_r x (\sin z_r \cos s_r x - \cos z_r \sin s_r x) - \\ & - \cos z_r \cos s_r x (\cos h z_r \cos h s_r x - \sin h z_r \sin h s_r x) - \\ & - \sin z_r \cos s_r x (\sin h z_r \cos h s_r x - \cos h z_r \sin h s_r x)] \}. \end{aligned}$$

Daljim sređivanjem dobijamo:

$$y = \frac{1}{2EI s_r^3 (\sin^2 z_r - \sin^2 z_r)} \{ \cos s_r x \cos h s_r x [T_r (\sin h z_r \cos h z_r - \sin z_r \cos z_r) + T_r (\cos z_r \sin h z_r - \sin z_r \cos h z_r) - M_r s_r (\sin^2 z_r + \sin^2 z_r) + 2 M_r s_r \sin z_r \sin h z_r + \sin s_r x \cos h s_r x [T_r \sin z_r \sin h z_r - T_r \sin^2 z_r + M_r s_r (\sin h z_r \cos h z_r + \sin z_r \cos z_r) - M_r s_r (\sin z_r \cos h s_r + \cos z_r \sin h z_r)] + \cos s_r x \sin h s_r x [T_r \sin z_r \sin h z_r - T_r \sin^2 z_r + M_r s_r (\sin h z_r \cos h z_r + \sin z_r \cos z_r) - M_r s_r (\sin z_r \cos h s_r + \cos z_r \sin h z_r)] - \sin s_r x \sin h s_r x M_r s_r (\sin^2 z_r - \sin^2 z_r) \}.$$

Ako se koristimo zamjenama (6) onda je:

$$y = \frac{1}{2EI s_r^3 a_r} [\cos s_r x \cos h s_r x (T_r d_r + T_r e_r - M_r s_r c_r + 2 M_r s_r f_r) + \sin s_r x \cos h s_r x (T_r f_r - T_r i_r + M_r s_r g_r - M_r s_r h_r) + \cos s_r x \sin h s_r x (T_r f_r - T_r j_r + M_r s_r g_r - M_r s_r h_r) - \sin s_r x \sin h s_r x M_r s_r a_r]. \quad (22)$$

Naprežanje podloge dobijemo množeći ovaj izraz s $\frac{k_r}{b}$, kao što je to iz (21) vidljivo. Mjesto EI uvrštavamo:

$$EI = \frac{k_r}{4 s_r^4},$$

pa dobijamo:

$$\sigma_{rx} = \frac{2 s_r}{b a_r} \cos s_r x \cos h s_r x (T_r d_r + T_r e_r - M_r s_r c_r + 2 M_r s_r f_r) - \sin s_r x \cos h s_r x (T_r f_r - T_r i_r + M_r s_r g_r - M_r s_r h_r) + \cos s_r x \sin h s_r x (T_r f_r - T_r j_r + M_r s_r g_r - M_r s_r h_r) - \sin s_r x \sin h s_r x M_r s_r a_r. \quad (23)$$

Maksimalna naprežanja dobivamo na rubovima oslonca, tj. za $x = 0$ i $x = r$, te ona iznose:

$$\sigma_r = \frac{2 s_r}{b a_r} (T_r d_r + T_r e_r - M_r s_r c_r + 2 M_r s_r f_r) \quad (24)$$

$$\sigma_r' = \frac{2 s_r}{b a_r} (T_r e_r + T_r d_r + 2 M_r s_r f_r - M_r s_r c_r)$$

Pozitivnom naprezanju odgovara tlak na podlogu, a negativnom vlak podloge. Ovaj posljednji bi izazvao dizanje nosača od podloge, što bi bilo suprotno pretpostavkama. No na podlogu praktično uvijek djeluje neko opterećenje koje poništi ovaj vlak, tako da je uvijek skoro osiguran tlak na podlogu. U nekim slučajevima, kao što ćemo u nekim primjerima kasnije vidjeti, može pomanjkanje ovog opterećenja podloge poremetiti ravnotežu nosača.

Ako (23) sravnimo s nulom, možemo naći odgovarajuće $s_r x$ -e, odnosno x -e, za koje će naprezanje podloge biti jednako nuli. Podijelivši cijeli izraz s $\cos s_r x \cos h s_r x$, dobijamo:

$$A_{Sr} \operatorname{tg} s_r x + B_{Sr} \operatorname{tg} h s_r x - C_{Sr} \operatorname{tg} s_r x \operatorname{tg} h s_r x + D_{Sr} = 0, \quad (25)$$

gdje su:

$$\left. \begin{aligned} A_{Sr} &= T_r f_r - T_r i_r + M_r s_r g_r - M_r s_r h_r \\ B_{Sr} &= T_r f_r - T_r j_r + M_r s_r g_r - M_r s_r k_r \\ C_{Sr} &= M_r s_r a_r \\ D_{Sr} &= T_r d_r + T_r e_r - M_r s_r c_r + 2 M_r s_r f_r \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Jednadžbu (25) rješavamo na isti način kao i (15), tj. uz pretpostavku da je $\operatorname{tg} h s_r x = 1.00$, pa je:

$$\operatorname{tg} s_r x' = \frac{D_{Sr} + B_{Sr}}{C_{Sr} - A_{Sr}},$$

odnosno:

$$s_r x' = \arctg \frac{D_{Sr} + B_{Sr}}{C_{Sr} - A_{Sr}}, \quad (27)$$

$$s_r x'_2 = s_r x'_1 + \pi \text{ itd.},$$

koje uzimamo sa definitivne ako su veći od 2,65 ili jednaki 2.65. Za one $s_r x$ -e koji su manji od 2,65 moramo izvršiti korigiranje po formuli:

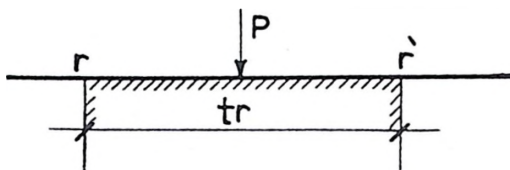
$$s_r x = \arctg \frac{D_{Sr} + B_{Sr} \operatorname{tg} h s_r x'}{C_{Sr} \operatorname{tg} h s_r x' - A_{Sr}}. \quad (28)$$

Napominjemo još da u tačkama u kojima je naprezanje jednako nuli poprečne sile dobijaju svoju ekstremnu vrijednost, koju možemo izračunati ako te $s_r x$ -e uvrstimo u jednadžbu (14).

OPTEREĆENJE NOSAČA NA OSLONCU

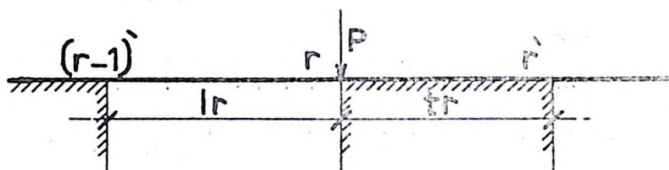
Uzećemo u obzir samo jednoliko opterećenje p po cijeloj širini oslonca. Pojedinačna sila P između rubova širih oslonaca, naročito ako je u sredini ili oko sredine nosača, izaziva u rubovima oslonaca momente za praksu neznatne i beznačajne, pa se takav slučaj može tretirati kao

nosač konačne dužine t_r na elastičnoj podlozi. Ako je uži oslonac, onda se to može svesti na jednoliko opterećenje $p = \frac{P}{t_r}$,



Sl. 6.

Ukoliko sila P djeluje u rubu ili oko ruba oslonca, onda se može smatrati da ona djeluje u samom rubu, a taj slučaj posmatramo kao opterećenje polja 1_r u osloncu r silom P , što se rješava na izneseni način.****)



Sl. 7.

Dakle ostajemo pri jednolikom opterećenju po cijeloj širini oslonca. Pri tome možemo imati dva slučaja:

a) Nosač je na svim osloncima opterećen istim opterećenjem p po jedinici dužine. Tad se svi oslonci potpuno jednako sliježu:

$$y = \frac{p}{k},$$

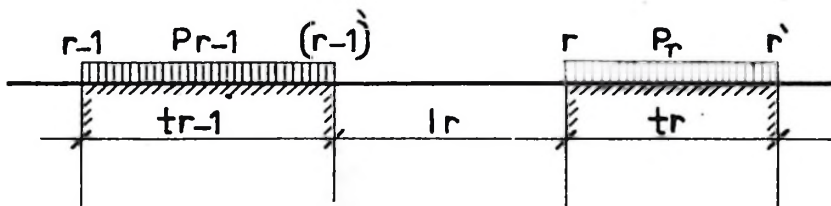
ukoliko imaju jedan te isti koeficijent podloge k , što zasad pretpostavljamo.

U tom slučaju sam nosač ne trpi nikakve promjene. Jedino oslonci trpe dodatno tlačno naprezanje u iznosu od:

$$\Delta \sigma = \frac{p}{b},$$

gdje je b širina nosača.

b) Nosač je po širini svakog oslonca opterećen jednolikim opterećenjem koje je po intenzitetu različito, tj.: $p_1, p_2, \dots, p_{r-1}, p_r \dots p_n$.



Sl. 8.

Tada se oslonci različito sliježu, a posljedica je toga da nosač dobija svoju elastičnu liniju, tj. momente i poprečne sile.

Za njihovo određivanje koristimo se jednačbom (9), s tim što otpada φ_{r0} jer nema opterećenja u polju, tj:

$$\frac{M_{r-1} l_r}{6EI} + \frac{M_r l_r}{3EI} + \varphi_r + \psi_r = 0.$$

Ovdje φ_r ima istu vrijednost kao i ranije u (8), tj:

$$\varphi_r = \frac{1}{2EIs_r^3 a_r} (2T_r f T_r c_r + 2M_r s_r d_r - 2M_r s_r e_r).$$

Izraz za ψ_r se mijenja utoliko što još dolazi u obzir različito slije-ganje rubova oslonaca usljed različitog opterećenja oslonaca, te će glasiti:

$$\psi_r = \frac{1}{21_r EI} \left(\frac{T_{r-1} e_{r-1} + T_{r-1} d_{r-1} + 2M_{r-1} s_{r-1} f_{r-1} - M_{r-1} s_{r-1} c_{r-1}}{s_{r-1}^3 a_{r-1}} - \frac{T_r d_r + T_r e_r - M_r s_r c_r + 2M_r s_r f_r}{s_r^3 a_r} + \frac{2EJp_{r-1}}{k_{r-1}} - \frac{2EI p_r}{k_r} \right). \text{*****}$$

Nadalje dolaze poprečne sile u rubovima oslonaca:

$$\begin{aligned} T_{r-1} &= \frac{M_{r-2} - M_{r-1}}{l_{r-1}}, \\ T_{r-1} &= \frac{M_r - M_{r-1}}{l_r}, \\ T_r &= \frac{M_{r-1} - M_r}{l_r}, \\ T_r &= \frac{M_{r+1} - M_r}{l_{r+1}}, \end{aligned}$$

Nakon uvrštavanja svih ovih vrijednosti, dobijamo jednačbu šest momenata za rub r kojoj je lijeva strana ista kao u (10), a desna glasi:

$$-2EIs_r^2 a_r a_{r-1} \left(\frac{p_{r-1}}{k_{r-1}} - \frac{p_r}{k_r} \right). \quad (29.)$$

Za rub $(r-1)$ jednačba ima lijevu stranu kao (11), a desnu:

$$-2EIs_{r-1}^2 a_r a_{r-1} \left(\frac{p_r}{k_r} - \frac{p_{r-1}}{k_{r-1}} \right). \quad (30)$$

Kad dobijemo momente na rubovima oslonaca pomoću ovih jednačbi, a iz ovih i poprečne sile, postupak je analogan onom ranije opisanom, jedino napominjemo da je u proračunu naprezanja podloge osim uticaja rubnih momenata i poprečnih sila, još i:

$$\Delta\sigma_r = \frac{p_r}{b}.$$

Odmah napominjemo da se, u granicama opterećenja koja redovito dolaze u praksi, dobijaju neznatni momenti i poprečne sile, koji kao takvi nemaju značenja za sam nosač, tako da u većini slučajeva ne treba uzimati uticaj različitih opterećenja oslonaca za nosač.

Ovo bi dolazilo u obzir samo u slučaju izvanredno velikih razlika u opterećenju pojedinih oslonaca ili u slučaju različitog slijeganja tih oslonaca (popuštanje tla i sl.). Ako je slijeganje oslonca t_r δ_r , a oslonca t_{r-1} δ_{r-1} , onda desna strana jednadžbe za rub glasi:

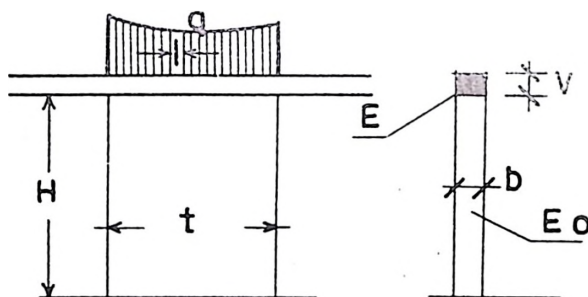
$$-2EI s_r^2 a_r a_{r-1} (\delta_{r-1} - \delta_r). \quad (31)$$

KOEFICIJENT PODLOGE

Iz osnovne diferencijalne jednadžbe $EI \frac{d^4 y}{dx^4} = -ky$ proizilazi i statičko značenje koeficijenta podloge k . To je pritisak, odnosno opterećenje oslonca po jedinici širine koje izaziva jedinični progib, tj. $y=1$, te mu je prema tome dimenzija kg/cm^2 .

Ovaj koeficijent ovisi o elastičnim svojstvima materijala podloge, dakle praktički o materijalu od koga su izvedeni oslonci.

Uzmimo, kao na sl. 9, jedan oslonac širine t , visine H , debljine b , materijala modula elastičnosti E_0 .



Sl. 9.

Ako je taj oslonac po jedinici širine opterećen s q , relativno skraćanje će biti:

$$\varepsilon = \frac{y}{H} = \frac{q}{E_0 b}.$$

odakle:

$$q = \frac{E_0 b}{H} y.$$

Za

$$y = 1 \dots q = k,$$

pa je:

$$k = \frac{E_0 b}{H}.$$

Ako to uvrstimo u izraz (3), dobijamo za s :

$$s = \sqrt[4]{\frac{E_0 b}{4 H E I}}.$$

Za pravokutni presjek $I = \frac{1}{12} b v^3$ pa je:

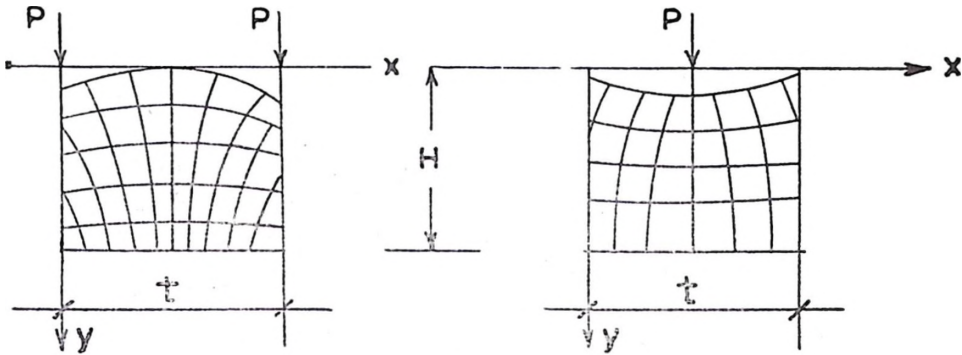
$$s = \sqrt[4]{\frac{3 E_0}{H v^3 E}}. \quad (32)$$

Iz formule se vidi da je dimenzija s cm^{-1} .

Na slici 10. su pokazane trajektorije naprezanja. Prema njima, naprezanja oslonca na nekoj dubini H postaju konstantna. Ta dubina je otprilike jednaka širini oslonca t , tj.

$$H = t \quad (\text{Saint-Venantov princip})$$

Ukoliko je stvarna visina H manja od t treba uzeti u račun tu stvarnu visinu.



Sl. 10.

Tačnije vrijednosti za koeficijent podloge k mogle bi se dati samo na temelju eksperimentalnih istraživanja, što nije predmet ovog rada.

Daju se neke vrijednosti za E koje će nam trebati pri rješavanju zadataka:

Materijal	Opeka				Beton				
	Marka 70-110		Marka 150-200		M70	M110	M160	M220	M300
	vap. mal.	cem. mal.	vap. mal.	cem. mal.					
E u 1000 kg/cm ²	40	60	70	100	140	190	240	290	330

Očigledno je da naponsko stanje oslonaca spada u problem ravnog naprezanja. Rješenje se svodi na iznalaženje funkcije naprezanja $F(x, y)$ koja mora da zadovolji parcijalnu diferencijalnu jednačinu:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0,$$

pa je onda:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}.$$

Pri tome treba da budu zadovoljeni sljedeći konturni uslovi:

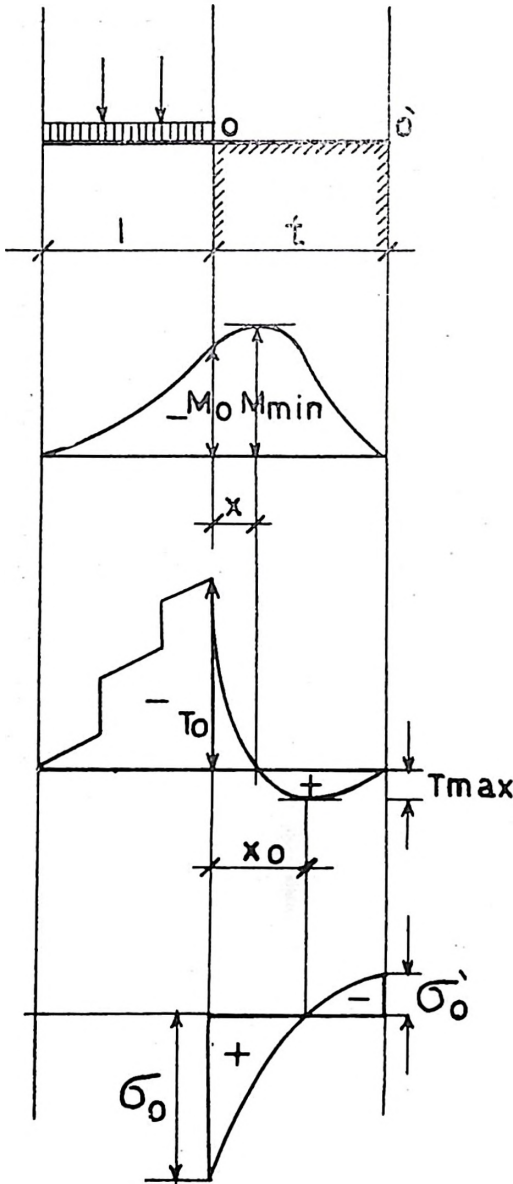
po konturi $y=0$ opterećenje je prema (23),

po konturi $y=H$ opterećenje je: $-\frac{1}{t} \int_0^t q dx$, gde je $q = (23)$,

po konturi $x=0$ i $x=t$: $\tau_{xy} = 0$.

SPECIJALNI SLUČAJEVI

Da bi se izloženo moglo primijeniti na pojedine slučajeve koji praksi najčešće dolaze, napisat ćemo potrebne jednadžbe i formule uzevši u obzir uslove koji za te slučajeve vrijede, a koristeći se općim izrazima koji su dosad izvedeni. Svaki slučaj će biti popraćen numeričkim primjerom, koji će stvar još bolje rasvijetliti.



Sl. 11.

1. KONZOLNI NOSAČ

Imamo konzolni nosač krutosti EI , raspona l , koji se oslanja na elastični oslonac širine t , s koeficijentom podloge k , te sa

$$s = \sqrt[4]{\frac{E_0 b}{4EIH}}.$$

Nosač je proizvoljno opterećen unutar raspona.

Za ovaj slučaj vrijede sljedeće oznake:

$$M_r = M_0,$$

$$M'_r = 0,$$

$$T_r = T_0,$$

$$T'_r = 0.$$

M_0 i T_0 se ovdje dobijaju iskorištavanjem pravila elementarne statike.

Potrebno je izračunati:

$$M_{\min}, T_{\max}, \text{ te } \sigma_0 \text{ i } \sigma'_0.$$

Uvodeći u opće izraze vrijednosti i oznake za ovaj slučaj, dobijamo:

$$\begin{aligned} M_{ox} = & -\frac{1}{sa} (A_M \sin sx \cos h sx - \\ & - B_M \sin sx \sin h sx + \\ & + C_M \cos sx \sin h sx - \\ & - D_M \cos sx \cos h sx), \quad (33) \end{aligned}$$

gdje su:

$$\left. \begin{aligned} A_M &= T_0 j - M_0 s g \\ B_M &= T_0 d - M_0 s c \\ C_M &= -T_0 i + M_0 s g \\ D_M &= M_0 s a \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Sx_m za koje momenti dobijaju ekstremne vrijednosti pronalaze se tako da zadovoljavaju jednačbu:

$$A_T \operatorname{tg} sx_m + B_T \operatorname{tg} h sx_m - C_T \operatorname{tg} sx_m \operatorname{tg} h sx_m - D_T, \quad (35)$$

gdje su:

$$\left. \begin{aligned} A_T &= T_0 d - 2 M_0 s j \\ B_T &= T_0 d - 2 M_0 s i \\ C_T &= T_0 c - 2 M_0 s g \\ D_T &= T_0 a \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Sx_m dobijamo koristeći se formulom (17) i (18), tj:

$$sx'_m = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{D_T - B_T}{A_T - C_T}, \quad (37)$$

za sx_m veće od 2,65 ili jednake 2,65 (ako imaju smisla, tj. ako su manji od st), i:

$$sx_m \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{D_T - B_T \operatorname{tg} h sx'_m}{A_T - C_T \operatorname{tg} h sx'_m}, \quad (38)$$

za sx_m manje od 2,65

Naprezanja na rubovima oslonaca iznose:

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \frac{2s}{ba} (T_0 d - M_0 s c) \\ \sigma'_0 &= \frac{2s}{ba} (T_0 e + M_0 s f) \end{aligned} \quad (40)$$

Sx_0 za koje je $\sigma = 0$ moraju da zadovolje jednačbu:

$$A_S \operatorname{tg} sx_0 + B_S \operatorname{tg} h sx_0 - C_S \operatorname{tg} h sx_0 + sx_0 + D_S = 0, \quad (41)$$

gdje su:

$$\left. \begin{aligned} A_S &= -T_0 i + M_0 s g \\ B_S &= -T_0 j + M_0 s g \\ C_S &= M_0 s a \\ D_S &= T_0 - M_0 s c \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Dalje je:

$$sx_0^1 = \arctg \frac{D_S + B_S}{C_S - A_S}, \quad (43)$$

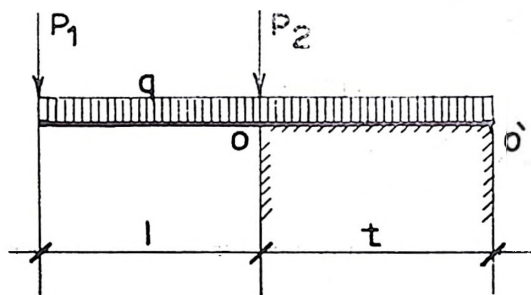
za sx_0 veće ili jednake 2,65, i:

$$sx_0 = \arctg \frac{D_S + B_S \operatorname{th} sx_0}{C_S + gh sx_0 - A_S}, \quad (44)$$

za sx_0 manje od 2,65.

Za sx_0 dobijamo ekstremne vrijednosti poprečne sile koristeći se jednadžbom (14), tj:

$$T = -\frac{1}{a} (C_T \sin sx \sin h sx + D_T \cos sx \cos h sx - A_T \sin sx \cos h sx - B_T \cos sx \sin h sx). \quad (45)$$



Sl. 12.

Prvi primjer:

Treba proračunati konzolni nosač dat na slici.

Zadano:

raspon konzole: $l = 2,00$ m,

širina oslonca: $t = 2,00$ m,

jednoliko opter.: $q = 3,00$ t/m,

pojedinačne sile: $P_1 = 2,0$ t,

$P_2 = 5,0$ t.

Nosač armiranobetonski: 50/38 cm.

Marka betona: 300.

Oslonac od opeke marke 110, u vapnenom malteru, debljine 38 cm.

Najprije proračunavamo osnovne veličine M_0 , T_0 , s i z :

$$M_0 = -\left(\frac{1}{2} 3,0 \cdot 2,0^2 + 2,0 \cdot 2,0\right) = -10,0 \text{ tm} = -1\,000\,000 \text{ kg cm};$$

$$T_0 = 2,0 \cdot 3,0 + 5,0 = 13,0 \text{ t} = 13\,000 \text{ kg};$$

$$s = \sqrt[4]{\frac{3 E_0}{H \nu^3 E}} \text{ vidi (32),}$$

gdje je:

$E_0 = 40\,000 \text{ kg/cm}^2$ (opeka u vapn. malt. marke 110),

$E = 330\,000 \text{ kg/cm}^2$ (beton marke 300),

$V = 50 \text{ cm}$ (visina nosača),

$H = t = 200 \text{ cm}$ (visina oslonca);

nakon uvrštavanja:

$$s = \sqrt[4]{\frac{3 \cdot 40 \cdot 000}{20 \cdot 50^3 \cdot 333 \cdot 000}} = 0,011 \text{ cm}^{-1},$$

$$z = s t = 200 \cdot 0,011 = 2,2.$$

Ovoj vrijednosti za z odgovaraju vrijednosti koeficijenata koji ulaze u formule, i to:

$$a = 19,21,$$

$$c = 20,52,$$

$$d = 20,84,$$

$$e = -6,32,$$

$$f = 3,61,$$

$$g = 19,88,$$

$$i = 0,664,$$

$$j = 19,86.$$

Vrijednosti koeficijenata uzete su iz priloženih tablica.

Prelazimo na određivanje onih sx_m za koje dobijamo ekstremne vrijednosti momenata. Koristimo se jednačbom (37):

$$sx_m = \arctg \frac{D_T - B_T}{A_T - C_T},$$

gdje su:

$$\begin{aligned} A_T &= T_0 d - 2 M_0 s j = 13.000 \cdot 20,84 + 2 \cdot 1.000.000 \cdot 0,011 \cdot 19,86 = \\ &= 7,08 \cdot 10^5 \text{ kg}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_T &= T_0 d - 2 M_0 s i = 13.000 \cdot 20,84 + 2 \cdot 1.000.000 \cdot 0,011 \cdot 0,664 = \\ &= 2,87 \cdot 10^5 \text{ kg}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_T &= T_0 c - 2 M_0 s g = 13.000 \cdot 20,52 + 2 \cdot 1.000.000 \cdot 0,011 \cdot 19,88 = \\ &= 7,04 \cdot 10^5 \text{ kg}, \end{aligned}$$

$$D_T = T_0 a = 13.000 \cdot 19,21 = 2,50 \cdot 10^5 \text{ kg}.$$

Nakon uvrštavanja:

$$sx'_m = \arctg \frac{2,50 - 2,87}{7,08 - 7,04} = \arctg (-9,25) = -\arctg 9,25,$$

$$sx'_m = -1,46 + 3,14 = 1,68,$$

$$\tanh 1,68 = 0,933.$$

Dalje, korigiramo, vrijednosti za sx_m te dobijamo pomoću formule (38):

$$sx_{m1} = \arctg \frac{D_T - B_T \tanh sx'_m}{A_T - C_T \tanh sx'_m};$$

nakon zamjene:

$$sx_{m1} = \arctg \frac{2,50 - 2,87 \cdot 0,933}{7,08 - 7,04 \cdot 0,933} = \arctg(-0,44),$$

$$sx_{m1} = -0,42 \quad \operatorname{tg} h(-0,42) = -0,397;$$

korigiramo dalje:

$$sx_{m1} = \arctg \frac{2,50 + 2,87 \cdot 0,397}{7,08 + 7,04 \cdot 0,397} = \arctg 0,369,$$

$$sx_{m1} = 0,36 \quad \operatorname{tg} h 0,36 = 0,345,$$

$$sx_{m1} = \arctg \frac{2,50 - 2,86 \cdot 0,345}{7,08 - 7,04 \cdot 0,345} = \arctg 0,325,$$

$$sx_{m1} = 0,32 \quad \operatorname{tg} h 0,32 = 0,310;$$

i konačno:

$$sx_{m1} = \arctg \frac{2,50 - 2,87 \cdot 0,310}{7,08 - 7,04 \cdot 0,310} = \arctg 0,329,$$

$$sx_{m1} = 0,32.$$

Ovo je tražena vrijednost, jer se daljim računom više ne mijenja.

$Sx_{m1} = 2,20$ jer je na kraju oslonca poprečna sila jednaka nuli. Prema tome,

$M_{\min}$ nastaje u tački koja je od ruba O udaljena za: $x_{m1} = \frac{0,32}{0,012} = 29 \text{ cm}$.

Veličinu ovog momenta dobijamo iz formule (33):

$$M_{\min} = -\frac{1}{s a} (A_M \sin sx_{m1} \cos h sx_{m1} - B_M \sin sx_{m1} \sin h sx_{m1} + \\ + C_M \cos sx_{m1} \sin h sx_{m1} - D_M \cos sx_{m1} \cos h sx_{m1}),$$

gdje su:

$$A_M = T_0 j - M_0 s g = 13.000 \cdot 19,86 + 1.000.000 \cdot 0,011 \cdot 19,88 = 4,77 \cdot 10^5 \text{ kg},$$

$$B_M = T_0 d - M_0 s c = 13.000 \cdot 20,84 + 1.000.000 \cdot 0,011 \cdot 20,52 = 4,97 \cdot 10^5 \text{ kg},$$

$$C_M = -T_0 i + M_0 s g = -13.000 \cdot 0,72 - 1.000.000 \cdot 0,011 \cdot 19,88 = -2,28 \cdot 10^5 \text{ kg},$$

$$D_M = M_0 s a = -1.000.000 \cdot 0,011 \cdot 19,21 = -2,11 \cdot 10^5 \text{ kg}.$$

Nakon uvrštavanja:

$$M_{\min} = \frac{10^5}{0,011 \cdot 19,21} (4,77 \sin 0,32 \cos h 0,32 - 4,97 \sin 0,32 \sin h 0,32 - \\ - 2,28 \cos 0,32 \sin h 0,32 + 2,11 \cos 0,32 \cos h 0,32),$$

$$M_{\min} = -1,180.000 \text{ kg cm} = -11,80 \text{ tm}.$$

Druga ekstremna vrijednost momenta, koja odgovara $sx_{m2} = 2,20$, tj. na rubu O' , jednaka je nuli:

$$M_{\max} = 0.$$

Na redu je proračun naprežanja podloge. Njih dobijamo iz formula (40):

$$\sigma_0 = \frac{2s}{ba} (T_0 d - M_0 s c) = \frac{2 \cdot 0,011}{38 \cdot 19,21} (13.000 \cdot 20,84 + 1.000.000 \cdot 0,011 \cdot 20,52),$$

$$\sigma_0 = 14,95 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma'_0 = \frac{2s}{ba} (T_0 e + 2 M_0 s f) = \frac{2 \cdot 0,011}{38 \cdot 19,21} (-13.000 \cdot 6,32 - 1.000.000 \cdot 0,011 \cdot 3,61),$$

$$\sigma'_0 = -4,90 \text{ kg/cm}^2.$$

Sx_0 za koji je naprežanje nula dobijamo iz (43):

$$sx'_0 = \arctg \frac{D_S + B_S}{C_S + A_S},$$

gdje su:

$$A_S = -T_0 i + M_0 s g = -13.000 \cdot 0,72 - 1.000.000 \cdot 0,011 \cdot 19,88 = -2,28 \cdot 10^5 \text{ kg},$$

$$B_S = -T_0 j + M_0 s g = -13.000 \cdot 19,86 - 1.000.000 \cdot 0,011 \cdot 19,88 = -4,77 \cdot 10^5 \text{ kg},$$

$$C_S = M_0 s a = -1.000.000 \cdot 0,011 \cdot 19,21 = -2,11 \cdot 10^5 \text{ kg},$$

$$D_S = T_0 d - M_0 s c = 13.000 \cdot 20,84 + 1.000.000 \cdot 0,011 \cdot 20,52 = 4,97 \cdot 10^5 \text{ kg}.$$

Nakon uvrštavanja:

$$sx'_0 = \arctg \frac{4,97 - 4,77}{2,28 - 2,11} = \arctg 1,176,$$

$$sx'_0 = 0,87 \quad \text{tg } h 0,87 = 0,701.$$

Korigirana vrijednost prema (44):

$$sx_0 = \arctg \frac{4,97 - 4,77 \cdot 0,701}{2,28 - 2,11 \cdot 0,701} = \arctg 2,04,$$

$$sx_0 = 1,12 \quad \text{tg } h 1,12 = 0,808,$$

$$sx_0 = \arctg \frac{4,97 - 4,77 \cdot 0,808}{2,28 - 2,11 \cdot 0,808} = \arctg 1,97,$$

$$sx_0 = 1,10.$$

Dakle naprežanje je jednako nuli u tački koja je od ruba 0 udaljena za:

$$x_0 = \frac{1,10}{0,011} = 100 \text{ cm}.$$

Ako opterećenje $q = 3.000 \text{ kg/cm}^2$ djeluje i na osloncu onda ono izaziva tlačno naprežanje podloge u iznosu:

$$\Delta \sigma = \frac{30}{38} = 0,8 \text{ kg/cm}^2,$$

pa će rubna naprezanja iznositi:

$$\sigma_{0 \max} = 14,95 + 0,8 = 15,75 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma_{0 \min} = -(4,90 - 0,8) = -4,10 \text{ kg/cm}^2,$$

Za osiguranje stabilnosti potrebno je eliminisati vlak od 4,1 kg/cm². To se postiže u praksi težinom gornjih etaža.

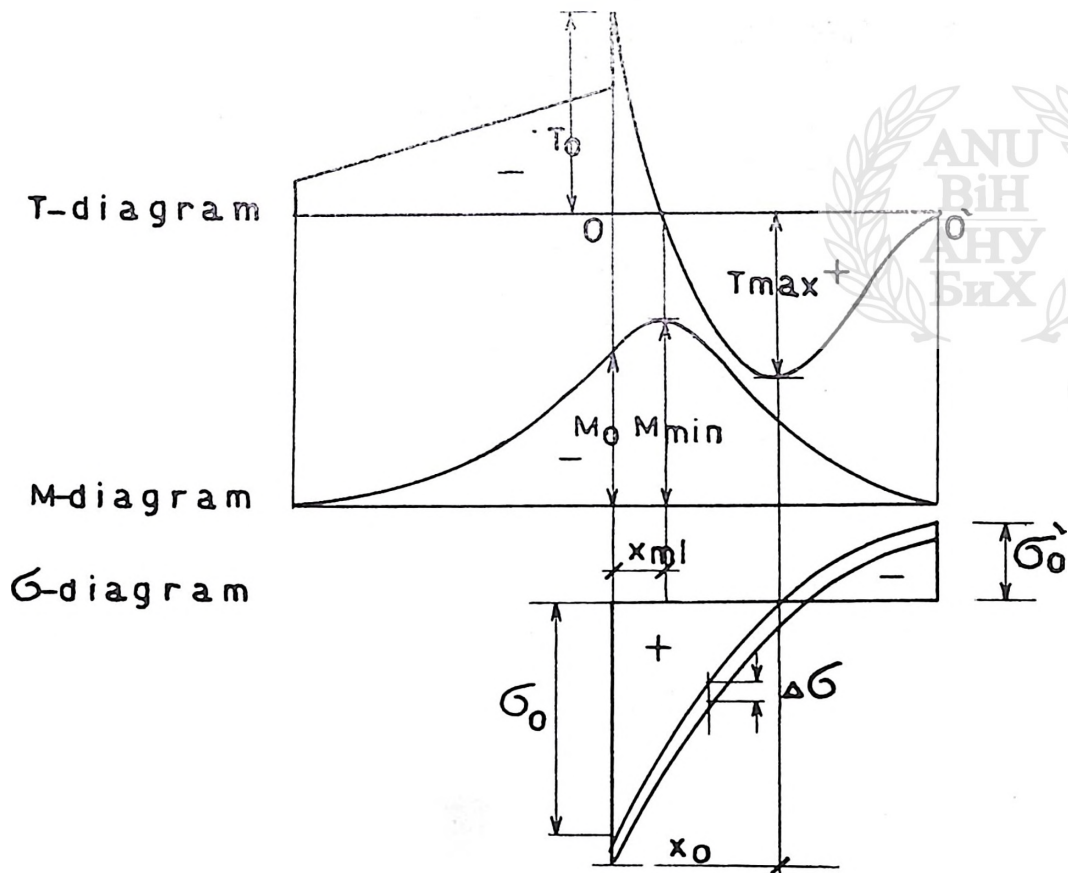
Konačno treba još odrediti vrijednost $T_{\max}$. Ona nastaje za $sx_0 = 1,10$, a određuje se formulom (45):

$$T_{\max} = -\frac{1}{a} (C_T \sin sx_0 \sin h sx_0 + D_T \cos sx_0 \cos h sx_0 - A_T \sin sx_0 \cos h sx_0 - B_T \cos sx_0 \sin h sx_0).$$

Nakon uvrštavanja:

$$T_{\max} = -\frac{10^5}{19,21} (7,04 \sin 1,10 \sin h 1,10 + 2,50 \cos 1,10 \cos h 1,10 - 7,08 \sin 1,10 \cos h 1,10 - 2,87 \cos 1,10 \sin h 1,10) = 10,5 \text{ t.}$$

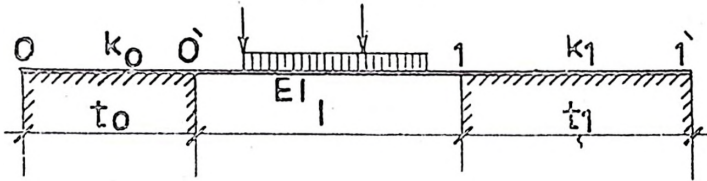
Sad možemo nacrtati odgovarajuće dijagrame:



Sl. 13.

2. NOSAČ NA DVA OSLONCA

Šema takvog nosača data je na slici. Nosač raspona 1, krutosti EI , proizvoljno opterećen unutar polja. Jedan oslonac širine t_0 s koeficijentom podloge k_0 , drugi širine t_1 s koeficijentom podloge k_1 .



Sl. 14.

Sistem je dva puta statički neodređen. Kao statički prekobrojne veličine dolaze momenti na rubovima $0'$ i 1 , tj. M_0' i M_1 .

Za njihovo određivanje koristimo se jednačbama (10) i (11), koje moramo prilagoditi ovom slučaju. Takve jednačbe možemo napisati za rub $0'$ i rub 1 tako da smo u stanju odrediti statički prekobrojne momente M_0' i M_1 .

Za naš slučaj je:

$$M_{r-1}' = M_0',$$

$$M_r = M_1,$$

$$\left. \begin{array}{l} M_{r-2}' \\ M_{r-1}' \\ M_r' \\ M_{r+1}' \end{array} \right\} = 0,$$

$$T_{(r-1)0}' = T_{00}',$$

$$T_{r0} = T_{10},$$

$$\left. \begin{array}{l} T_{(r-1)0}' \\ T_{r0}' \end{array} \right\} = 0,$$

$$s_{r-1} = s_0 = \sqrt[4]{\frac{k_0}{4EI}},$$

$$z_0 = s_0 t_0,$$

$$s_r = s_1 = \sqrt[4]{\frac{k_1}{4EI}},$$

$$z_1 = s_1 t_1,$$

$$l_r = l,$$

$$\varphi'_{(r-1)0} = \varphi'_{00},$$

$$\varphi_{r0} = \varphi_{10}.$$

Svi koeficijenti s indeksom $(r-1)$ dobijaju indeks 0, a s indeksom r — indeks 1.

Nakon uvrštavanja svih tih zamjena, potrebne dvije jednačbe za određivanje nepoznatih momenata M'_0 i M'_1 izgledat će ovako:

za rub $0'$ —

$$\left[a_0 s_0^2 \left(\frac{2}{3} l^2 a_1 + \frac{d_1}{l s_1^3} \right) + a_1 \left(2 c_0 + 2 s_0 2 g_0 + \frac{d_0}{s_0 l} \right) \right] M'_0 +$$

$$+ \left[a_0 s_0^2 \left(\frac{1}{3} l^2 a_1 - \frac{d_1}{s_1^3 l} - \frac{c_1}{s_1^2} \right) - a_1 \left(c_0 + \frac{d_0}{s_0 l} \right) \right] M'_1 = -2 E I s_0^2 l a_0 a_1 \varphi'_{00} +$$

$$+ a_1 \left(\frac{d_0}{s_0} + c_0 l \right) T'_{00} - \frac{s_0^2}{s_1^3} a_0 d_1 T_{10}; \quad (46)$$

za rub 1 —

$$\left[a_1 s_1^2 \left(\frac{1}{2} l^2 a_0 - \frac{d_0}{s_0^3 l} - \frac{c_0}{s_0^2} \right) - a_0 \left(c_1 + \frac{d_1}{s_1 l} \right) \right] M'_0 +$$

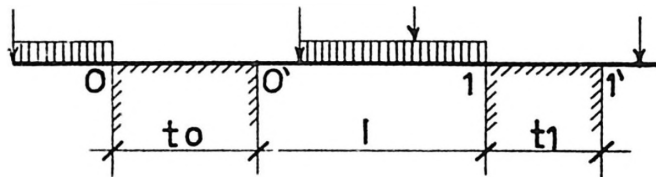
$$+ \left[a_1 s_1^2 \left(\frac{2}{3} l^2 a_0 + \frac{d_0}{s_0^3 l} \right) + a_0 \left(2 c_1 + 2 s_2 g_1 l + \frac{d_1}{s_1 l} \right) \right] M'_1 = -$$

$$= -2 E I s_1^2 l a_0 a_1 \varphi_{10} - \frac{s_1^2}{s_0^3} a_1 d_0 T'_{00} + a_0 \left(\frac{d_1}{s_1} + c_1 l \right) T_{10}. \quad (47)$$

Veličine a_0, c_0, d_0, g_0 koje odgovaraju vrijednosti z_0 , te a_1, c_1, d_1, g_1 koje odgovaraju vrijednosti h_1 , izračunate su pa se mogu uzeti iz pri-oženih tablica.

Nosač s prepustima.

Ako nosač na rubovima 0 i 1', ili samo na jednom od njih ima prepuste, onda se u biti ništa ne mijenja, jed no u jednačbe (46) i (47) ulaze momenti M'_0 i M'_1 , ili samo jedan od njih, i poprečne sile



Sl. 15.

T'_0 i $T'_{1'}$, ili samo jedna od njih. No ti momenti i poprečne sile se dobijaju pomoću pravila elementarne statike.

U tom slučaju:

$$M_{r-1} = M_0$$

$$M_r = M_1$$

$$T_{r-1} = T_0$$

$$T_r = T_1$$

pa stoga otpadaju članovi s l_{r-1} i l_{r+1} .

Jednačbe će, dakle, glasiti:

Za rub 0' —

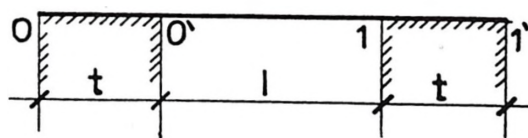
$$\begin{aligned} & -2a_1(s_0 l h_0 + f_0) M_0 + \left[a_0 s_0^2 \left(\frac{2}{3} l^2 a_1 + \frac{d_1}{s_1^3 l} \right) + a_1 \left(2c_0 + 2s_0 g_0 l + \frac{d_0}{s_0 l} \right) \right] M_0' + \\ & + \left[a_0 s_0^2 \left(\frac{1}{3} l^2 a_1 - \frac{d_1}{s_1^3 l} - \frac{c_1}{s_1^3} \right) - a_1 \left(c_0 + \frac{d_0}{s_0 l} \right) \right] M_1 + 2 \frac{s_0^2}{s_1^3} a_0 f_1 M_1' = \\ & = -2EI s_0^2 l a_0 a_1 \varphi_{00} + a_1 \left(\frac{e_0}{s_0} - 2f_0 l \right) T_0 + a_1 \left(\frac{d_0}{s_0} + c_0 l \right) T_{00}' - \frac{s_0^2}{s_1^3} a_0 d_1 T_{10} - \\ & - \frac{s_0^2}{s_1^3} a_0 e_1 T_1'; \end{aligned} \quad (48)$$

za rub 1 —

$$\begin{aligned} & 2 \frac{s_1^2}{s_0^3} a_1 f_0 M_0 + \left[a_1 s_1^2 \left(\frac{1}{3} l^2 a_0 - \frac{d_0}{s_0^3 l} - \frac{c_0}{s_0^3} \right) - a_0 \left(c_1 + \frac{d_1}{s_1 l} \right) \right] M_1' + \\ & + \left[a_1 s_1^2 \left(\frac{2}{3} l^2 a_0 + \frac{d_0}{s_0^3 l} \right) + a_0 \left(2c_1 + 2s_1 l g_1 + \frac{d_1}{s_1 l} \right) \right] M_1 - 2a_0(s_1 l h_1 + f_1) M_1' = \\ & = -2EI s_1^2 l a_0 a_1 \varphi_{10} - \frac{s_1^2}{s_0^3} a_1 e_0 T_0 - \frac{s_1^2}{s_0^3} a_1 d_0 T_{00}' + a_0 \left(\frac{d_1}{s_1} + c_1 l \right) T_{10} + \\ & + a_0 \left(\frac{e_1}{s_1} - 2f_1 l \right) T_1'. \end{aligned} \quad (49)$$

Simetrični nosač

Za slučaj simetričnog nosača imamo:



Sl. 16.

$$\begin{aligned}
 t_0 &= t_1 = t, \\
 k_0 &= k_1 = k, \\
 s_0 &= s_1 = s, \\
 c_0 &= c_1 = c, \\
 &\text{itd.}
 \end{aligned}$$

pa će naše jednadžbe izgledati:

Za rub 0'—

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{1}{3}u^2a + \frac{d}{u} + c + ug\right)M'_0 + \left(\frac{1}{6}u^2a - \frac{d}{u} - c\right)M'_1 = \\
 &= -EIs^2 l a \varphi'_{00} + \frac{1}{2}\left(\frac{d}{s} + lc\right)T'_{00} - \frac{d}{2s}T'_{10}; \quad (50)
 \end{aligned}$$

Za rub 1—

$$\begin{aligned}
 &\left(-\frac{1}{6}u^2a - \frac{d}{u} - c\right)M'_0 + \left(\frac{1}{3}u^2a + \frac{d}{u} + c + ug\right)M'_1 = \\
 &= -EIs^2 l a \varphi'_{10} - \frac{d}{2s}T'_{00} + \frac{1}{2}\left(\frac{d}{s} + lc\right)T'_{10}, \quad (51)
 \end{aligned}$$

gdje je $u = sl$.

Simetrični nosač s prepustima

Za rub 0':

$$\begin{aligned}
 &-(uh + f)M'_0 + \left(\frac{1}{2}u^2a + \frac{d}{u} + c + ug\right)M'_0 + \left(-\frac{1}{6}u^2a - \frac{d}{u} - c\right)M'_1 + fM'_1 = - \\
 &= -EIs^2 l \varphi'_{00} + \frac{1}{2}\left(\frac{e}{s} - 2lf\right)T'_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{d}{s} + lc\right)T'_{00} - \frac{d}{2s}T'_{10} - \frac{e}{2s}T'_1; \quad (52)
 \end{aligned}$$

Za rub 1:

$$\begin{aligned}
 &fM'_0 + \left(\frac{1}{6}u^2a - \frac{d}{u} - c\right)M'_0 + \left(\frac{1}{3}u^2a + \frac{d}{u} + c + ug\right)M'_1 - (uh + f)M'_1 = \\
 &= -EIs^2 l a \varphi'_{10} - \frac{e}{2s}T'_0 - \frac{d}{2s}T'_{00} + \frac{1}{2}\left(\frac{d}{s} + lc\right)T'_{10} + \frac{1}{2}\left(\frac{e}{s} - 2lf\right)T'_1. \quad (53)
 \end{aligned}$$

Simetrični nosač i simetrično opterećenje

Ako je osim simetričnosti nosača i opterećenje simetrično, onda su nepoznati rubni momenti jednaki, tj.:

$$M'_0 = M'_1,$$

pa je zadatak jedanput statički neodređen.

Nadalje je, uslijed simetrije:

$$\varphi'_{00} = \varphi'_{10}$$

$$T'_{00} = T'_{10}$$

pa će jednačba za određivanje nepoznatog rubnog momenta M'_0 izgledati:

$$(u^2 a + 2 u g) M'_0 = -2 E I s^2 l a \varphi'_{00} + l c T'_{00},$$

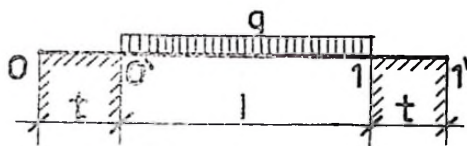
odakle dobijamo:

$$M'_0 = -\frac{2 E I s^2 a \varphi'_{00} + c T'_{00}}{s (u a + 2 g)} \quad (54)$$

Za slučaj *jednolikog opterećenja* q :

$$\varphi'_{00} = \frac{q l^3}{24 E I},$$

$$T'_{00} = \frac{1}{2} q l.$$



Sl. 17.

Kad zamijenimo:

$$M'_0 = -\frac{q l^3}{12} \frac{u^2 a - 6 c}{u (u a + 2 g)} \quad (55)$$

Dakle moment punog uklještenja množimo s koeficijentom:

$$m = \frac{u^2 a - 6 c}{u (u a + 2 g)},$$

koji je uvijek manji od jedinice. On može biti i negativan, tj. rubni moment M'_0 može postati i pozitivan.

Za zadane s i t , a time i a , c , g , moment je jednak nuli za

$$l = \frac{1}{s} \sqrt{\frac{6 c}{a}}$$

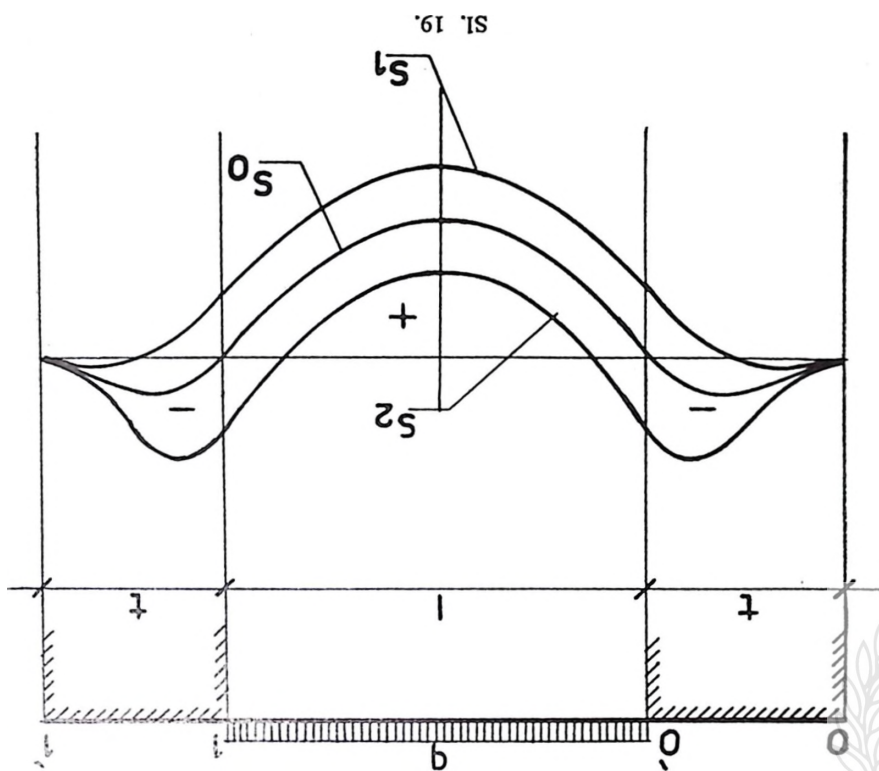
Za raspone manje od te vrijednosti moment na rubu oslonca je pozitivan.

Ako s raste, tj. ako se povećava krutost podloge k ili smanji krutost grede $E I$, onda se koeficijent m približava jedinici koju dostiže za $s = \infty$, a to znači da se s porastom s -a rubni moment približava momentu potpunog uklještenja.

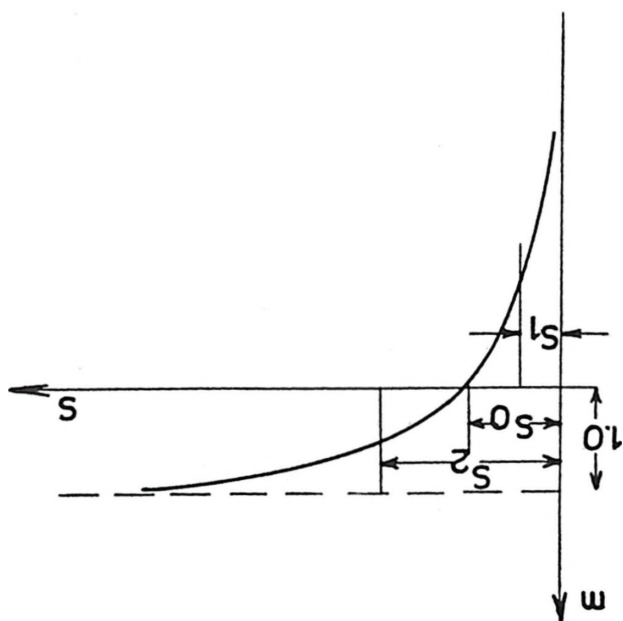
Ako s pada, tj. ako se smanjuje krutost podloge k ili povećava krutost grede $E I$, onda koeficijent m teži velikoj negativnoj vrijednosti, odnosno rubni moment velikoj pozitivnoj vrijednosti.

Tu ovisnost prikazuje krivulja na sl. 18.

Momentni dijagrami, koji odgovaraju vrijednostima s_0 , s_1 i s_2 na sl. 18, dati su na sl. 19. Iz njih se jasno vidi kako momenti drastično ovise o s -u, tj. o elastičnim svojstvima podloge i nosača.



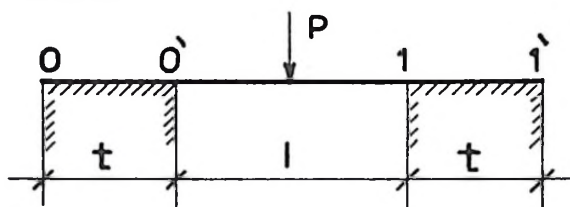
SI. 18.



Za pojedinačnu silu P u sredini:

$$\varphi_{00} = \frac{Pl^2}{16EI},$$

$$T_{00} = \frac{P}{2}.$$



Sl. 20.

Kad uvrstimo u (54):

$$M_0' = -\frac{Pl}{8} \frac{u^2 a - 4c}{u(ua + 2g)} \quad (56),$$

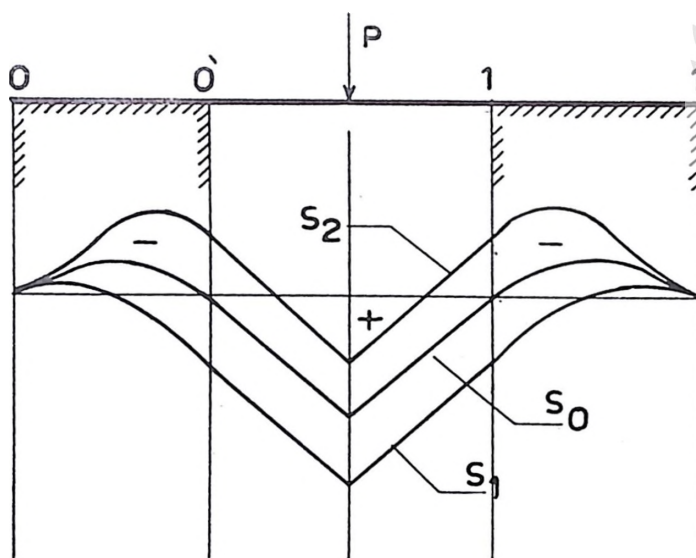
tj. moment punog uklještenja množimo s koeficijentom:

$$m = \frac{n^2 a - 4c}{u(ua + 2g)}.$$

I ovdje važi isto kao i u slučaju jednolikog opterećenja. Za zadani s moment postaje jednak nuli za:

$$1 = \frac{2}{s} \sqrt{\frac{c}{a}}.$$

Momenti dijagrami u ovisnosti od s pokazani su na slici 21:



Sl. 21.

Ako u formulu (56) metnemo $l=0$, dobijamo:

$$M_0' = \frac{P}{4s} \frac{c}{g}.$$

Kaad uvrstimo izraze (6) za c i g :

$$M'_0 = \frac{P}{4s} \frac{\sin h^2 z + \sin^2 z}{\sin h z \cos h z + \sin z \cos z}.$$

Ako se koristimo ovim zamjenamm:

$$\sin h^2 z = \frac{1}{2} (\cosh 2z - 1),$$

$$\sin^2 z = \frac{1}{2} (1 - \cos 2z),$$

$$\sin h z \cos h z = \frac{1}{2} \sinh 2z,$$

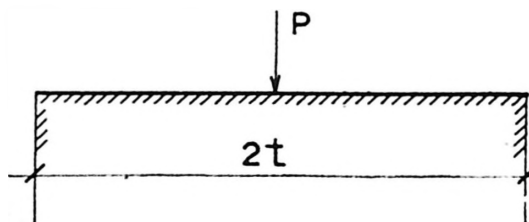
$$\sin z \cos z = \frac{1}{2} \sin 2z,$$

dobijamo:

$$M'_0 = \frac{P}{4s} \frac{\frac{1}{2} (\cosh 2z - 1) + \frac{1}{2} (1 - \cos 2z)}{\frac{1}{2} \sinh 2z + \frac{1}{2} \sin 2z},$$

ili:

$$M'_0 = \frac{P}{4s} \frac{\cosh 2z - \cos 2z}{\sinh 2z + \sin 2z},$$



Sl. 22.

To je poznati izraz za moment u sredini nosača na elastičnoj podlozi, opterećenog silom P u sredini, dužine $2t$ (vidi sl. 22).

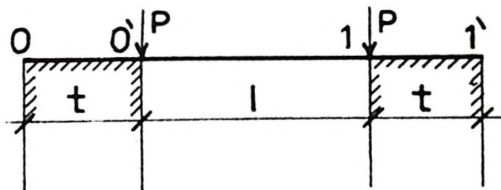
Za dvije sile P na rubovima 0 i l dobijamo moment na rubu ako u formulu (54) uvrstimo:

$$\varphi'_{00} = 0,$$

$$T'_{00} = P,$$

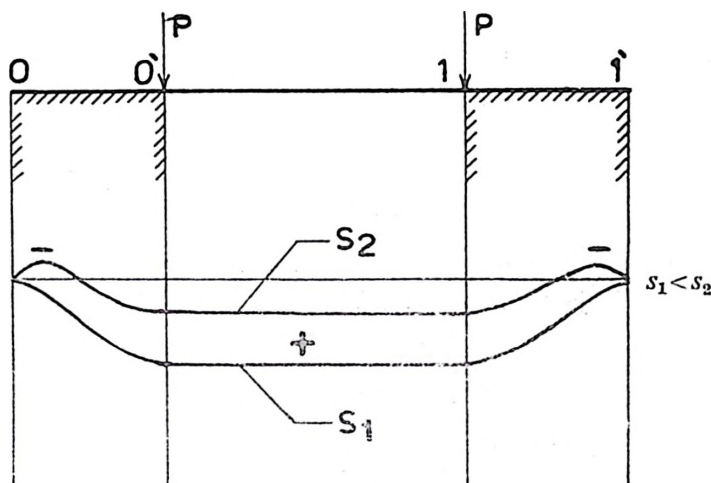
pa dobijamo:

$$M'_0 = \frac{Pc}{s(ua + 2g)} \quad (57)$$



Sl. 23.

Moment na rubu je uvijek pozitivan, pa će momentni dijagram izgledati kao na slici 24:



Sl. 24.

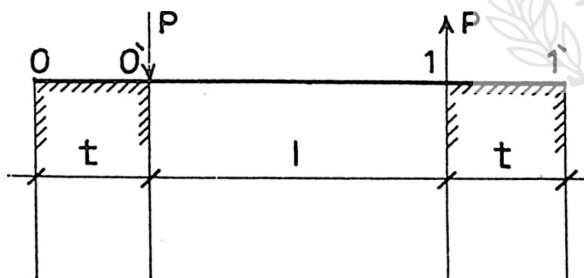
Za antisimetrično opterećenje dvjema silama P , kao na sl. 25, dobijamo potrebnu jednadžbu za određivanje rubnog momenta iz (50) ako stavimo:

$$M'_0 = -M_1;$$

osim toga je:

$$\varphi'_{00} = 0,$$

$$T'_{00} = -T_{10} = P,$$



Sl. 25.

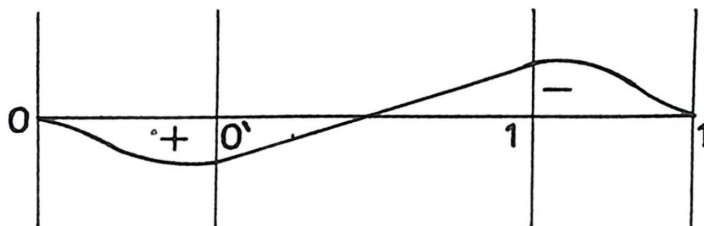
pa će jednadžba za određivanje M'_0 izgledati:

$$\left(u^2 a + 12 \frac{d}{u} + 12 c + 6 g u\right) M'_0 = P \left(6 \frac{d}{s} + 3 l c\right),$$

odakle:

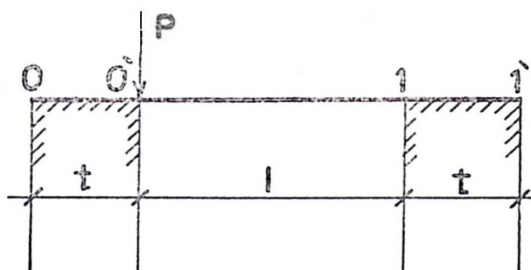
$$M'_0 = P \frac{6 \frac{d}{s} + 3 c l}{u^2 a + 12 \frac{d}{u} + 12 c + 6 u g} \quad (58)$$

Momentni dijagram izgleda kao na slici 26:



Sl. 26.

Formulama (57) i (58) koristimo se za proračun rubnih momenata u slučaju opterećenja silom P na rubu $0'$, prema sl. 27:



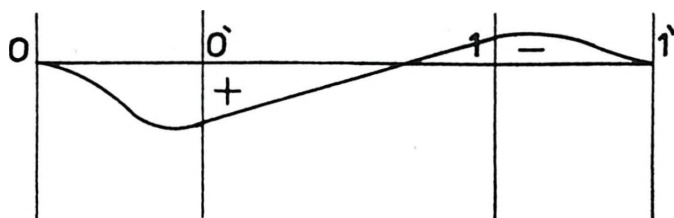
Sl. 27.

Momenti M_0' i M_1 iznose:

$$M_0' = \frac{P}{2} \left[\frac{c}{s(ua+2g)} + \frac{6\frac{d}{s} + 3cl}{u^2a + 12\frac{d}{u} + 12c + 6ug} \right],$$

$$M_1 = -\frac{P}{2} \left[\frac{6\frac{d}{s} + 3cl}{u^2a + 12\frac{d}{u} + 12c + 6ug} - \frac{c}{s(ua+2g)} \right] \quad (59)$$

Na sl. 28. pokazan je momentni dijagram:



Sl. 28.

Simetrični nosač s prepustima i simetrično opterećenje

Ako simetrični nosač na dva oslonca ima prepuste, a opterećenje je također simetrično, onda jednađba za određivanje nepoznatog rubnog momenta M_0' glasi:

$$-2uhM_0' + (u^2a + 2ugM_1') = -2EIs^2 la\varphi_{00}' + lcT_{00}' - 2lfT_0',$$

gdje su M_0 i T_0 moment i poprečna sila na rubovima 0' i 1'.

Iz te jednađbe dobijamo rubni moment M_0' :

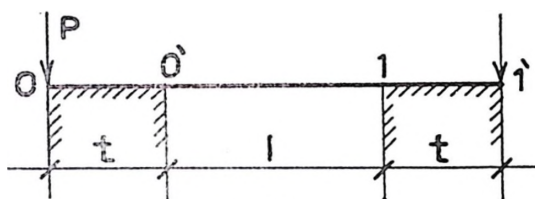
$$M_0' = -\frac{2EIs^2a\varphi_{00}' - cT_{00}' + 2(fT_0' - shM_0')}{s(ua + 2g)}. \quad (60)$$

Za opterećenje silama P na rubovima 0 i 1', prema sl. 29:

$$\varphi_{00}' = 0,$$

$$T_{00}' = 0,$$

$$M_0 = 0, T_0 = P,$$

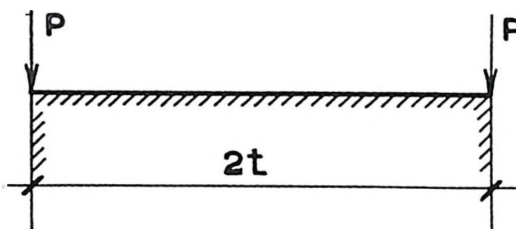


Sl. 29.

pa će moment M_0' biti:

$$M_0' = -2P \frac{f}{s(ua + 2g)}. \quad (61)$$

Uz $l = 0$ slučaj je kao na slici 30:



Sl. 30.

Tada je:

$$M_0' = -\frac{f}{sg}P,$$

odnosno nakon zamjene:

$$M_0' = -P \frac{\sin hz \sin z}{s(\sin hz \cos hz + \sin z \cos z)},$$

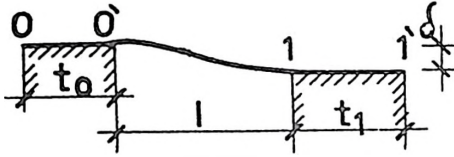
ili:

$$M_0' = -2P \frac{\sin hz \sin z}{s(\sin h2z + \sin 2z)}.$$

To je poznati izraz za moment u sredini nasača na elastičnoj podlozi, dužine $2t$, opterećenog silama P na kraju.

Nejednako slijeganje oslonca

Ako se oslonci t_0 i t_1 različito slegnu te je razlika δ , onda će lijeve strane jednadžbi za određivanje rubnih momenata M_0' i M_1 biti kao u (46) i (47), a desne prema (31), tj.



Sl. 31.

Za rub 0':

$$\left[a^2 s_0^2 \left(\frac{2}{3} l^2 a_1 + \frac{d_1}{s_1^3 l} \right) + a_1 \left(2 c_0 + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 s_0 l g_0 + \frac{d_1}{s_0 l} \right) \right] M_0' +$$

$$+ \left[a_0 s_0^2 \left(\frac{1}{3} l^2 a_1 - \frac{d_1}{s_1^3 l} - \frac{c_1}{s_1^2} \right) - a_1 \left(c_0 + \frac{d_0}{s_0 l} \right) \right] M_1 = -2 E I s_0^2 a_0 a_1 \delta ;$$

za rub 1:

$$\left[a_1 s_1^2 \left(\frac{1}{3} l^2 s_0 - \frac{d_0}{s_0^3 l} - \frac{c_0}{s_0^2} \right) - a_0 \left(c_1 + \frac{d_1}{s_1 l} \right) \right] M_0' + \left[a_1 s_1^2 \left(\frac{2}{3} l^2 s_0 + \frac{d_0}{s_0^3 l} \right) + \right. \\ \left. + a_0 \left(2 c_1 + 2 s_1 g_1 l + \frac{d_1}{s_1 l} \right) \right] M_1 = 2 E I s_1^2 a_0 a_1 \delta .$$

Ako je nosač *simetričan*, tj. $t_0 = t_1 = t$, $s_0 = s_1 = s$ itd., $M_0' = -M_1$, pa se dobija slijedeća jednadžba:

$$\left(\frac{1}{6} s^2 l^2 a + \frac{2d}{s l} + 2 c + s l g \right) M_0' = -E I s^2 a \delta ,$$

odakle:

$$M_0' = - \frac{6 E I s^2 a}{s^2 l^2 a + \frac{12d}{s l} + 12 c + 6 s l g}$$

Ukoliko se ne radi o nejednakom slijeganju, već o nejednakom opterećenju p po dužini oslonaca, onda mjesto veličine δ u gornjim jednadžbama dolazi:

$$\frac{p_1}{k_1} - \frac{p_0}{k_0} ,$$

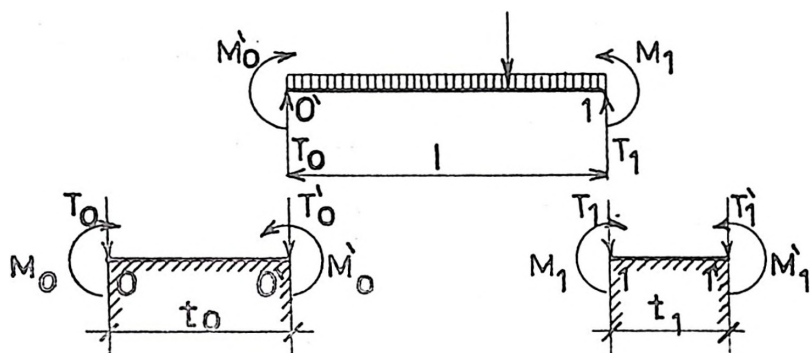
gdje su p_1 i p_0 opterećenja na osloncima t_1 i t_0 .

Time smo uglavnom obradili slučajeve na koje u praksi većinom nailazimo kod nosača na dva široka elastična oslonca.

Kad se pomoću dobijenih formula izračunaju rubni momenti M_0' i M_1 , onda lako dobijamo i poprečne sile na rubovima 0' i 1.

Sad cijelu stvar posmatramo kao prost nosač raspona l sa zadanim opterećenjem i s poznatim momentima i poprečnim silama na krajevima,

koje dalje tretiramo po poznatim pravilima statike, i dva nosača na elastičnoj podlozi, širine t_0 i t_1 , na čijim rubovima djeluju poznati

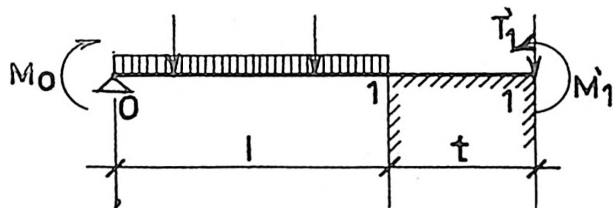


Sl. 32.

momenti i poprijечne sile, koji se dalje proračunavaju pomoću formula i jednačbi (13)–(28), odnosno (33)–(45).

Nosač s jednim širokim i jednim tačkastim osloncem

Nerijetko se u praksi pojavljuje i nosač pokazan na slici 33. Njegov oslonac 0 je slobodno okretan i nepopustljiv, a oslonac 1–1' širok, elastičan. Momenti M_0 i M_1 , kao i sila T_1 —poznati.



Sl. 33.

Jednačba (9) će sada glasiti:

$$\frac{M_0 l}{6 E I} + \frac{M_1 l}{3 E I} + \varphi_{10} + \varphi_1 + \psi_1 = 0,$$

gdje su:

$$\varphi_1 = \frac{2 T_1' f - T_1 c + 2 M_1 s g - 2 M_1' s h}{2 E I s^2 a},$$

$$\psi_1 = \frac{T_1 d + T_1' e - M_1 s c + 2 M_1' s f}{2 E I s^3 a}.$$

Osim toga je:

$$T_1 = T_{10} - \frac{M_1 - M_0}{1}.$$

Nakon uvrštavanja svih ovih izraza, dobijamo jednačbu za određivanje nepoznatog momenta M_1 :

$$\left(\frac{1}{3}s^2 l^2 a - c - \frac{d}{sl}\right)M_0 + \left(\frac{2}{3}s^2 l^2 a + 2c + \frac{d}{sl} + 2s l g\right)M_1 - (2s l h + 2f)M_1 = -2EIs^2 a l \varphi_{10} + T_{10}\left(cl + \frac{d}{s}\right) + T_1\left(\frac{e}{s} - 2lf\right),$$

odakle se dobija:

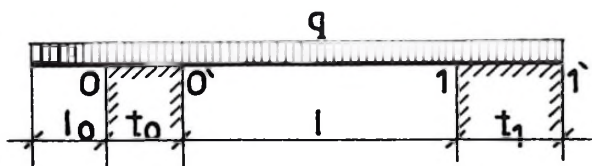
$$M_1 = \frac{2EIs^2 a l \varphi_{10} - T_{10}\left(cl + \frac{d}{s}\right) - T_1\left(\frac{e}{s} - 2lf\right) + \left(\frac{1}{3}u^2 a - c - \frac{d}{u}\right)M_0 - (2uh + 2f)M_0}{\frac{2}{3}u^2 a + 2c + \frac{d}{u} + 2ug},$$

Ako su M_0 , M_0 i T_0 jednaki nuli, onda je:

$$M_1 = -\frac{2EIs^2 a l \varphi_{10} - T_{10}\left(cl + \frac{d}{s}\right)}{\frac{2}{3}u^2 a + 2c + \frac{d}{u} + 2ug}.$$

Drugi primjer

Zadan je nosač dimenzija 50/38 cd betona marke 300, koji se oslanja na široke oslonce od opke marke 110 u običnom malteru, prema sl. 34:



Sl. 34.

Ostale mjere su:

$$l_0 = 150 \text{ cm},$$

$$l = 500 \text{ cm},$$

$$t_0 = 155 \text{ cm},$$

$$t_1 = 255 \text{ cm},$$

$$q = 4.000 \text{ kg/m}.$$

Osnovne veličine s i z :

$$s = \sqrt[4]{\frac{3E_0}{H\nu^3 E}}.$$

Ako za H uzmemo srednju vrijednost $\frac{150+250}{2}=200$ cm, dobijamo $s=0,011$, isto kao u primjeru 1, jer su sve veličine jednake. Iz toga slijedi

$$z_0 = t_0 s = 155 \cdot 0,011 = 1,70,$$

$$z_1 = t_1 s = 255 \cdot 0,011 = 2,80.$$

Potrebne dvije jednačbe za određivanje nepoznatih momenata M_0' i M_1 su prema (48) i (49):

$$\begin{aligned} & -2 a_1 (s_0 l h_0 + f_0) M_0 + \left[a_0 s_0^2 \left(\frac{2}{3} l^2 a_1 + \frac{d_1}{l s_1^3} \right) + \right. \\ & + a_1 \left(2 c_0 + 2 s_0 g_0 l + \frac{d_0}{s_0 l} \right) \left. \right] M_0' + \left[a_0 s_0^2 \left(\frac{1}{3} l^2 a_1 - \frac{d_1}{l s_1^3} \frac{c_1}{s_1^2} \right) - \right. \\ & - a_1 \left(c_0 + \frac{d}{s_0 l} \right) \left. \right] M_1 + 2 \frac{s_0^2}{s_1^3} a_0 f_1 M_0' = -2 E I s_0^3 l a_0 a_1 \varphi_{00}' + \\ & + a_1 \left(\frac{e_0}{s_0} - 2 f_0 l \right) T_0 + a_1 \left(\frac{d_0}{s_0} + c_0 l \right) T_{00}' - \frac{s_0^2}{s_1^3} a_0 d_1 T_{10} - \frac{s_0^2}{s_1^3} a_0 e_1 T_1', \end{aligned}$$

te:

$$\begin{aligned} & 2 \frac{s_1^2}{s_0^3} a_1 f_0 M_0 + \left[a_1 s_1^2 \left(\frac{1}{3} l^2 s_0 - \frac{d_0}{s_0^3 l} \right) - a_0 \left(c_1 + \frac{d_1}{s_1 l} \right) \right] M_0' + \\ & + \left[a_1 s_1^2 \left(\frac{2}{3} l^2 a_0 + \frac{d_0}{s_0^3 l} \right) + a_0 \left(2 c_1 + 2 s_1 l g_1 + \frac{d_1}{s_1 l} \right) \right] M_1 - \\ & - 2 a_0 (s_1 l h_1 + f_1) M_0' = -2 E I s_1^3 l a_0 a_1 \varphi_{10} - \\ & - \frac{s_1^2}{s_0^3} a_1 e_0 T_0 - \frac{s_1^2}{s_0^3} a_1 d_1 T_{00}' + a_0 \left(\frac{d_1}{s_1} + c_1 l \right) T_{10} + a_0 \left(\frac{e_1}{s_1} - 2 f_1 l \right) T_1'. \end{aligned}$$

U ovim jednačbama je $s_0 = s_1 = s$, te:

$$M_0 = -\frac{1}{2} 4,0 \cdot 1,5^2 = -4,5 \text{ tm} = -450.000 \text{ kg cm},$$

$$T_0 = 1,5 \cdot 4,0 = 6,0 \text{ t} = 6.000 \text{ kg},$$

$$\varphi_{00}' = \varphi_{10} = \frac{q l^3}{24 E I} = \frac{40 \cdot 500^3}{24 E I} = \frac{208.000.000}{E I},$$

$$T_{00}' = T_{10} = \frac{1}{2} 4.000 \cdot 5,0 = 10.000 \text{ kg}.$$

Koeficijente $a_0, c_0, d_0, e_0, f_0, g_0, h_0$ uzimamo iz priloženih tablica za $z_0 = 1,70$, te $a_1, c_1, d_1, e_1, f_1, g_1, h_1$ za $z_1 = 2,80$.
Oni imaju slijedeće vrijednosti:

$$\begin{array}{ll} a_0 = 6,01, & a_1 = 66,98, \\ c_0 = 7,98, & c_1 = 67,20, \\ d_0 = 7,61, & d_1 = 67,93, \\ e_0 = -3,15, & e_1 = -10,48, \\ f_0 = 2,63, & f_1 = 2,74, \\ g_0 = 7,35, & g_1 = 67,29, \\ h_0 = 2,46, & h_1 = -4,95. \end{array}$$

Nadalje su: M_0' i T_0' jednaki nuli.

Kad se te numeričke vrijednosti uvrste, izvrše potrebne računske operacije i sve sredi, dobiju se slijedeće dvije jednostavne jednačbe:

$$15.326 M_0' + 3.190 M_1 = -10.032 \cdot 10^6,$$

$$3.184 M_0' + 14.106 M_1 = -8.470 \cdot 10^6$$

(Primjedba!: Paziti na homogenost jednačbi. Sve je u kg cm.)

iz ovih jednačbi se dobija:

$$M_0' = -555.000 \text{ kg cm} = -5,55 \text{ tm},$$

$$M_1 = -472.000 \text{ kg cm} = -4,72 \text{ tm}.$$

Time smo dobili i poprečne sile na rubovima 0' i 1:

$$T_0' = 10,0 + \frac{5,55 - 4,72}{5,0} = 10,17 \text{ t} = 10.170 \text{ kg},$$

$$T_1 = 10,0 - \frac{5,55 - 4,72}{5,0} = 9,83 \text{ t} = 9.830 \text{ kg}.$$

Sad prelazimo na dio nosača preko oslonca t_0 . Momenti i poprečne sile na rubovima su poznati.

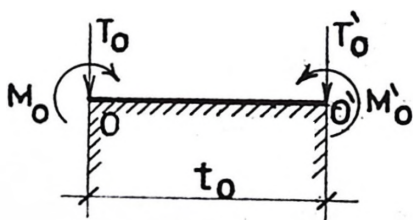
To su:

$$M_0 = -450.000 \text{ kg cm},$$

$$M_0' = -555.000 \text{ kg cm},$$

$$T_0 = 6.000 \text{ kg},$$

$$T_0' = 10.170 \text{ kg}.$$



Sl. 35.

Da bismo izračunali $M_{0 \min}$, moramo znati x_{0m} , gdje se taj moment javlja.

$$s x_{0m} = \arctg \frac{D_T - B_T}{A_T - C_T},$$

gdje su

$$A_T = T_0 d_0 + T_0' e_0 - 2 M_0 s j_0 + 2 M_0' s f_0,$$

$$A_T = 6.000 \cdot 7,61 - 10.170 \cdot 3,15 + 2 \cdot 450.000 \cdot 0,011 \cdot 7,0 - 2 \cdot 555.000 \cdot 0,011 \cdot 2,63 = 5,2 \cdot 10^4 \text{ kg},$$

$$B_T = T_0 d_0 + T_0' e_0 - 2 M_0 s i_0 + 2 M_0' s f_0,$$

$$B_T = 6.000 \cdot 7,61 - 10.170 \cdot 3,15 + 2 \cdot 450.000 \cdot 0,011 \cdot 0,983 - 2 \cdot 555.000 \cdot 0,011 \cdot 2,63 = -0,93 \cdot 10^4 \text{ kg},$$

$$C_T = T_0 c_0 - 2 T_0' f_0 - 2 M_0 s g_0 + 2 M_0' s h_0,$$

$$C_T = 6.000 \cdot 7,98 - 2 \cdot 10.170 \cdot 2,63 + 2 \cdot 450.000 \cdot 0,011 \cdot 7,35 - 2 \cdot 555.000 \cdot 0,011 \cdot 2,46 = 3,8 \cdot 10^4 \text{ kg},$$

$$D_T = T_0 a_0 = 6.000 \cdot 6,01 = 3,6 \cdot 10^4 \text{ kg}.$$

Nakon uvrštavanja:

$$s x_{0m} = \arctg \frac{3,6 + 0,93}{5,2 - 3,8} = \arctg 3,24,$$

$$s x_{0m} = 1,27, \quad \text{tg h } 1,27 = 0,854,$$

$$s x_{0m} = \arctg \frac{3,6 + 0,93 \cdot 0,854}{5,2 - 3,8 \cdot 0,854} = \arctg 2,25,$$

$$s x_{0m} = 1,15, \quad \text{tg h } 1,15 = 0,818,$$

$$s x_{0m} = \arctg \frac{3,6 + 0,93 \cdot 0,818}{5,2 - 3,8 \cdot 0,818} = 2,08,$$

$s x_{0m} = 1,12$, pri kojoj vrijednosti i ostajemo.

Oдавде:

$$x_{0m} = \frac{1,12}{0,011} = 102 \text{ cm}.$$

Sad možemo izračunati $M_{0\min}$ po formuli (19), tj.:

$$M_{0\min} = -\frac{1}{s a_0} (A_M \sin s x_{0m} \cos h s x_{0m} - B_M \sin s x_{0m} \sinh s x_{0m} + \\ + C_M \cos s x_{0m} \sinh s x_{0m} - D_M \cos s x_{0m} \cos h s x_{0m}),$$

gdje su:

$$A_M = T_0 j_0 - T_0' f_0 - M_0 s g_0 + M_0' s h_0,$$

$$A_M = 6.000 \cdot 7,0 - 10.170 \cdot 2,63 + 450.000 \cdot 0,011 \cdot 7,35 - 555.000 \cdot 0,011 \cdot \\ \cdot 2,46 = 3,72 \cdot 10^4,$$

$$B_M = T_0 d_0 + T_0' e_0 - M_0 s g_0 + M_0' s h_0,$$

$$B_M = 6.000 \cdot 7,61 - 10.170 \cdot 3,15 + 450.000 \cdot 0,011 \cdot 7,98 - 2 \cdot 555.000 \cdot 0,011 \cdot \\ \cdot 2,63 = 2,13 \cdot 10^4 \text{ kg},$$

$$C_M = T_0' f_0 - T_0 i_0 + M_0 s g_0 - M_0' s h_0,$$

$$C_M = 10.170 \cdot 2,63 - 6.000 \cdot 0,983 - 450.000 \cdot 0,011 \cdot 7,35 + 555.000 \cdot 0,011 \cdot \\ \cdot 2,46 = -0,11 \cdot 10^4 \text{ kg},$$

$$D_M = M_0 s a_0 = -450.000 \cdot 0,011 \cdot 6,01 = -3,06 \cdot 10^4 \text{ kg}.$$

Nakon uvrštavanja:

$$M_{0\min} = -\frac{10^4}{0,011 \cdot 6,01} (3,72 \sin 1,12 \cos h 1,12 - 2,13 \sin 1,12 \sinh 1,12 - \\ - 0,11 \cos 1,12 \sinh 1,12 + 3,06 \cos 1,12 \cos h 1,12) = -770.000 \text{ kg cm}.$$

Sad ćemo izračunati naprezanje podloge oslonca t_0 .

Naprezanje na rubu 0:

$$\sigma_0 = \frac{2 s}{b a_0} (T_0 d_0 + T_0' e_0 - M_0 s c_0 + 2 M_0' s f_0),$$

$$\sigma_0 = \frac{2 \cdot 0,011}{38 \cdot 6,01} (6.000 \cdot 7,61 - 10.170 \cdot 3,15 + 450.000 \cdot 0,011 \cdot 7,98 - 2 \cdot \\ \cdot 555.000 \cdot 0,011 \cdot 2,63, \\ \sigma_0 = 2,10 \text{ kg/cm}^2$$

Naprezanje na rubu 0':

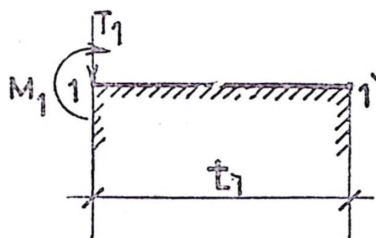
$$\sigma_0' = \frac{2s}{b a_0} (T_0 e_0 + T_0' d_0 + 2 M_0 s f_0 - M_0' s c_0),$$

$$\sigma_0' = \frac{2 \cdot 0,011}{38 \cdot 6,01} (10.170 \cdot 7,61 - 6.000 \cdot 3,15 - 2 \cdot 450.000 \cdot 0,011 \cdot 2,63 +$$

$$\sigma_0' = 8,10 \text{ kg/cm}^2.$$

Naprezanje je svuda pozitivno (tlak), tj. nigdje ne mijenja predznak što slijedi zbog toga što poprečna sila ima samo jednu nul-tačku.

Na redu je dio nosača preko oslonca t_1 .



Sl. 36.

$$M_1 = -4,72 \text{ tm} = -472.000 \text{ kg/cm},$$

$$M_1' = 0,$$

$$T_1 = 9.830 \text{ kg},$$

$$T_1' = 0.$$

Konstante za određivanje sx_{1m} :

$$A_T = T_1 d_1 - 2 M_1 s j_1 = 9.830 \cdot 67,93 + 2 \cdot 472.000 \cdot 0,011 \cdot 67,08 =$$

$$= 13,85 \cdot 10^5 \text{ kg},$$

$$B_T = T_1 d_1 - 2 M_1 s i_1 = 9.830 \cdot 67,93 + 2 \cdot 472.000 \cdot 0,011 \cdot 0,112 = 6,69 \cdot 10^5 \text{ kg},$$

$$C_T = T_1 c_1 - 2 M_1 s g_1 = 0.830 \cdot 67,93 + 2 \cdot 472.000 \cdot 0,011 \cdot 67,29 =$$

$$= 13,79 \cdot 10^5 \text{ kg},$$

$$D_T = T_1 a_1 = 9.830 \cdot 66,98 = 6,58 \cdot 10^5 \text{ kg},$$

$$sx_{1m}' = \arctg \frac{D_T - B_T}{A_T - C_T},$$

$$sx_{1m}' = \arctg \frac{6,58 - 6,69}{13,85 - 13,79} = \arctg (-1,84),$$

$$sx_{1m}' = -1,07 + 3,14 = 2,07, \quad \text{tg } h 2,07 = 0,969,$$

$$sx_{1m} = \arctg \frac{6,58 - 6,69 \cdot 0,969}{13,85 - 13,79 \cdot 0,969} = \arctd 0,21,$$

$$sx_{1m} = 0,21, \quad \text{tg } h 0,21 = 0,207,$$

$$sx_{1m} = \arctg \frac{6,58 - 6,69 \cdot 0,207}{13,85 - 13,79 \cdot 0,207} = \arctg 0,472,$$

$$sx_{1m} = 0,44, \quad \operatorname{tg} h 0,44 = 0,414,$$

$$sx_{1m} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{6,58 - 6,69 \cdot 0,414}{13,85 - 13,79 \cdot 0,415} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 0,47,$$

$$sx_{1m} = 0,47,$$

$$x_{1m} = \frac{0,47}{0,011} = 43 \text{ cm}.$$

Konstante za proračun $M_{1 \min}$:

$$A_M = T_1 j_1 - M_1 sg_1 = 9,830 \cdot 67,08 + 472.000 \cdot 0,011 \cdot 67,20 = 1,018 \cdot 10^6 \text{ kg},$$

$$B_M = T_1 d_1 - M_1 sc_1 = 9,830 \cdot 67,93 - 472.000 \cdot 0,011 \cdot 67,20 = 1,025 \cdot 10^6 \text{ kg},$$

$$C_M = -T_1 i_1 + M_1 sg_1 = -9.830 \cdot 0,112 - 472.000 \cdot 0,011 \cdot 67,29 = - \\ = -0,359 \cdot 10^6 \text{ kg},$$

$$D_M = M_1 sa_1 = -472.000 \cdot 0,011 \cdot 66,98 = -0,356 \cdot 10^5 \text{ kg}.$$

Sad možemo izračunati $M_{1 \min}$.

On iznosi:

$$M_{1 \min} = - \frac{10^6}{0,011 \cdot 66,97} (1,018 \sin 0,47 \cos h 0,47 - \\ - 1,026 \sin 0,47 \sin h 0,47 - 0,359 \cos 0,47 \sin h 0,47 + \\ + 0,356 \cos 0,47 \cos h 0,47) = -640.000 \text{ kg cm}.$$

Račun naprezanja podloge:

rub 1 —

$$\sigma_1 = \frac{2s}{ba_1} (T_1 d - M_1 sc_1) = \frac{2 \cdot 0,011}{38 \cdot 66,98} (9.830 \cdot 67,93 + 472.000 \cdot 0,011 \cdot 67,20) = \\ = 8,0 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma_1' = \frac{2s}{ba_1} (T_1 e_1 + M_1 sf_1) = \frac{2 \cdot 0,011}{38 \cdot 66,98} (-9.830 \cdot 10,48 - \\ - 2 \cdot 472.000 \cdot 0,011 \cdot 2,74) = -1,05 \text{ kg/cm}^2.$$

Pošto naprezanje mijenja predznak, potrebno je naći mjesto gdje je naprezanje nula.

U tu svrhu trebaju nam konstante:

$$A_S = -T_1 i_1 + M_1 s g_1 = -9.830 \cdot 0,112 - 472.000 \cdot 0,011 \cdot 67,28 = - \\ = -9,37 \cdot 10^5 \text{ kg},$$

$$B_S = -T_1 j_1 + M_1 s g_1 = -9.830 \cdot 67,08 - 472.000 \cdot 0,011 \cdot 67,29 = - \\ = -0,999 \cdot 10^5 \text{ kg},$$

$$C_S = M_1 s a_1 = -472.000 \cdot 0,011 \cdot 66,98 = -0,357 \cdot 10^5 \text{ kg},$$

$$D_S = T_1 d_1 - M_1 s c_1 = 9.830 \cdot 67,93 + 472.000 \cdot 0,011 \cdot 67,20 = 1,026 \cdot 10^5 \text{ kg}.$$

Sx_{10} za koji je naprezanje nula dobijamo iz:

$$sx'_{10} = \arctg \frac{D_S - B_S}{C_S - A_S} = \arctg \frac{1,026 - 0,999}{0,370 - 0,357} = \arctg 2,08$$

$$sx'_{10} = 1,12, \quad \text{tg h } 1,12 = 0,808,$$

$$sx_{10} = \arctg \frac{1,026 - 0,999 \cdot 0,808}{0,370 - 0,357 \cdot 0,808} = \arctg 2,67,$$

$$sx_{10} = 1,21, \quad \text{tg h } 1,21 = 0,838,$$

$$sx_{10} = \arctg \frac{1,026 - 0,999 \cdot 0,837}{0,370 - 0,357 \cdot 0,837} = \arctg 2,68,$$

$$sx_{10} = 1,21,$$

odnosno:

$$x_{10} = \frac{1,21}{0,011} = 110 \text{ cm}.$$

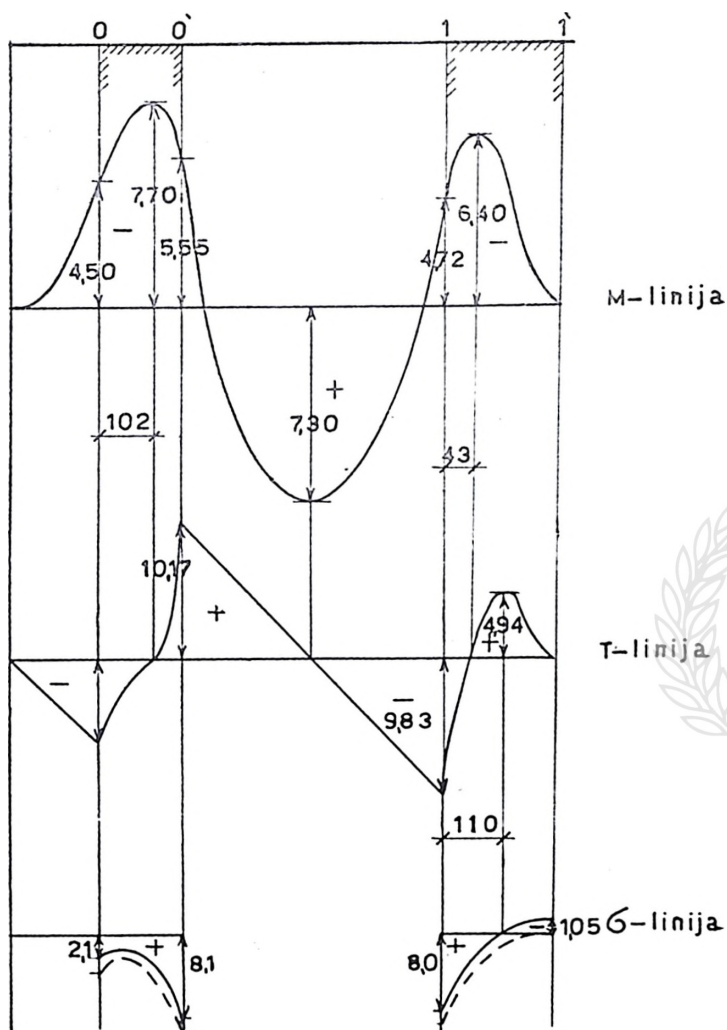
Na tom mjestu poprečna sila dobija svoju maksimalnu vrijednost. Ta iznosi:

$$T_{\max} = -\frac{10^5}{66,99} (13,79 \sin 1,21 \sin h 1,21 + 6,58 \cos 1,21 \cos h 1,21 - \\ - 13,85 \sin 1,21 \cos h 1,21 - 6,69 \cos 1,21 \sin h 1,21) = 4.830 \text{ kg}.$$

Pošto i na osloncima djeluje opterećenje od 4.000 kg/m, te se naprezanje oslonaca povećava za:

$$\Delta \sigma = \frac{40}{38} = 1,05 \text{ kg/cm}^2.$$

Sad možemo nacrtati dijagrame M , T i:



Sl. 37.

Treći primjer:

Za simetrični nosač na sl. 38. odrediti uplivnicu za moment na rubu. Nosač dimenzija 50/38, marke betona 220. Oslonci od opeke marke 110 u običnom malteru.

$$l = 600 \text{ cm},$$

$$t = 200 \text{ cm},$$

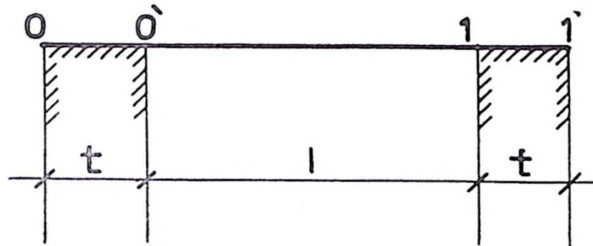
$$s = \sqrt[4]{\frac{3 E_0}{H v^3 E}},$$

$$E_0 = 40.000 \text{ kg/cm}^2,$$

$$E = 290.000 \text{ kg/cm}^2,$$

$$v = 40 \text{ cm},$$

$$H = 200 \text{ cm},$$



Sl. 38.

$$s = \sqrt[4]{\frac{3 \cdot 40.000}{200 \cdot 40^3 \cdot 290.000}} = 0,0134,$$

$$z = ts = 200 \cdot 0,0134 = 2,7.$$

Za dobijanje rubnih momenata koristimo se jednažbama (50) i (51):

$$\left(\frac{1}{3} s^2 l^2 a + \frac{d}{s l} + c + s l g \right) M'_0 + \left(\frac{1}{6} s^2 l^2 a - \frac{d}{s l} - c \right) M_1 = -E I s^2 l a \varphi'_{00} + \frac{1}{2} \left(\frac{d}{s} + \right. \\ \left. + l c \right) T'_{00} - \frac{d}{2s} T_{10},$$

te:

$$\left(\frac{1}{6} s^2 l^2 a - \frac{d}{s l} - c \right) M'_0 + \left(\frac{1}{3} s^2 l^2 a + \frac{d}{s l} + c + s l g \right) M_1 = -E I s^2 l a \varphi_{10} - \\ \frac{d}{2s} T'_{00} + \frac{1}{2} \left(\frac{d}{s} + l c \right) T_{10}.$$

Uvrstimo li numeričke vrijednosti:

$$a = 54,67,$$

$$c = 55,03,$$

$$d = 55,73,$$

$$g = 54,96,$$

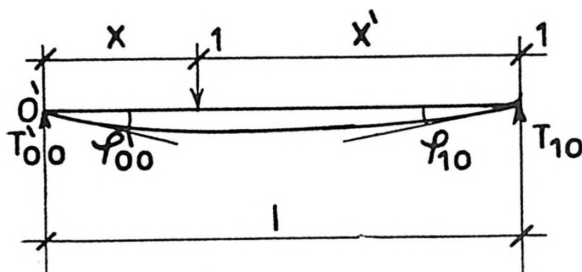
$$s l = 0,0134 \cdot 600 = 8,05,$$

dobijamo jednažbe:

$$1.682 M'_0 + 527 M_1 = -5,9 E I \varphi'_{00} + 18.580 T'_{00} - 2.080 T_{10},$$

$$527 M'_0 + 1.682 M_1 = -5,9 E I \varphi_{10} - 2.080 T'_{00} + 18.580 T_{10}.$$

Za silu $P=l$ na bilo kojem mjestu grede:



Sl. 39.

$$\begin{aligned}\varphi'_{00} &= \frac{xx'(l+x')}{6EI} = \\ &= \frac{xx'(600+x')}{3.600EI}, \\ \varphi_{10} &= \frac{xx'(l+x)}{6EI} = \\ &= \frac{xx'(600+x)}{3.600EI},\end{aligned}$$

$$T'_{00} = \frac{x'}{l} = \frac{x'}{600},$$

$$T_{10} = \frac{x}{l} = \frac{x}{600}.$$

Ako uvrstimo:

$$1.682 M'_0 + 527 M_1 = -\frac{xx'(600+x')}{610} + 31x' - 3,47x = L,$$

$$527 M'_0 + 1.682 M_1 = -\frac{xx'(600+x)}{610} - 3,47x' + 31x = N.$$

Rješavanjem ovih dviju jednačbi dobijamo:

$$M'_0 = \frac{3,2L - N}{4.853}$$

$$M_1 = \frac{3,2N - L}{4.853},$$

Izračunat ćemo momente za:

$$x = 0, 100, 200, 300, 400, 500, 600 \text{ cm.}$$

Vrijednosti L i N , kao i samih momenata, date su u slijedećoj tablici:

$x \text{ cm}$	0	100	200	300	400	500	600
$L \text{ cm}$	18.600	-74.850	-119.500	-124.740			
$N \text{ cm}$	-2.080	-55.990	-100.190	-124.740			
$M'_0 \text{ cm}$	+12,7	-37,8	-37,8	-56,5	-41,5	-21,5	-5,2
$M_1 \text{ cm}$	-5,2	-21,5	-41,5	-56,5	-58,2	-37,8	+12,7

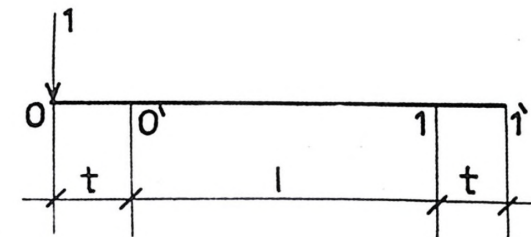
Da bismo upotpunili uplivnicu i za širinu oslonca, izračunat ćemo moment još i za položaj sile $P=l$ u 0 (prema sl. 40.). Koristimo se jednačbama (52) i (53), u kojima je:

$$M_0 = \varphi'_{00} = \varphi_{10} = T'_{00} =$$

$$T_{10} = T'_1 = 0,$$

$$T_0 = 1,$$

pa dobijamo jednačbe u kojima su lijeve strane kao i prije, a desne:



Sl. 40.

$$\frac{1}{2} \left(\frac{e}{s} - 2lf \right),$$

i:

$$-\frac{e}{2s}.$$

Uz koeficijente:

$$e = -9,89,$$

$$f = 3,16,$$

dobijamo:

$$1.682 M_0 + 527 M_1 = -2.264,$$

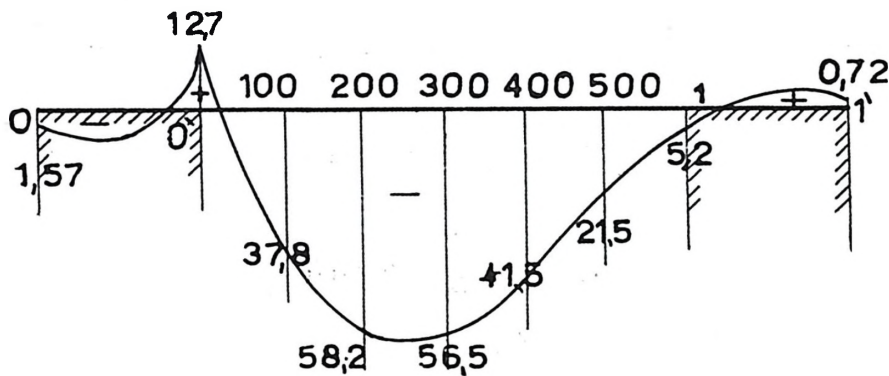
$$527 M_0 + 1.682 M_1 = 369.$$

Odatle:

$$M_0 = -1,57 \text{ cm},$$

$$M_1 = 0,72 \text{ cm}.$$

S dobijenim vrijednostima možemo nacrtati našu uplivnicu za moment na rubu 0':



Sl. 41.

Površina uplivnice između 0' i 1:

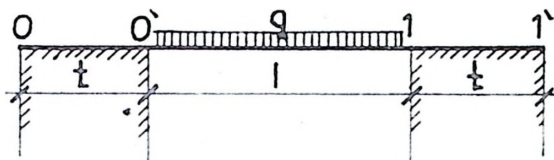
$$F = -100(37,8 + 58,2 + 56,5 + 41,5 + 21,5) + \frac{1}{2}(12,7 - 5,2) = -21175 \text{ cm}^2,$$

pa bi moment na rubu 0' od jednolikog opterećenja q , prema sl. 42. bio:

$$M_0' = -21175 \text{ kg cm.}$$

Radi usporedbe izračunajmo ovaj moment po formuli (55):

$$M_0' = -\frac{ql^2s^2l^2a - 6c}{12sl(sla + 2g)}$$



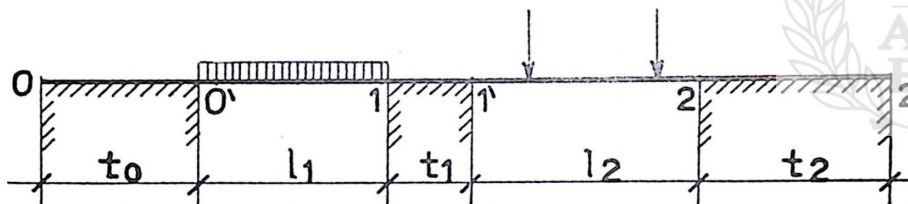
Sl. 42.

Kad uvrstimo numeričke vrijednosti:

$$M_0' = -q \frac{600^2}{12} \frac{8,05^2 \cdot 54,67 - 6 \cdot 55,03}{8,05(8,05 \cdot 54,67 + 3 \cdot 54,96)} = -21.800 q \text{ kg cm.}$$

3. NOSAČ NA TRI OSLOMCA

Na slici 43. je pokazana šema takvog nosača:



Sl. 43.

Nosač krutosti EI opterećen je proizvoljno unutar polja. Svaki oslonac ima svoj koeficijent podlog: k_0 , k_1 i k_2 , te vrijednosti:

$$s_0 = \sqrt[4]{\frac{k_0}{4EI}}, \quad z_0 = s_0 t_0,$$

$$s_1 = \sqrt[4]{\frac{k_1}{4EI}}, \quad z_1 = s_1 t_1,$$

$$s_2 = \sqrt[4]{\frac{k_2}{4EI}}, \quad z_2 = s_2 t_2.$$

Sistem je četiri puta statički neodređen. Statički prekobrojne veličine su momenti M_0' , M_1' , M_1 , M_2 . Potrebne četiri jednačbe za njihovo određivanje dobijamo ako se glavnim jednačbama, (10) i (11), koristimo za četiri ruba: 0', 1, 1' i 2, stavivši odgovarajuće indekse.

Jednačbe ćemo napisati za slučaj da na krajnjim rubovima djeluju poznati momenti i poprečne sile M_0 i M_2' , te T_0 i T_2' . Ukoliko oni ili neki od njih ne djeluju, odgovarajući članovi jednaki su nuli.

Nakon ovog, četiri potrebne jednačbe dobijaju sljedeći oblik:

rub 0' —

$$\begin{aligned}
 & -2 a_1 (s_0 l_1 h_0 + f_0) M_0 + \left[a_0 s_0^2 \left(\frac{2}{3} l_1^2 a_1 + \frac{d_1}{l_1 s_1^3} \right) + \right. \\
 & \left. + a_1 \left(2 c_0 + 2 s_0 l_1 g_0 + \frac{d_0}{s_0 l} \right) \right] M_0' + \left[a_0 s_0^2 \left(\frac{1}{3} l_1^2 a_1 - \frac{d_1}{l_1 s_1^3} - \frac{c}{s_2^2} \right) - \right. \\
 & \left. - a_1 \left(c_0 + \frac{d_0}{s_0 l_1} \right) \right] M_1 + \frac{s_0^2}{s_1^3} a_0 \left(2 f_1 - \frac{e_1}{s_1 l_2} \right) M_1' + \frac{s_0^2}{s_1^3 l_2} a_0 e_1 M_2 = - \\
 & = -2 E I s_0^2 a_0 a_1 \varphi_{00} + a_1 \left(\frac{e_0}{s_0} - 2 l_1 f_0 \right) T_0 + a_1 \left(\frac{d_0}{s_0} + l_1 c_0 \right) T_{00} - \\
 & - \frac{s_0^2}{s_1^3} a_0 d_1 T_{10} - \frac{s_0^2}{s_1^3} a_0 e_1 T_{10}; \quad (62)
 \end{aligned}$$

rub 1 —

$$\begin{aligned}
 & 2 \frac{s_1^2}{s_0^2} a_1 f_0 M_0 + \left[a_1 s_1^2 \left(\frac{1}{3} l_1^2 a_0 - \frac{d_0}{s_0^3 l_1} - \frac{c_0}{s_2^2} \right) - a_0 \left(c_1 + \frac{d_1}{s_1 l_1} \right) \right] M_0' + \\
 & + \left[a_1 s_1^2 \left(\frac{2}{3} l_1^2 a_0 + \frac{d_0}{s_0^3 l_1} \right) + a_0 \left(2 c_1 + 2 s_1 l_1 g_1 + \frac{d_1}{s_1 l_1} \right) \right] M_1 + \\
 & + \left[a_0 \left(\frac{e_1}{s_1 l_1} - 2 \frac{l_1}{l_2} f_1 - 2 s_1 l_1 h_1 - 2 f_1 \right) \right] M_1' + \frac{a_0}{s_1 l_2} (2 s_1 l_1 f_1 - e_1) M_2 = - \\
 & = -2 E I s_1^2 l_1 a_0 a_1 \varphi_{10} - \frac{s_1^2}{s_0^3} a_1 e_0 T_0 - \frac{s_1^2}{s_0^3} a_1 d_0 T_{00} + \\
 & + a_0 \left(\frac{d_1}{s_1} + l_1 c_1 \right) T_{10} + a_0 \left(\frac{e_1}{s_2} - 2 l_1 f_1 \right) T_{10}'; \quad (63)
 \end{aligned}$$

rub 1' —

$$\begin{aligned}
 & \frac{a_2}{s_1 l_1} (2 s_1 l_2 f_1 - c_1) M_0' + a_2 \left(\frac{e_1}{s_1 l_1} - 2 \frac{l_2}{l_1} f_1 - 2 s_1 l_2 h_1 - 2 f_1 \right) M_1 + \\
 & + \left[a_1 s_1^2 \left(\frac{2}{3} l_2^2 a_2 + \frac{d_2}{s_2^2 l_2} \right) + a_2 \left(2 c_1 + 2 s_1 l_2 g_1 + \frac{d_1}{s_1 l_2} \right) \right] M_1' + \\
 & + \left[a_1 s_1^2 \left(\frac{1}{3} l_2^2 a_2 - \frac{d_2}{s_2^2 l_2} - \frac{c_2}{s_2^2} \right) - a_2 \left(c_1 + \frac{d_1}{s_1 l_2} \right) \right] M_2 + 2 \frac{s_1^2}{s_2^2} a_1 f_2 M_2' = - \\
 & = -2 E I s_1^2 l_2 a_1 a_2 \varphi_{10}' + a_2 \left(\frac{e_1}{s_1} - 2 l_2 f_1 \right) T_{10} + a_2 \left(\frac{d_1}{s_1} + l_2 c_1 \right) T_{10}' - \\
 & - \frac{s_1^2}{s_2^2} a_1 d_2 T_{20} - \frac{s_1^2}{s_2^2} a_1 e_2 T_2'; \quad (64)
 \end{aligned}$$

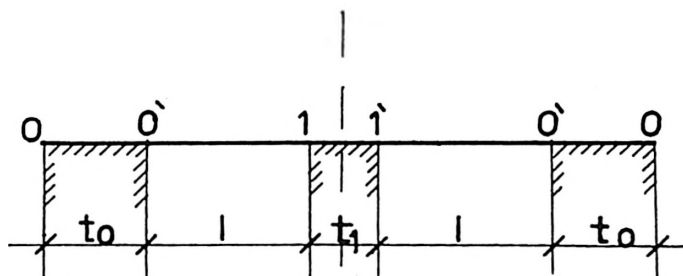
rub 2 —

$$\begin{aligned}
 & \frac{s_2^2}{s_1^3 l_1} a_2 e_1 M_0' + \frac{s_2^2}{s_1^2} a_2 \left(2 f_1 - \frac{e_1}{s_1 l_1} \right) M_1 + \left[a_2 s_2^2 \left(\frac{1}{3} l_2^2 a_1 - \frac{d_1}{s_1^2 l_2} - \frac{c_1}{s_1^2} \right) - \right. \\
 & \left. - a_1 \left(c_2 + \frac{d_2}{s_2 l_2} \right) \right] M_1' + \left[a_2 s_2^2 \left(\frac{2}{3} l_2^2 a_1 + \frac{d_1}{s_1^2 l_2} \right) + \right. \\
 & \left. + a_1 \left(2 c_2 + 2 s_2 l_2 g_2 + \frac{d_2}{s_2 l_2} \right) \right] M_2 - 2 a_1 (s_2 l_2 h_2 + f_2) M_2' = \\
 & = -2 E I s_2^2 l_2 a_1 a_2 \varphi_{20}' - \frac{s_2^2}{s_1^3} a_2 e_1 T_{10} - \frac{s_2^2}{s_1^2} a_2 d_1 T_{10}' - a_1 \left(\frac{d_2}{s_2} + l_2 c_2 \right) T_{20} + \\
 & + a_1 \left(\frac{e_2}{s_2} - 2 l_2 f_2 \right) T_2'. \quad (65)
 \end{aligned}$$

Simetrični nosač i simetrično opterećenje

U tom slučaju:

$$\begin{aligned}
 t_0 &= t_2, \\
 k_0 &= k_2, \\
 s_0 &= s_2,
 \end{aligned}$$



SI. 44.

$$\begin{aligned}
z_0 &= z_2, \\
M_0 &= M_2', \\
M_0' &= M_2, \\
M_1 &= M_1', \\
T_0 &= T_2', \\
T_{00}' &= T_{20}, \\
T_{10} &= T_{10}', \\
a_0 &= a_2; \quad c_0 = c_2 \text{ itd.}
\end{aligned}$$

Nosač je dva puta statički neodređen (usljed simetrije), a statički prekobrojne su M_1' i M_1 .

Za njihovo određivanje imamo ove dvije jednačbe:

$$\begin{aligned}
& -2 a_1 (s_0 l h_0 f_0) M_0 + \left[a_0 s_0^2 \left(\frac{2}{3} l^2 a_1 + \frac{d_1}{s_1^3 l} + \frac{e_1}{s_1^3 l} \right) + \right. \\
& + a_1 \left(2 c_0 + 2 l g_0 + \frac{d_0}{s_0 l} \right) \left. \right] M_0' + \left[a_0 s_0^2 \left(\frac{1}{3} l^2 a_1 - \frac{d_1}{s_1^3 l} - \frac{c_1}{s_1^2} - \frac{e_1}{s_1^3 l} + \frac{2 f_1}{s_1^2} \right) - \right. \\
& - a_1 \left(c_0 + \frac{d_0}{s_0 l} \right) \left. \right] M_1 = -2 E I s_0^2 l a_0 a_1 \varphi_{00}' + a_1 \left(\frac{e_0}{s_0} - 2 l f_0 \right) T_0 + \\
& + a_1 \left(\frac{d_0}{s_0} + l c_0 \right) T_{00}' - \frac{s_0^2}{s_1^3} a_0 (d_1 + e_1) T_{10},
\end{aligned}$$

te:

$$\begin{aligned}
& \left[a_1 s_1^2 \left(\frac{1}{3} l^2 a_0 - \frac{d_0}{s_0^3 l} - \frac{c_0}{s_0^2} \right) - a_0 \left(c_1 + \frac{d_1}{s_1 l} + \frac{e_1}{s_1 l} - 2 f_1 \right) \right] M_0' + \\
& \left[+ a_1 s_1^2 \left(\frac{2}{3} l^2 a_0 + \frac{d_0}{s_0^3 l} \right) + a_0 \left(2 c_1 + 2 s_1 l g_1 + \frac{d_1}{s_1 l} + \frac{e_1}{s_1 l} - \right. \right. \\
& \left. \left. - 4 f_1 - 2 s_1 l h_1 \right) \right] M_1 + 2 \frac{s_1^2}{s_0^2} a_1 f_0 M_0 = -2 E I s_1^2 l a_0 a_1 \varphi_{10} - \\
& - \frac{s_1^2}{s_0^3} a_1 e_0 T_0 - \frac{s_1^2}{s_0^3} a_1 d_0 T_{00}' + a_0 \left(\frac{d_1}{s_1} + l c_1 + \frac{e_1}{s_1} - 2 l f_1 \right) T_{10}. \quad (67)
\end{aligned}$$

Ako su sva tri oslonca jednake širine, tj.

$$t_0 = t_1 = t,$$

te ako je i koeficijent podloge isti za sva tri oslonca, tj.

$$s_0 = s_1 = s,$$

onda su i $a_0 = a_1 = a$ itd.

pa će jednađžbe dobiti ovaj oblik:

$$\begin{aligned}
 & -2(uh+f)M_0 + \left(\frac{2}{3}u^2a + \frac{2d}{u} + \frac{e}{u} + 2c + 2ug\right)M'_0 + \\
 & + \left(\frac{1}{3}u^2a - \frac{2d}{u} - 2c - \frac{e}{u} + 2f\right)M_1 = -2EIusa\varphi'_{00} + \frac{1}{s}(e-2uf)T_0 + \\
 & + \frac{1}{s}(d+uc)T'_{00} - \frac{1}{s}(d+e)T_{10}, \quad (68)
 \end{aligned}$$

te:

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{1}{3}u^2a - \frac{2d}{u} - 2c - \frac{e}{u} + 2f\right)M'_0 + \left(\frac{2}{3}u^2a + \frac{2d}{u} + 2c + 2ug + \frac{e}{u} - \right. \\
 & \left. - 4f - 2uh\right)M_1 + 2fM_0 = -2EIusa\varphi_{10} - \frac{1}{s}eT_0 - \frac{1}{s}dT'_{00} + \\
 & + \frac{1}{s}(d+uc+e-2uf)T_{10}. \quad (69)
 \end{aligned}$$

Ako je konačno opterećenje i unutar polja simetrično, onda je:

$$T'_{00} = T_{10},$$

$$\varphi'_{00} = \varphi_{10},$$

pa će desne strane jednađžbi izgledati:

$$= -2EIusa\varphi'_{00} + \frac{1}{s}(e-2uf)T_0 + \frac{1}{s}(uc-e)T'_{00}, \quad (70)$$

te:

$$= -2EIusa\varphi'_{00} - \frac{1}{s}eT_0 + \frac{1}{s}(uc+e-2uf)T'_{00}. \quad (71)$$

Nejednako slijeganje oslonaca

Neka se oslonci t_0 , t_1 i t_2 nejednako sliježu, i to u odnosu δ_0 , δ_1 i δ_2 , ili neka su nejednako opterećeni s p_0 , p_1 i p_2 po jedinici duljine. Tad su lijeve strane jednađžbi iste kao (62), (63), (64), (65), dok desne strane imaju slijedeći oblik:

rub 0—

$$= -2EIs_0^2a_0a_1(\delta_1-\delta_0) \quad \text{ili} \quad = -2EIs_0^2a_0a_1\left(\frac{p_1}{k_1}-\frac{p_0}{k_0}\right);$$

rub 1—

$$= -2EIs_1^2a_0a_1(\delta_0-\delta_1) \quad \text{ili} \quad = -2EIs_1^2a_0a_1\left(\frac{p_0}{k_0}-\frac{p_1}{k_1}\right);$$

rub 1'—

$$= -2EI s_1^2 a_1 a_2 (\delta_2 - \delta_1) \quad \text{ili} \quad = -2EI s_1^2 a_1 a_2 \left(\frac{p_2}{k_2} - \frac{p_1}{k_1} \right);$$

rub 2—

$$= -2EI s_2^2 a_1 a_2 (\delta_1 - \delta_2) \quad \text{ili} \quad = -2EI s_2^2 a_1 a_2 \left(\frac{p_1}{k_1} - \frac{p_2}{k_2} \right).$$

Ako se simetrični nosač i sliježe simetrično, pa razlika između slijeganja unutarnjeg oslonca t_1 i vanjskih t_0 iznosi $\pm \delta$, a opterećenja vanjskih i unutarnjeg oslonca p_0 i p_1 , onda će desne strane, potrebnih dviju jednažbi, izgledati:

$$= \pm 2EI z_0^2 a_0 a_1 \delta \quad \text{ili} \quad = -2EI s_0^2 a_0 a_1 \left(\frac{p_1}{k_1} - \frac{p_0}{k_0} \right);$$

te:

$$= \pm 2EI s_1^2 a_0 a_1 \delta \quad \text{ili} \quad = -2EI s_0^2 a_0 a_1 \left(\frac{p_0}{k_0} - \frac{p_1}{k_1} \right).$$

Nakon izračunavanja momenata i poprečnih sila na rubovima oslonaca, slijedi postupak koji je već detaljno opisan.

Jedino što se još može nadopuniti jest da su, u slučaju simetričnog i simetrično opterećenog nosača, momenti i poprečne sile na rubovima I i I' jednaki pa se izrazi za statičke veličine tog dijela nosača mogu pojednostaviti, što će u slijedećem biti pokazano.

4. DIO NOSAČA NA OSOLONCU SIMETRIČNO OPTEREĆEN

Za takav slučaj, prikazan na slici 45., glavit će izraz za moment, prema (13), uzevši u obzir da $T_1 = T_1'$ i $M_1 = M_1'$:

$$M_x = -\frac{1}{s a} \{ \sin s x \cos h s x [T(j-f) - Ms(g-h)] - \sin s x \sin h s x [T(d+e) - Ms(c-2f)] + \cos s x \sin h s x [T(f-i) + Ms(g-h)] - \cos s x \cosh s x Ms a \}.$$

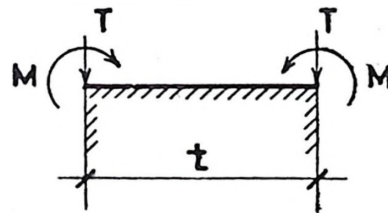
Dalje je:

$$\frac{j-f}{a} = \frac{\sin h^2 z - \sin z \sin h z}{\sin h^2 z - \sin^2 z} = \frac{\sin h z}{\sin h z + \sin z},$$

$$\frac{g-h}{a} = \frac{\sin h z \cos h z + \sin z \cos z - \sin h z \cos z - \cos h z \sin z}{\sin h^2 z - \sin^2 z} = \frac{\cos h z - \cos z}{\sin h z + \sin z},$$

$$\frac{d-e}{a} = \frac{\sin h z \cos h z - \sin z \cos z + \sin h z \cos z - \cos h z \sin z}{\sin h^2 z - \sin^2 z} = \frac{\cos h z + \cos z}{\sin h z + \sin z},$$

$$\frac{c-2f}{a} = \frac{\sin h^2 z + \sin^2 z - 2 \sin h z \sin z}{\sin h^2 z - \sin^2 z} = \frac{\sin h z - \sin z}{\sin h z + \sin z},$$



Sl. 45.

$$\frac{f-i}{a} = \frac{\sin h z \sin z - \sin^2 z}{\sin h^2 z - \sin^2 z} = \frac{\sin z}{\sin h z + \sin z}$$

Kad upotrijebimo ove izraze, onda je:

$$M_x = -\frac{1}{s} (A_M \sin s x \cos h s x - B_M \sin s x \sin h s x + C_M \cos s x \sin h s x - D_M \cos s x \cos h s x), \quad (72)$$

gdje su:

$$\left. \begin{aligned} A_M &= T \frac{\sin h z}{\sin h z + \sin z} - M s \frac{\cos h z - \cos z}{\sin h z + \sin z} \\ B_M &= T \frac{\cos h z + \cos z}{\sin h z + \sin z} - M s \frac{\sin h z - \sin z}{\sin h z + \sin z} \\ C_M &= T \frac{\sin z}{\sin h z + \sin z} + M s \frac{\cos h z - \cos z}{\sin h z + \sin z} \\ D_M &= M s \end{aligned} \right\} \quad (72')$$

Konstante potrebne za izračunavanje $s x_m$ po formuli (17) su:

$$\left. \begin{aligned} A_T &= T (\cos h z + \cos z) - 2 M s \sin h z \\ B_T &= T (\cos h z + \cos z) + 2 M s \sin z \\ C_T &= T (\sin h z - \sin z) - 2 M s (\cos h z - \cos z) \\ D_T &= T (\sin h z + \sin z) \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

Istim načinom izračunavamo i potrebne konstante za dobijanje naprezanja po formuli (23), tj.:

$$\sigma_x = \frac{2s}{b} D_S \cos s x \cos h s x + A_S \sin s x \cos h s x + B_S \cos s x \sin h s x - C_S \sin s x \sin h s x,$$

gdje su:

$$\left. \begin{aligned} D_S &= T \frac{\cos h z + \cos z}{\sin h z + \sin z} - M s \frac{\sin h z - \sin z}{\sin h z + \sin z} \\ A_S &= T \frac{\sin z}{\sin h z + \sin z} + M s \frac{\cos h z - \cos z}{\sin h z + \sin z} \\ B_S &= T \frac{\sin h z}{\sin h z + \sin z} + M s \frac{\cos h z - \cos z}{\sin h z + \sin z} \\ C_S &= M s \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

Naprezanja na rubovima iznose:

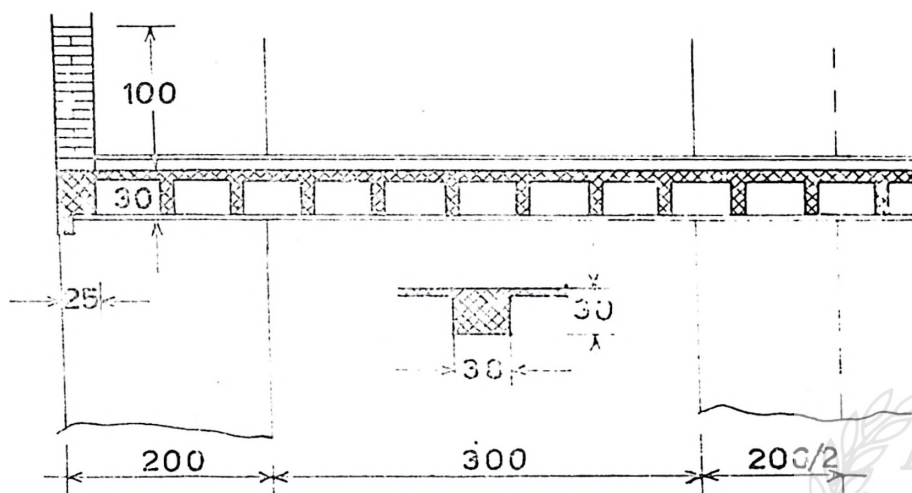
$$\sigma = \sigma' = \frac{2s}{b} D_S. \quad (75)$$

Može se još istaknuti da se — ako postoji samo jedan ekstrem za moment savijanja — taj nalazi u sredini oslonca i on predstavlja $M_{\min}$ (za gravitaciono opterećenje). Inače su položaji ekstrema i vrijednosti mome-

nata u njima simetrični s obzirom na sredinu oslonca, s tim što je prvi ekstrem po apsolutnoj vrijednosti najveći negativni moment.

Četvrti primjer:

Za nosač na slici 46. treba odrediti liniju momenata i poprečnih sila, te dijagram naprezanja zidova. Nosač je od armiranog betona marke 220, a zidovi od opeke marke 200 u cementnom malteru.



Sl. 46.

Opterećenje grede:

sitnorebrasta stropna konstrukcija	200 kg/m ²
pod i strop	200 kg/m ²
korisno	200 kg/m ²
svega:	600 kg/m ²

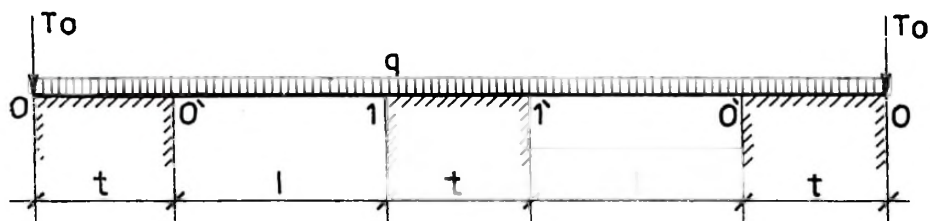
po 1 m² grede:

$$q = 5,0 \cdot 600 + 0,3 \cdot 0,38 \cdot 2.500 = 3.285 = 3.300 \text{ kg/m}$$

Rubni nosač i parapet daju silu od:

$$T_0 = 5,0 (0,25 \cdot 0,4 \cdot 2.500 + 460 \cdot 1,0) = 3.550 \text{ kg.}$$

Prema tome, statička šema nosača ima oblik kao na slici 47.



Sl. 47.

$$\begin{aligned}
 t &= 200 \text{ cm}, \\
 l &= 300 \text{ cm}, \\
 T_0 &= 3.550 \text{ kg}, \\
 q &= 3.300 \text{ kg/m},
 \end{aligned}$$

Osnovne veličine:

$$s = \sqrt[4]{\frac{3 E_0}{H v^3 E}},$$

$$E_0 = 100.000 \text{ kg/cm}^2 \text{ (opeka marke 200 u cem. malt.)},$$

$$E = 290.000 \text{ kg/cm}^2 \text{ (beton marke 220)},$$

$$v = 30 \text{ cm (visina nosača)},$$

$$H = 200 \text{ cm (mjerodavna visina oslonca)}.$$

Nakon uvrštavanja:

$$\begin{aligned}
 s &= \sqrt[4]{\frac{3 \cdot 100.000}{200 \cdot 30^3 \cdot 290.000}} = 0,021 \text{ cm}^{-1}, \\
 z = ts &= 200 \cdot 0,021 = 4,20.
 \end{aligned}$$

Zadatak je usljed simetrije dva puta statički neodređen.

Potrebne jednačbe za određivanje momenata M_0' i M_1 u ovom slučaju glase (vidi 70, i 71. s $M_0 = 0$):

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{2}{3} s^2 l^2 a + \frac{2d}{sl} + \frac{e}{sl} + 2c - 2slg \right) M_0' + \left(\frac{1}{3} s^2 l^2 a - \frac{2d}{sl} - 2c - \right. \\
 &\left. - \frac{e}{sl} + 2f \right) M_1 = -2 E I s^2 l a \varphi_{00}' + \frac{1}{s} (e - slf) M_0 + \frac{1}{s} (slc - e) T_{00}',
 \end{aligned}$$

te:

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{1}{3} s^2 l^2 a - \frac{2d}{sl} - 2c - \frac{e}{sl} + 2f \right) M_0 + \left(\frac{2}{3} s^2 l^2 a + \frac{2d}{sl} + 2c + 2slg + \right. \\
 &\left. + \frac{e}{sl} - 4f - 2slh \right) M_1 = -2 E I s^2 l a \varphi_{00}' - \frac{1}{s} e T_0 + \frac{1}{s} (slc + e - 2slf) T_{00}'.
 \end{aligned}$$

Za $z = 4,20$ dobijamo iz tablica slijedeće vrijednosti:

$$\begin{aligned}
 a &= 1.110,53, \\
 c &= 1.112,05, \\
 d &= 1.111,36, \\
 e &= 12,75, \\
 f &= -29,07, \\
 g &= 1.112,22, \\
 h &= -45,42, \\
 i &= 0,76, \\
 j &= 1.111,29.
 \end{aligned}$$

Nadalje su vrijednosti članova koji ovise o opterećenju:

$$\varphi_{00}' = \frac{q l^3}{24 EI} = \frac{23 \cdot 300^3}{24 EI} = \frac{37,1 \cdot 10^6}{EI},$$

$$T_{00}' = \frac{1}{2} q l = \frac{1}{2} 3.300 \cdot 3,00 = 4.950 \text{ kg}.$$

$$T_0 = 3.500 \text{ kg}.$$

Nakon uvrštavanja ovih vrijednosti i potrebnog sređivanja dobijamo ove dvije jednačbe:

$$0,454 M_0' + 0,118 M_1 = -90.400,$$

$$0,118 M_0' + 0,461 M_1 = -90.100.$$

iz kojih nalazimo:

$$M_0' = -159.000 \text{ kg/cm} = -1,59 \text{ tm},$$

$$M_1 = -155.000 \text{ kg/cm} = -1,55 \text{ tm}.$$

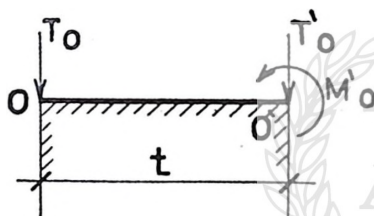
Dio nosača 0—0':

$$T_0 = 3.500 \text{ kg},$$

$T_0' = 4.950 \text{ kg}$ (uticaj momenata ne uzimamo jer su oni skoro jednaki).

$$M_0' = -159.000 \text{ kg cm}.$$

$$M_0 = 0,$$



Sl. 48.

Konstante za izračunavanje sx_{om} .

$$A_T = T_0 d + T_0' e + 2 M_0' s f = 3.550 \cdot 1.111,36 + 4.950 \cdot 12.75 + 2 \cdot 159.000 \cdot 0,021 \cdot 29,07.$$

$$A_T = 4,20 \cdot 10^6 \text{ kg},$$

$$B_T = A_T = 4,20 \cdot 10^6 \text{ kg},$$

$$C_T = T_0 c - 2 T_0' f + 2 M_0' s h = 3.550 \cdot 1.112,05 + 2 \cdot 4.950 \cdot 29,07 + 2 \cdot 159.000 \cdot 0,021 \cdot 45,42.$$

$$C_T = 4,54 \cdot 10^6 \text{ kg},$$

$$D_T = T_0 a = 3.550 \cdot 1.110,53 = 3,95 \cdot 10^6 \text{ kg},$$

$$sx_{om}' = \arctg \frac{D_T - B_T}{A_T - C_T} = \arctg \frac{3,95 - 4,20}{4,10 - 4,54} = \arctg 0,735.$$

$$sx_{om_1}' = 0,63, \quad \text{tg } h 0,63 = 0,557.$$

$$sx_{om_2}' = 0,63 + 3,14 = 3,77:$$

sx_{0m_2} uzimamo kao definitivan (jer je veći od 2,65), dok sx_{0m_1} moramo korigirati, tj.:

$$sx_{0m_1} = \arctg \frac{3,95 - 4,20 \cdot 0,558}{4,20 - 4,54 \cdot 0,558} = \arctg 0,96,$$

$$sx_{0m_1} = 0,77, \quad \operatorname{tg} h 0,77 = 0,647,$$

$$sx_{0m_1} = \arctg \frac{3,95 - 4,20 \cdot 0,647}{4,20 - 4,54 \cdot 0,647} = \arctg 0,97,$$

$$sx_{0m_1} = 0,77.$$

Pošto u našem slučaju mora postojati neparni broj ekstremnih vrijednosti momenata, to je potrebno naći još jednu vrijednost za sx_{0m} .

To ćemo postići ako jednadžbu (15) riješimo po $\operatorname{tg} h s, x$. U našem slučaju bit će:

$$\operatorname{tg} h sx_{0m_3} = \frac{D_T - A_T \operatorname{tg} sx_{0m_3}}{B_T - C_T \operatorname{tg} sx_{0m_3}},$$

odnosno:

$$sx_{0m_3} = \arctg h \frac{D_T - A_T \operatorname{tg} sx_{0m_3}}{B_T - C_T \operatorname{tg} sx_{0m_3}}.$$

Počinjemo tako da pretpostavimo da je $\operatorname{tg} sx_{0m_3} = \infty$, tj.: $sx_{0m_3} = \frac{\pi}{2}$. pa je onda:

$$sx_{0m_3} = \arctg h \frac{A_T}{C_T} = \arctg h \frac{4,20}{4,54} = \arctg h 0,925 = 1,62,$$

$$\operatorname{tg} 1,62 = -19,67$$

S ovom vrijednošću ponovimo račun:

$$sx_{0m_3} = \arctg h \frac{3,95 + 4,20 \cdot 19,67}{4,20 + 4,54 \cdot 19,67} = \arctg h 0,926 = 1,63.$$

Tom vrijednošću se zadovoljavamo.

Dakle imamo tri vrijednosti sx za koje moment prima ekstremne veličine. To su:

$$sx_{0m_1} = 0,77,$$

$$sx_{0m_2} = 1,63,$$

$$sx_{0m_3} = 3,77$$

(zadnja dva indeksa su izmijenjena radi reda).

Njima odgovaraju:

$$x_{0m_1} = \frac{0,77}{0,021} = 37 \text{ cm},$$

$$x_{0m_2} = \frac{1,63}{0,021} = 78 \text{ cm},$$

$$x_{0m_3} = \frac{3,77}{0,021} = 179 \text{ cm}.$$

Konstante za izračunavanje momenata su:

$$A_M = T_0 j - T_0' f + M_0' s h = 3.550 \cdot 1.111,29 + 4.950 \cdot 29,07 + \\ + 159.000 \cdot 0,021 \cdot 45,42 = 4,244 \cdot 10^6 \text{ kg},$$

$$B_M = T_0 d + T_0' e + 2 M_0' s f = 3.650 \cdot 1.111,36 + 4.950 \cdot 12,75 + \\ + 2 \cdot 159.000 \cdot 0,021 \cdot 29,07 = 4,205 \cdot 10^6 \text{ kg},$$

$$C_M = T_0' f - T_0 i - M_0' s f = -4.950 \cdot 28,07 - 3.550 \cdot 0,76 - \\ - 159.000 \cdot 0,021 \cdot 45,42 = -0,297 \cdot 10^6 \text{ kg},$$

$$D_M = M_0 s a = 0.$$

S ovim konstantama dobijamo izraz za moment:

$$M_{0x} = -\frac{10^6}{0,021 \cdot 1.110,53} (4,244 \sin s x \cos h s x - 4,205 \sin s x \sin h s x - \\ - 0,297 \cos s x \sin h s x).$$

Uvrštavanjem za $s x$ nađenih vrijednosti: $s x_{0m_1}$, $s x_{0m_2}$ i $s x_{0m_3}$ dobijamo veličine momenata, i to –

$$M_{0\min_1} = -0,52 \text{ tm},$$

$$M_{0\max} = -0,42 \text{ tm},$$

$$M_{0\min_2} = -2,14 \text{ tm}.$$

Naprezanje podloga:

$$\sigma_0 = \frac{2s}{ba} (T_0 d + T_0' e + 2 M_0' s f) = \frac{2 \cdot 0,021}{38 \cdot 1.110,53} (3.550 \cdot 1.111,36 + \\ + 4.950 \cdot 12,75 + 2 \cdot 0,021 \cdot 159.000 \cdot 29,07) = 4,15 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma_0' = \frac{2s}{ba} (T_0' e + T_0 d - M_0' s c) = \frac{2 \cdot 0,021}{38 \cdot 1.111,53} (3.550 \cdot 12,75 + 4.950 \cdot 1.111,36 + \\ + 159.000 \cdot 0,021 \cdot 1.112,05) = 9,15 \text{ kg/cm}^2.$$

Pošto poprečna sila tri puta mijenja predznak, to ona mora imati dvije ekstremne vrijednosti, a to znači da y , odnosno σ , dva puta mijenja predznak. Da nađemo $s x$ u kojima je $\sigma = 0$, trebaju nam konstante:

$$A_S = T_0' f - T_0 i - M_0' s h = -4.950 \cdot 29,07 - 3.550 \cdot 0,76 - \\ - 159.000 \cdot 0,021 \cdot 45,42 = -2,97 \cdot 10^5 \text{ kg},$$

$$B_S = T_0' f - T_0 j - M_0' s h = -2,97 + 3.550 (1.111,29 - 0,76) 10^5 = -42,44 \cdot 10^5 \text{ kg},$$

$$C_S = 0$$

$$D_S = A_S = 42 \cdot 10^5 \text{ kg}.$$

Sad se možemo koristiti formulom (43), odnosno (44):

$$sx'_{0_1} = \arctg \frac{D_S + B_S}{C_S - A_S} = \arctg \frac{42 - 42,44}{2,97} = \arctg (-0,15) = -0,15.$$

$$sx_{0_2} = -0,15 + 3,14 = 2,99,$$

Ovu vrijednost usvajamo odmah, dočim sx_{0_1} moramo korigirati

Uz $\operatorname{tg} h (+0,15) = -0,149$ bit će:

$$sx_{0_1} = \arctg \frac{42 + 42,44 \cdot 0,15}{2,97} = \arctg 1,63 = 1,02.$$

$$\operatorname{tg} h 1,02 = 0,77,$$

$$sx_{0_1} = \arctg \frac{42 - 42,44 \cdot 0,77}{2,97} = \arctg 3,14 = 1,26$$

$$\operatorname{tg} h 1,26 = 0,751,$$

$$sx_{0_1} = \arctg \frac{42 - 42,44 \cdot 0,851}{2,97} = \arctg 1,99 = 1,11.$$

$$\operatorname{tg} h 1,11 = 0,804.$$

$$sx_{0_1} = \arctg \frac{42 - 42,44 \cdot 0,804}{2,97} = \arctg 2,66 = 1,21.$$

$$\operatorname{tg} h 1,21 = 0,837.$$

$$sx_{0_1} = \arctg \frac{42 - 42,44 \cdot 0,837}{2,97} = \arctg 2,19 = 1,14.$$

$$\operatorname{tg} h 1,14 = 0,814,$$

$$sx_{0_1} = \arctg \frac{42 - 42,44 \cdot 0,814}{2,97} = \arctg 2,49 = 1,19.$$

$$\operatorname{tg} h 1,19 = 0,821.$$

$$sx_{0_1} = \arctg \frac{42 - 42,44 \cdot 0,83}{2,97} = \arctg 2,29 = 1,16.$$

$$\operatorname{tg} h 1,16 = 0,821,$$

$$sx_{0_1} = \arctg \frac{42 - 42,44 \cdot 0,821}{2,97} = \arctg 2,42 = 1,18.$$

$$\operatorname{tg} h 1,18 = 0,827,$$

$$sx_{0_1} = \arctg \frac{42 - 42,44 \cdot 0,827}{2,97} = \arctg 2,32 = 1,17.$$

Pri toj vrijednosti ostajemo. Iz gornjeg se vidi kako je proces konvergencije bio spor i dugačak.

Dakle $\sigma = 0$ za $sx_{0_1} = 1,17$ i za $sx_{0_2} = 2,99$, tj.:

$$\text{za } x_{0_1} = \frac{1,17}{0,021} = 56 \text{ cm i}$$

$$\text{za } x_{0_2} = \frac{2,09}{0,021} = 142 \text{ cm}$$

Između ovih tačaka naprezanje je vlačno (negativno). U sredini tog poteza, tj. za $sx = \frac{1}{2} (1,17 + 2,99) = 2,08$, ono iznosi, prema (23):

$$\sigma_{2,08} = \frac{2 \cdot 0,021 \cdot 10^5}{38 \cdot 1,110,53} (42 \cos 2 \cdot 0,8 \cos h 2,08 - 2,97 \sin 2,08 \cos h 2,08 - \\ - 42,44 \cos 2,08 \sin h 2,08) = -1,25 \text{ kg/cm}^2.$$

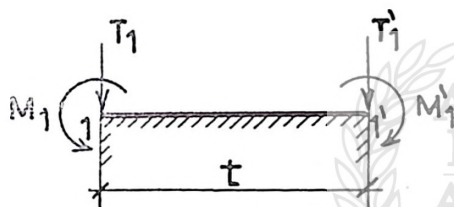
Ako uzmemo u obzir da je na osloncima pritisak od $\frac{3300}{3800} = 0,87 \text{ kg/cm}^2$, onda preostaje vlak od $-1,25 + 0,87 = -0,38 \text{ kg/cm}^2$.

Dio nosača 1-1':

$$M_1 = -1,55 \text{ tm} = -155.000 \text{ kg/cm},$$

$$T_1 = 4,95 \text{ t} = 4,950 \text{ kg}.$$

Pošto je opterećenje simetrično, to se koristimo jednažbama (72)–(75). Konstante za dobijanje sx_{1m} :



Sl. 49.

$$A_T = T_1 (\cos h z + \cos z) - 2 M_1 s \sin h z = 4,950 (\cos h 4,2 + \cos 4,2) + \\ + 2 \cdot 155.000 \cdot 0,021 \cdot \sin h 4,2 = 3,77 \cdot 10^5 \text{ kg},$$

$$B_T = T_1 (\cos h z + \cos z) - 2 M_1 s \sin z = 4,950 (\cos h 4,2 + \cos 4,2) - \\ - 2 \cdot 150.000 \cdot 0,021 \sin 4,2 = 1,68 \cdot 10^5 \text{ kg},$$

$$C_T = T_1 (\sin h z - \sin z) - 2 M_1 s (\cos h z - \cos z) = 4,950 (\sin h 4,2 - \sin 4,2) + \\ + 2 \cdot 155.000 \cdot 0,021 (\cos h 4,2 - \cos 4,2) = 3,88 \cdot 10^5 \text{ kg},$$

$$D_T = T_1 (\sin h z + \sin z) = 4,950 (\sin h 4,2 + \sin 4,2) = 1,61 \cdot 10^5 \text{ kg},$$

$$sx_{1m} = \arctg \frac{D_T - B_T}{A_T - C_T} = \arctg \frac{1,61 - 1,68}{3,77 - 3,88} = \arctg 0,64 = 0,57.$$

Usljed simetrije možemo odmah napisati sve tri vrijednosti za sx_{1m} , i to:

$$sx_{1m_1} = 4,20 - 0,57 - 3,14 = 0,49,$$

$$sx_{1m_1} = \frac{1}{2} 4,20 = 2,10,$$

$$sx_{1m_2} = 0,57 + 3,14 = 3,71,$$

kojima odgovaraju:

$$x_{1m_1} = \frac{0,49}{0,021} = 23 \text{ cm},$$

$$x_{1m_2} = \frac{2,10}{0,021} = 100 \text{ cm},$$

$$x_{1m_3} = \frac{3,71}{0,021} = 177 \text{ cm}.$$

Konstante za izračunavanje momenata:

$$A_M = T_1 \frac{\sin h z}{\sin h z + \sin z} - M_1 s \frac{\cos h z - \cos z}{\sin h z + \sin z} = \frac{1}{32,46} (4,950 \cdot 33,34 + 155.009 \cdot 0,021 \cdot 33,84),$$

$$A_M = 8,45 \cdot 10^3 \text{ kg},$$

$$B_M = T_1 \frac{\cos h z + \cos z}{\sin h z + \sin z} - M_1 s \frac{\sin h z - \sin z}{\sin h z + \sin z} = \frac{1}{32,46} (4,950 \cdot 32,86 + 155.000 \cdot 0,021 \cdot 34,21),$$

$$B_M = 8,42 \cdot 10^3 \text{ kg},$$

$$C_M = T_1 \frac{\sin z}{\sin h z + \sin z} + M_1 s \frac{\cos h z - \cos z}{\sin h z + \sin z} = \frac{1}{32,46} (-4,950 \cdot 9,87 - 155.000 \cdot 0,021 \cdot 33,84),$$

$$C_M = -3,49 \cdot 10^3 \text{ kg},$$

$$D_M = M_1 s = -155.000 \cdot 0,021 = -3,32 \cdot 10^3 \text{ kg}.$$

S ovim konstantama glavit će izraz za moment:

$$M_{1x} = -\frac{10^3}{0,021} (8,45 \sin s x \cos h s x - 8,42 \sin h s x \sin s x - 3,49 \cos s x \sin h s x + 3,22 \cos s x \cos h s x).$$

Uvrštavanjem dobijenih vrijednosti za $s x_{1m}$:

$$M_{1\min} = -1,97 \text{ tm},$$

$$M_{1\max} = -0,72 \text{ tm}.$$

Naprezanje podloge na rubu:

$$\sigma = \sigma'_1 = \frac{2s}{b} B_M = \frac{2 \cdot 0,021}{38} 8,42 \cdot 10^3 = 9,3 \text{ kg/cm}^2.$$

Za dobijanje tačaka u kojima je naprezanje podloge jednako nuli trebamo konstante:

$$D_S = T_1 \frac{\cos h z + \cos z}{\sin h z + \sin z} M_1 s \frac{\sin h z - \sin z}{\sin h z + \sin z} = 4.950 \frac{32,86}{32,46} + 3.220 \frac{34,21}{32,46} = 8.420 \text{ kg},$$

$$A_S = T_1 \frac{\sin z}{\sin h z + \sin z} + M_1 s \frac{\cos h z - \cos z}{\sin h z + \sin z} = -4.950 \frac{0,87}{32,46} - 3.220 \frac{33,84}{32,46} = -3.493 \text{ kg},$$

$$B_S = T_1 - \frac{\sin h z}{\sin h z + \sin z} + M_1 s \frac{\cos h z - \cos z}{\sin h z + \sin z} = -4.950 \frac{33,34}{32,46} - 3.220 \frac{33,84}{32,46} = -8.450 \text{ kg},$$

$$C_S = M_1 s = -3.220 \text{ kg},$$

$$s x_{10} = \arctg \frac{D_S + B_S}{C_S - A_S} = \arctg \frac{8,42 - 8,45}{3,49 - 3,22} = \arctg (-0,111) = -0,11.$$

Usljed simetrije:

$$s x_{10_1} = 4,20 + 0,11 - 3,14 = 1,17,$$

$$s x_{10_2} = -0,11 + 3,14 = 3,03,$$

kojima odgovaraju:

$$x_{10_1} = \frac{1,17}{0,021} = 56 \text{ cm},$$

$$x_{10_2} = \frac{3,03}{0,021} = 114 \text{ cm}.$$

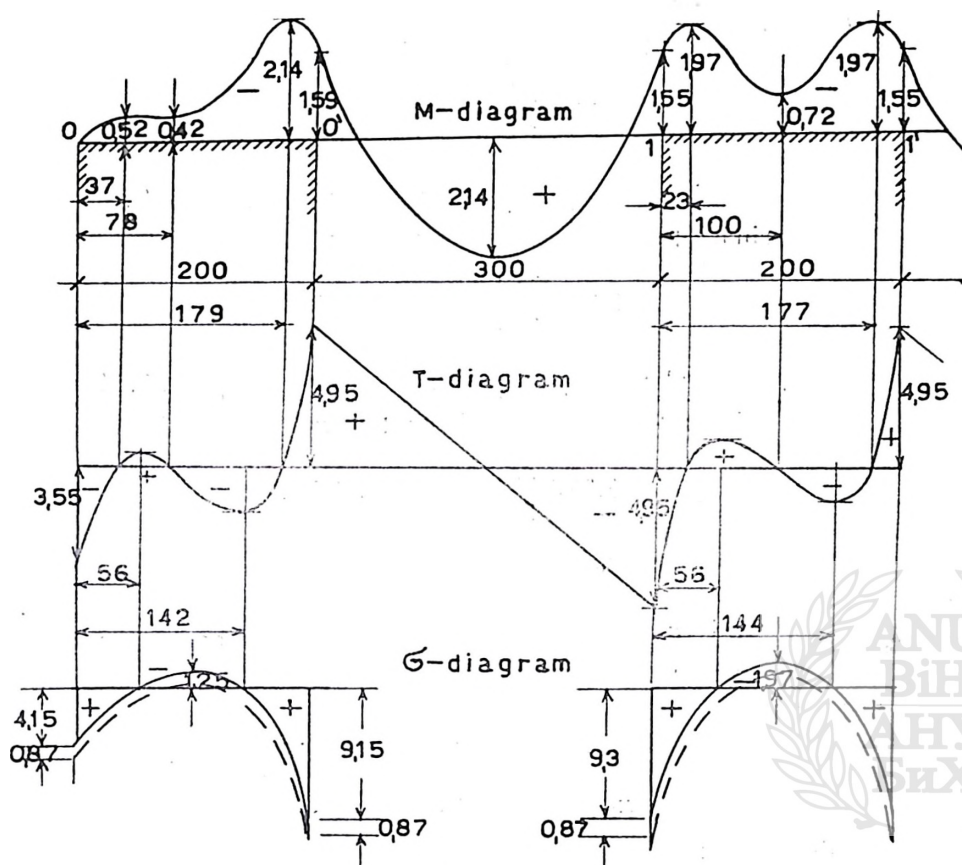
Naprezanje u sredini oslonca za $s x = 2,1$ iznosi:

$$\sigma_{2,1} = \sigma_{\min} = \frac{2 \cdot 0,021 \cdot 10^3}{38} (8,42 \cos 2,1 \cos h 2,3 - 3,49 \sin 2,1 \cos h 2,1 - 8,45 \cos 2,1 \sin h 2,1 + 3,22 \sin 2,1 \sin h 2,1) = -1,97 \text{ kg/cm}^2.$$

Uzme li se u obzir pritisak na osloncu od $0,87 \text{ kg/cm}^2$, ostaje vlak od $-1,97 + 0,87 = -1,10 \text{ kg/cm}^2$.

Ekstremne vrijednosti poprečnih sila unutar oslonca nisu izračunate jer, redovito, nemaju značaja za dimenzioniranje nosača. Inače je njihovo izračunavanje jednostavno, tj. u formulu (45) uvrštavamo vrijednosti $s x_0$.

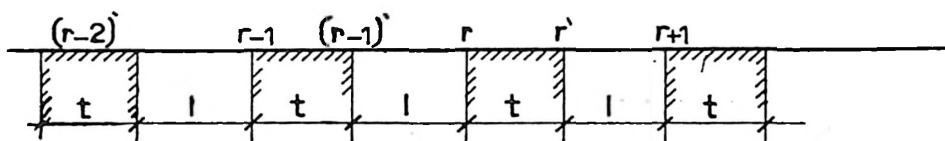
Na temelju dobivenih vrijednosti možemo nacrtati dijagrame momenta, poprečnih sila i naprezanja podloge.



Sl. 50.

5. NOSAČ S BESKONAČNO MNOGO JEDNAKIH POLJA I OSLONACA

Šema takvog nosača data je na sl. 51:



Sl. 51.

U ovom slučaju je:

$$a_{r-2} = a_{r-1} = \dots a,$$

$$c_{r-2} = c_{r-1} = \dots c,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$j_{r-2} = j_{r-1} = \dots j,$$

$$s_{r-2} = s_{r-1} = \dots s.$$

Ako je opterećenje u svim poljima jednako, onda je:

$$M'_{r-2} = M'_{r-1} = M'_r = M',$$

$$M_{r-1} = M_r = M_{r+1} = M,$$

$$T_{(r-1)0} = T_{r0} = T_0,$$

$$T'_{(r-1)0} = T'_{r0} = T'_0,$$

$$\varphi_{(r-2)0} = \varphi_{(r-1)0} = \varphi_{r0} = \varphi_0,$$

$$\varphi_{(r-1)0} = \varphi_{r0} = \varphi_{(r+1)0} = \varphi_0,$$

pa su samo dva momenta nepoznata, i to M i M' . Za njihovo određivanje dobijamo dvije jednačbe ako u (10) i (11) uvrstimo gornje oznake. To su:

$$\left(\frac{1}{3} u^2 a - 2c - \frac{2d}{u} + \frac{2e}{u} - 4f - 2uh \right) M' + \left(\frac{2}{3} u^2 a + 2c + \frac{2d}{u} - \frac{2e}{u} + 4f + 2gu \right) M = -2EIsua\varphi_0 + \frac{1}{s}(uc+d-e)T_0 + \frac{1}{s}(e-d-2uf)T'_0, \quad (76)$$

te:

$$\left(\frac{2}{3} u^2 a + 2c + \frac{2d}{u} - \frac{2e}{u} + 4f + 2ug \right) M' + \left(\frac{1}{3} u^2 a - 2c - \frac{2d}{u} + \frac{2e}{u} - 4f - 2uh \right) M = -2EIsua\varphi_0 + \frac{1}{s}(e-d-2uf)T_0 + \frac{1}{s}(uc+d-e)T'_0, \quad (77)$$

gdje je $u=sl$.

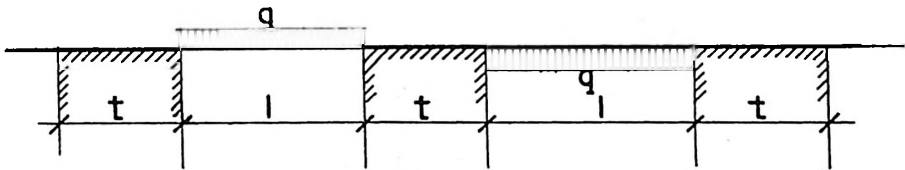
Ako je opterećenje u svim poljima jednako i simetrično unutar polja, onda su svi momenti jednaki, pa je $M'=M$, a $T'_0=T_0$. Osim toga je $\varphi'_0=\varphi_0$, pa će jednačbe za određivanje M glasiti:

$$(ua + 2g - 2h)M = -2EIsa\varphi_0 + \frac{1}{s}(c - 2f)T_0,$$

odakle se dobija:

$$M = -\frac{2EIs^2a\varphi_0 - (c - 2f)T_0}{s(ua + 2g - 2h)}. \quad (78)$$

U slučaju da je opterećenje u svim poljima jednako i simetrično unutar polja a naizmjenično mijenja smjer (sl. 52), onda je $M' = -M$, a



Sl. 52.

$T'_0 = -T_0$, pa će potrebna jednačba glasiti:

$$\left(\frac{1}{3} u^2 a + 4c + \frac{4d}{u} - \frac{4e}{u} + 8f + 2ug + 2uh \right) M = -2EI s a \varphi_0 + \frac{1}{s} (uc + 2uf + 2d - 2e) T_0,$$

iz koje dobijamo:

$$M = - \frac{6EI s^2 a \varphi_0 - 3u(uc + 2uf + 2d - 2e) T_0}{s(u^3 a + 12uc + 12d - 12e + 24uf + 6u^2 g + 6u^2 h)}. \quad (79)$$

Jednoliko opterećenje q na cijelom nosaču

Tada je:

$$\varphi_0 = \frac{ql^3}{24EI},$$

$$T_0 = \frac{1}{2} ql.$$

Kad uvrstimo u (73):

$$M = - \frac{ql^2}{12} \frac{u^2 a - 6(c - 2f)}{u(ua + 2g - 2h)}. \quad (80)$$

Za ovu formulu vrijedi isto razmatranje kao za formule (55), tj. rubni moment može imati i pozitivnu vrijednost.

Za zadani s i l rubni moment je jednak nuli ako je:

$$l = \frac{1}{s} \sqrt[3]{6 \frac{\sinh z - \sin z}{\sinh z + \sin z}}.$$

Za l manji od ovog, rubni moment je pozitivan i obratno.

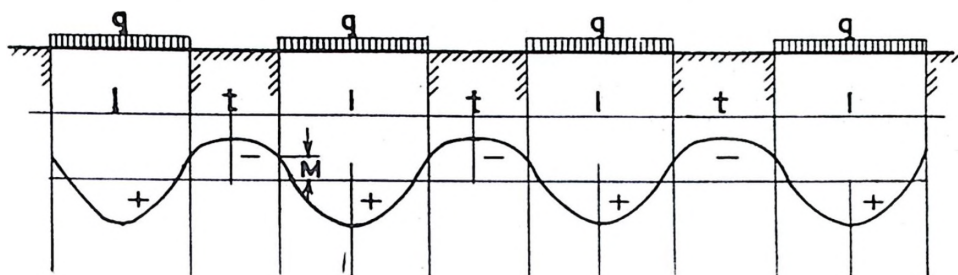
Ako postoji samo jedna vrijednost za $s x_m$ za koju moment na osloncu poprima svoju ekstremnu veličinu, tada je $s x_m = \frac{z}{2}$, a $M_{\min}$ se dobija ako se u (72) stavi $s x = \frac{z}{2}$.

Taj slučaj nastaje ako je:

$$\arctg \frac{D_T - B_T}{A_T - C_T} + \pi > z.$$

U protivnom slučaju javlja se više ekstrema, koji se, onda, iznalaze na već opisani način. Prvi ekstrem predstavlja najveći negativni moment.

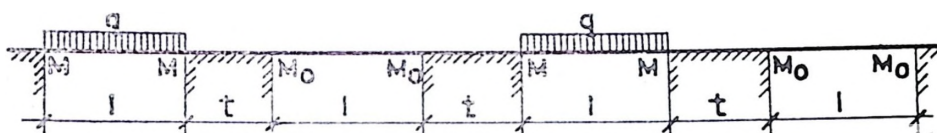
Momentni dijagram izgledat će kao na sl. 53:



Sl. 53.

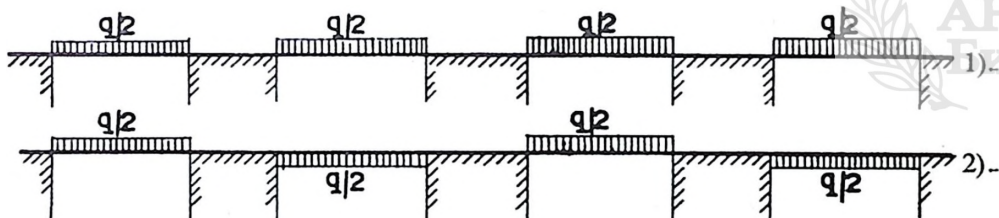
Jednoliko opterećenje na svakom drugom polju

Ovakav slučaj opterećenja pokazan je na sl. 54:



Sl. 54.

Njega rastavimo na dva dijela prema sl. 55:



Sl. 55.

Za opterećenje pod 1) — prema (80):

$$M = M_0 = -\frac{q l^2}{24} \frac{u^2 a - 6(c - 2f)}{u(u a + 2g - 2h)}$$

Za opterećenje pod 2) koristimo se (79), s tim da stavimo:

$$\phi_0 = \frac{q l^3}{48 EI},$$

$$T_0 = \frac{1}{4} q l,$$

pa je.

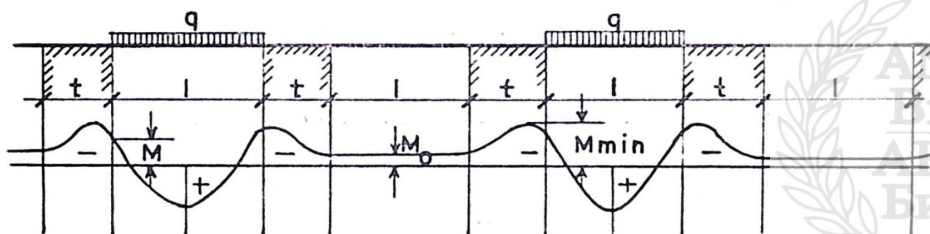
$$M = -M_0 = -\frac{q l^2}{24} \frac{3 u^2 a - 18 (uc + 2uf + 2d - 2e)}{u^3 a + 12uc + 12d - 12e + 24uf + 6u^2 g + 6u^2 h}.$$

Sad možemo napisati definitivne izraze za momente M i M_0 za opterećenje prema sl. 54.

$$M = -\frac{q l^2}{24} \left[\frac{u^2 a - 6(c - 2f)}{u(u a + 2g - 2h)} + \frac{3 u^2 a - 18 (uc + 2uf + 2d - 2e)}{u^3 a + 12uc + 12d - 12e + 24uf + 6u^2 g + 6u^2 h} \right], \quad (81)$$

$$M_0 = -\frac{q l^2}{24} \left[\frac{u^2 a - 6(c - 2f)}{u(u a + 2g - 2h)} - \frac{3 u^2 a - 18 (uc + 2uf + 2d - 2e)}{u^3 a + 12uc + 12d - 12e + 24uf + 6u^2 g + 6u^2 h} \right]. \quad (82)$$

Momentni dijagram pokazan je na sl. 56. Položaj i veličina $M_{\min}$ se određuju na poznati način.



Sl. 56.

Opterećenje silom P u sredini svakog polja

$$\varphi_0 = \frac{P l^2}{16 EI},$$

$$T_0 = \frac{P}{2}.$$

Kad uvrstimo u (78):

$$M = -\frac{Pl}{8} \frac{u^2 a - 4(c - 2f)}{u(u a + 2g - 2h)}. \quad (83)$$

Za zadani s i t rubni moment jednak je nuli za:

$$l = \frac{2}{s} \sqrt{\frac{\sin hz - \sin z}{\sin hz + \sin z}}.$$

Ostalo kao u slučaju jednolikog opterećenja.

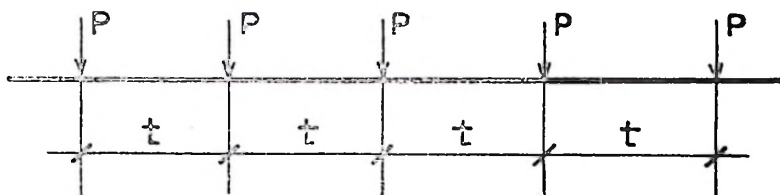
Ako u jednađbu (82) stavimo $l=0$, dobijamo:

$$M = \frac{P}{4s} \frac{c-2f}{g-h},$$

ili sa zamjenama (6):

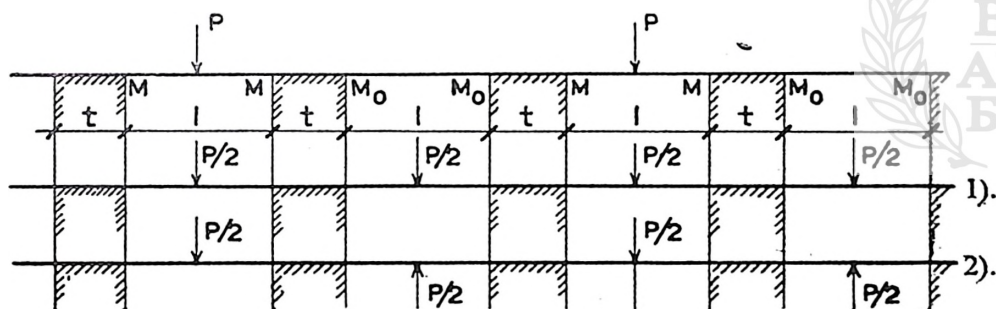
$$M = \frac{P}{4s} \frac{\sin hz - \sin z}{\cos hz - \cos z}.$$

To je moment pod silom P beskonačnog nosača na elastičnoj podlozi opterećenog silama P na razmaku t , prema sl. 57.



Sl. 57.

Opterećenje silom P u sredini svakog drugog polja



Sl. 58.

Za opterećenje pod 1) prema (82):

$$M = M_0 = - \frac{P l}{16} \frac{u^2 a - 4(c-2f)}{u(ua+2g-2h)}.$$

Za opterećenje pod 2) je $\varphi_0 = \frac{P l^2}{32 EI}$, a $T_0 = \frac{P}{4}$, pa je prema (79):

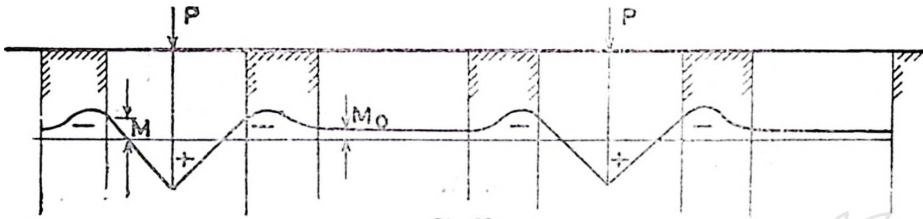
$$M = -M_0 = - \frac{P l}{16} \frac{3u^2 a - 12(uc+2uf+2d-2e)}{u^3 a + 12uc + 12d - 12e + 24uf + 6u^2 g + 6u^2 h}.$$

Definitivni momenti iznose:

$$M = -\frac{P l}{16} \left[\frac{u^2 a - 4(c-2f)}{u(u a + 2g - 2h)} + \frac{3u^2 a - 12(uc + 2uf + 2d - 2e)}{u^3 a + 12uc + 12d - 12e + 24uf + 6u^2 g + 6u^2 h} \right], \quad (84)$$

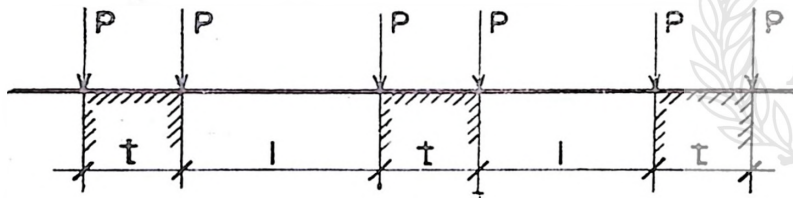
$$M_0 = -\frac{P l}{16} \left[\frac{u^2 a - 4(c-2f)}{u(u a + 2g - 2h)} - \frac{3u^2 a - 12(uc + 2uf + 2d - 2e)}{u^3 a + 12uc + 12d - 12e + 24uf + 6u^2 g + 6u^2 h} \right] \quad (85)$$

Momentni dijagram kao na sl. 59:



Sl. 59.

Opterećenje silom P u rubovima oslonaca

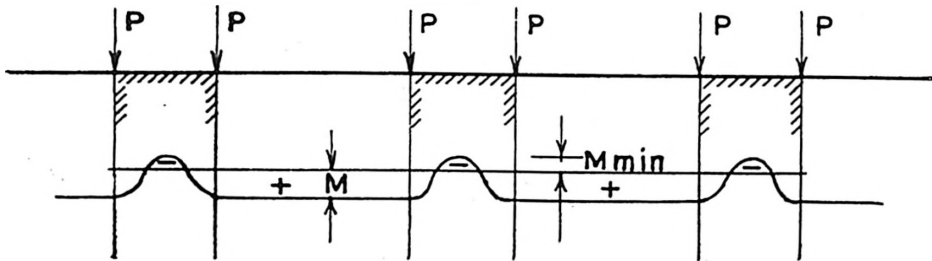


Sl. 60.

Za ovaj slučaj je $\varphi_0 = 0$, a $T_0 = P$, pa će biti:

$$M = \frac{P}{s} \frac{c-2f}{ua+2g-2h}. \quad (86)$$

Momentni dijagram kao na slici 61:

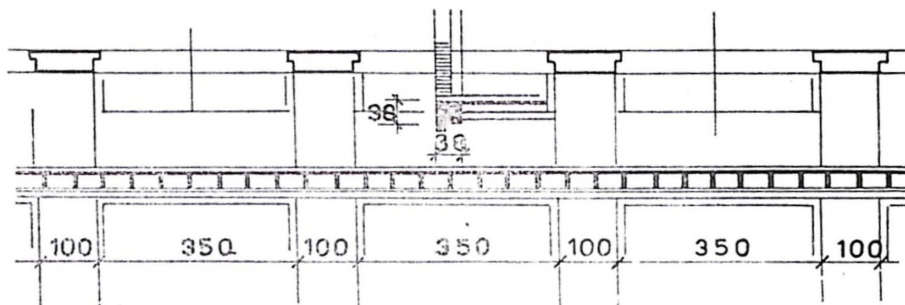


Sl. 61.

Na koncu napominjemo da se sve izvedene formule za nosač s beskonačno mnogo jednakih polja i oslonaca mogu bez daljeg praktički upotrijebiti i za nosač s konačnim brojem jednakih polja i oslonaca, i to počevši od četiri oslonca.

Peti primjer:

Za prozorski nadvoj prikazan na slici 62. dati momentni dijagram mjerodavan za dimenzioniranje te dijagram naprezanja podloge.



Sl. 62.

Nosač (nadvoj) — dimenzija 38/38 (zub u polju zanemarujemo) iz betona marke 220. Zidovi-oslonci od opeke marke 200 u cementnom malteru.

Opterećenje stropa:

stalno (konstr. te pod i plafon) 400 kg/m²,

korisno: 200 kg/m²;

po 1 m² grede:

$$g = \frac{1}{2} 5,00 \cdot 400 + 0,38 \cdot 0,38 \cdot 2.500 + 1,0 \cdot 460 = 1.820 \text{ kg/m},$$

$$p = \frac{1}{2} 5,00 \cdot 200 = \frac{500 \text{ kg/m}}{q = 2.320 \text{ kg/m}}$$

Osnovne veličine:

$$s = \sqrt[4]{\frac{3 E_0}{H v^3 E}},$$

$E_0 = 100.000 \text{ kg/cm}^2$ (opeka u cem. malteru),

$E = 290.000 \text{ kg/cm}^2$ (beton M 220),

$v = 38 \text{ cm}$ (visina nosača),

$H = 100 \text{ cm}$ (mjerodavna visina oslonca).

Nakon uvrštavanja:

$$s = \sqrt[4]{\frac{3 \cdot 100.000}{100 \cdot 38^3 \cdot 290.000}} = 0,021 \text{ cm}^{-1},$$

$$z = ts = 100 \cdot 0,021 = 2,10.$$

Za dobijanje najvećih negativnih momenata opterećujemo cijeli nosač s q . Rubni moment daje nam formula (80):

$$M = -\frac{c^2}{12} \frac{u^2 a - 6(c - 2f)}{u(u a + 2g - 2h)}$$

Za $z = 2,10$ imamo u tablicama slijedeće vrijednosti:

$$a = 15,43,$$

$$c = 16,92,$$

$$f = 3,47,$$

$$g = 16,23,$$

$$h = 1,55.$$

Nadalje je $u = sl = 0,021 \cdot 350 = 7,35$.

Nakon uvštavanja:

$$Mq = -\frac{2,32 \cdot 3,5^2}{12} \frac{7,35^2 \cdot 15,43 - 6(16,92 - 2 \cdot 3,47)}{7,35(7,35 \cdot 15,43 + 2 \cdot 16,23 - 2 \cdot 1,55)} = -1,75 \text{ tm.}$$

Stalni teret daje rubni moment:

$$M_g = -1,75 \frac{1,82}{2,32} = -1,37 \text{ tm.}$$

Najveći negativni moment nastaje u sredini oslonca.

Konstante za izračunavanje $M_{\min}$ (prema formulama 72):

$$A_M = T \frac{\sin h z}{\sin h z + \sin z} - M_s \frac{\cos h z - \cos z}{\sin h z + \sin z} = 4.060 \frac{4,02}{4,89} +$$

$$+ 175.000 \cdot 0,021 \frac{4,65}{4,89},$$

$$A_M = 6,84 \cdot 10^3 \text{ kg},$$

$$B_M = T \frac{\cos h z + \cos z}{\sin h z + \sin z} - M_s \frac{\sin h z - \sin z}{\sin h z + \sin z} = 4.060 \frac{3,64}{4,89} +$$

$$+ 175.000 \cdot 0,021 \frac{3,16}{4,89},$$

$$B_M = 5,39 \cdot 10^3 \text{ kg},$$

$$C_M = T \frac{\sin z}{\sin h z + \sin z} + M_s \frac{\cos h z - \cos z}{\sin h z + \sin z} = 4.060 \frac{0,63}{4,89} -$$

$$- 175.000 \cdot 0,021 \frac{4,65}{4,88},$$

$$C_M = -2,78 \cdot 10^3 \text{ kg},$$

$$D_M = M_s = -175.000 \cdot 0,021 = -3,68 \cdot 10^3 \text{ kg}.$$

Ove vrijednosti uvrstavamo u formulu (72):

$$M_x = -\frac{1}{s} (A_M \sin s x \cos h s x - B_M \sin s x \sin h s x + C_M \cos s x \sin h s x -$$

$$- D_M \cos s x \cos h s x).$$

$$\text{Za } s x = \frac{z}{2} = 1,05 \text{ dobijamo } M_{\min}:$$

$$M_{\min} = -\frac{1.000}{0,021} (6,84 \cdot \sin 1,05 \cos h 1,05 - 5,39 \cdot \sin 1,05 \sin h 1,05 -$$

$$- 2,78 \cdot \cos 1,05 \sin h 1,05 + 3,68 \cdot \cos 1,05 \cdot \cos h 1,05) = -231.000 \text{ kg/cm},$$

$$M_{\min} = -2,31 \text{ tm}.$$

Za dobijanje najvećeg pozitivnog momenta u polju treba korisnim opterećenjem p opteretiti svako drugo polje. Rečni momenti koji odgovaraju tom opterećenju dobijaju se pomoću formula (81) i (82):

$$M = -\frac{p l^2}{24} \left[\frac{u^2 a - 6(c - 2f)}{u(ua + 2g - 2h)} + \right.$$

$$\left. + \frac{3u^2 a - 18(uc + 2uf + 2d - 2e)}{u^3 a + 12uc + 12d - 12e + 24uf + 6u^2 g + 6u^2 h} \right],$$

$$M_0 = -\frac{p l^2}{24} \left[\frac{u^2 a - 6(c - 2f)}{u(ua + 2g - 2h)} - \right.$$

$$\left. - \frac{3u^2 a - 18(uc + 2uf + 2d - 2e)}{u^3 a + 12uc + 12d - 12e + 24uf + 6u^2 g + 6u^2 h} \right].$$

Osim već datih koeficijenata dolaze još:

$$d = 17,10,$$

$$s = -5,61,$$

pa ćemo nakon uvrštavanja dobiti:

$$M = -\frac{0,50 \cdot 3,5^2}{24} (0,74 - 0,10) = -0,16 \text{ tm},$$

$$M_0 = -\frac{0,50 \cdot 3,5^2}{24} (0,74 + 0,10) = -0,21 \text{ tm}.$$

$M_{\max}$ u polju iznosi:

$$M_{\max} = 0,125 \cdot 2,32 \cdot 3,5^2 - (1,37 + 0,16) = 2,02 \text{ tm.}$$

Naprezanje podloge

Za tu svrhu potrebne konstante su prema (74):

$$A_s = T \frac{\sin z}{\sin hz + \sin z} + M_s \frac{\cos hz - \cos z}{\sin hz + \sin z} = -2,78 \cdot 10^3 \text{ kg,}$$

$$B_s = -T \frac{\sin hz}{\sin hz + \sin z} + M_s \frac{\cos hz - \cos z}{\sin hz + \sin z} = -6,84 \cdot 10^3 \text{ kg.}$$

$$C_s = M_s = -3,68 \cdot 10^3 \text{ kg,}$$

$$D_s = T \frac{\cos hz + \cos z}{\sin hz + \sin z} - M_s \frac{\sin hz - \sin z}{\sin hz + \sin z} = 5,39 \cdot 10^3 \text{ kg.}$$

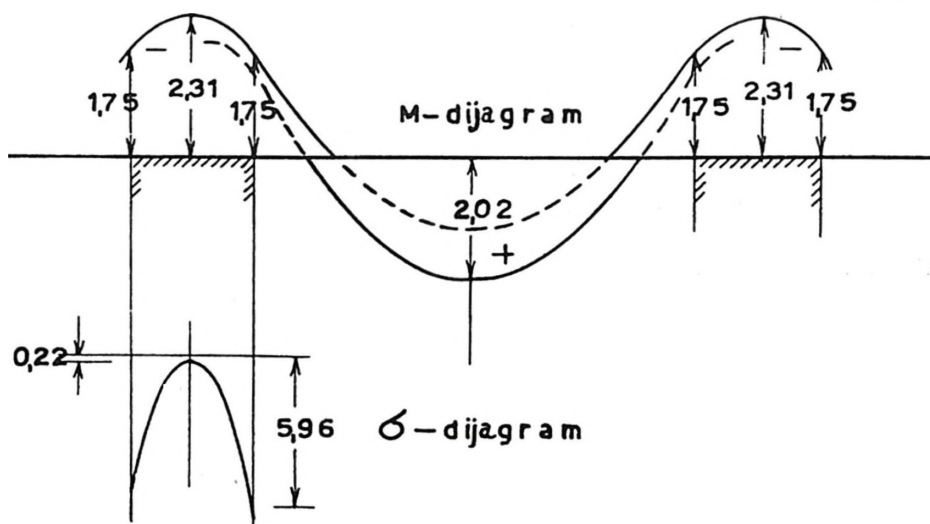
Naprezanje na rubovima (75):

$$\sigma_{\max} = \frac{2s}{b} D_s = \frac{2 \cdot 0,021}{38} 5.390 = 5,96 \text{ kg/cm}^2.$$

Naprezanje u sredini oslonca:

$$\sigma_{\min} = \frac{2 \cdot 0,021 \cdot 10^3}{38} (5,39 \cos 1,05 \cos h 1,05 - 2,78 \sin 1,05 \cos h 1,05 - 6,84 \cos 1,05 \sin h 1,05 + 3,68 \sin 1,05 \sin h 1,05) = 0,22 \text{ kg/cm}^2.$$

Na sl. 63. pokazani su dijagrami momenata i naprezanja podloge:

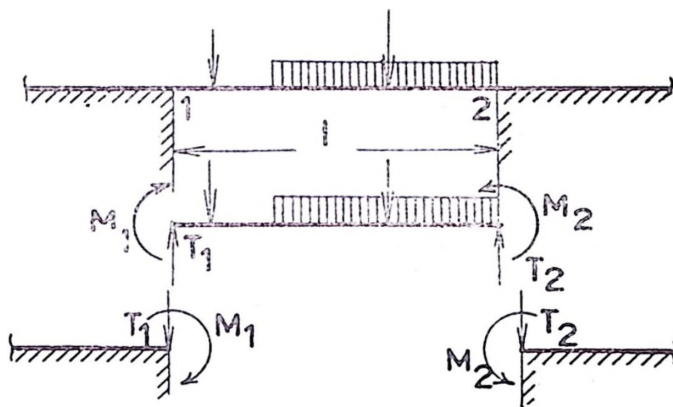


Sl. 63.

6. NOSAČ NA POLUBESKONAČNO ŠIROKIM OSLOCIMA

S porastom širine oslonaca sve se više umanjuje uticaj jednog polja na drugo. Istu posljedicu prouzrokuje i povećanje $s \cdot a$, i uz ograničenu širinu oslonca. Veličina $z = st$ je, dakle, ona veličina koja čini većim ili manjim taj međusobni uticaj pojedinih polja. U slučaju neke vrijednosti z taj uticaj je tako malen da se može zanemariti, pa se oslonci mogu posmatrati kao polubeskonačni. Tada se pojedina polja mogu uzeti zasebno, što mnogo pojednostavljuje proračun. Prema Timošenku (Otpornost materijala, II dio), nosač na elastičnoj podlozi za koji je z veći od 5,00 može se tretirati kao polubeskonačan. Taj kriterij se može usvojiti i ovdje, premda se u praktičnim zadacima može ići i niže.

Razmatrajmo nosač krutosti EI na polubeskonačnim osloncima prema slici 64.



Sl. 64.

Pretpostavke — iste kao kod kontinuiranog nosača (vidi str. 2).

Ako u rubovima oslonaca, tj. u tačkama 1 i 2, presiječemo nosač i na mjestu presjeka priložimo momente M_1 i M_2 te poprečne sile T_1 i T_2 , tada dobijamo dio nosača između oslonaca, koji lako rješavamo primjenom pravila statike i čvrstoće, i polubeskonačne dijelove na elastičnoj podlozi čiji su rubovi podvrgnuti djelovanju jednog momenta i poprečne sile.

Osmotrimo jedan takav polubeskonačan dio nosača na elastičnoj podlozi.

Rješenje diferencijalne jednačine (1) za ovaj slučaj glasi:

$$y = Ae^{-sx} \cos sx + Be^{-sx} \sin sx.$$

Konstante A i B dobijamo iz slijedećih rubnih uslova:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -M \text{ za } x=0,$$

$$EI \frac{d^3 y}{dx^3} = -T \text{ za } x=0,$$

pa će konačni izraz za opće rješenje biti:

$$EIy = \frac{T}{2s^3} e^{-sx} \cos sx - \frac{M}{2s^2} e^{-sx} (\cos sx - \sin sx). \quad (87)$$

Nagib tangente na elastičnu liniju:

$$EI \frac{dy}{dx} = -\frac{T}{2s^2} e^{-sx} (\cos sx + \sin sx) + \frac{M}{s} e^{-sx} \cos sx.$$

Na rubu oslonca, tj. za $x=0$:

$$EI\varphi = -\frac{T}{2s^2} + \frac{M}{s}. \quad (88)$$

(Isti rezultat dobijamo ako u formulu (8) stavimo $T_r' = M_r' = 0$, te $c_r = g_r = a_r$).

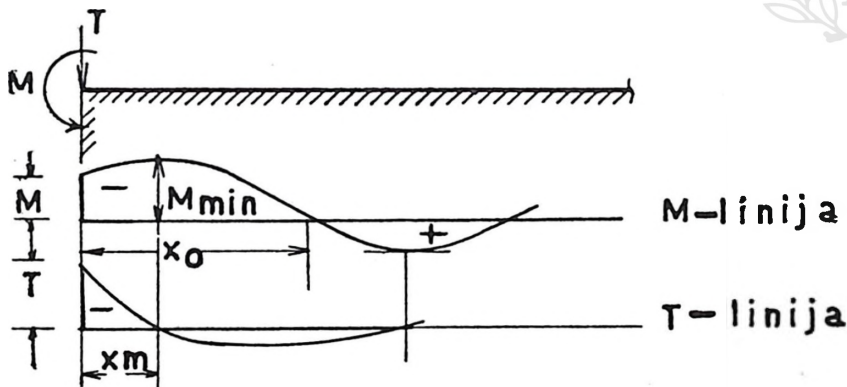
Moment savijanja:

$$-EI \frac{d^2y}{dx^2} = M_x = -\left[\frac{T}{s} e^{-sx} \sin sx - M e^{-sx} (\cos sx + \sin sx) \right]. \quad (89)$$

Poprečna sila:

$$-EI \frac{d^3y}{dx^3} = T_x = -[T e^{-sx} (\cos sx - \sin sx) + 2Ms e^{-sx} \sin sx]. \quad (90)$$

Ako su moment M i poprečna sila T zadani ili poznati, ili se mogu izračunati po pravilima elementarne statike (slučaj konzole), onda samo



Sl. 65.

ostaje da pomoću gornjih formula utvrdimo tok momenata savijanja i poprečnih sila mjerodavnih za dimenzioniranje nosača, kao i naprezanje podloge.

Linije momenata i poprečnih sila pokazane su na slici 65.

$M_{\min}$ nastaje na mjestu gdje poprečna sila mijenja predznak.

Izjednačimo u tu svrhu jednadžbu (90) s nulom:

$$T e^{-sx} (\cos sx - \sin sx) + 2 Ms e^{-sx} \sin sx = 0,$$

odakle se dobija:

$$\operatorname{tg} sx_m = \frac{1}{1 - \frac{2Ms}{T}},$$

ili:

$$sx_m = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{1 - \frac{2Ms}{T}}, \quad (91)$$

odnosno:

$$x_m = \frac{sx_m}{s}.$$

Uvrštavanjem vrijednosti sx_m u jednadžbu (99) dobijamo $M_{\min}$. Radi olakšavanja numeričkog rada daju se na kraju vrijednosti funkcija $e^{-sx} (\cos sx + \sin sx)$, kao i $e^{-sx} \sin sx$.

Sravnjivanjem izraza (89) s nulom dobijamo mjesto gdje moment moment mijenja predznak, tj:

$$sx_0 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{\frac{T}{Ms} - 1}. \quad (92)$$

(Za gravitaciono opterećenje ovaj izraz će biti negativan pa treba uzeti $\pi + sx_0$.)

Ovakvim postupkom možemo i dalje slijediti funkciju (89), ali s praktičnog gledišta to nije potrebno jer njezine ekstremne vrijednosti naglo padaju i nisu značajne za dimenzioniranje nožica.

Naprezanje podloge dobijamo pomoću izraza za y , tj:

$$\sigma_x = \frac{2s}{b} [T e^{-sx} \cos sx - Ms e^{-sx} (\cos sx - \sin sx)]. \quad (93)$$

Najveće je naprezanje za $x=0$ te iznosi:

$$\sigma_{\max} = \frac{2s}{b} (T - Ms). \quad (94)$$

Ukoliko je još nožić po duljini podloge opterećen s q po jedinici duljine, onda se naprezanje povećava za:

$$\Delta \sigma = \frac{q}{b}.$$

$$\text{Za } sx_r = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(1 - \frac{T}{Ms} \right), \quad (95)$$

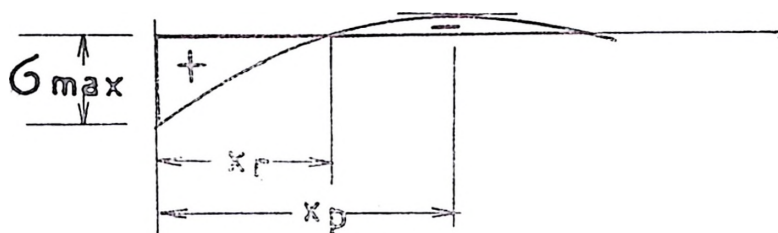
naprezanje podloge jednako je nuli. Tu ujedro poprečna sila ima ekstremnu vrijednost, koja se lako izračuna iz (90).

Maksimalno vlačno naprezanje nastaje tamo gdje je $\frac{dy}{dx} = 0$, tj. za:

$$sx_p = \arctg \left(\frac{2Ms}{T} - 1 \right). \quad (96)$$

Uvrštavanjem ove vrijednosti u (93) dobijamo maksimalno vlačno naprezanje. Funkcije $e^{-sx} \cos sx$, te $e^{-sx} (\cos sx - \sin sx)$ date su na kraju radi lakšeg računanja.

Dijagram naprezanja dat je na slici 66.



Sl. 66.

Nakon što smo utvrdili tok statičkih veličina koje su prouzročene momentom M i poprečnom silom T na rubu polubeskonačnog nosača, vratimo se nosaču prikazanom na slici 64. Statički prekobrojne veličine su tu momenti M_1 i M_2 . Za njihovo određivanje koristimo se kontinuitetom nosača u tačkama 1 i 2.

Proizvoljno opterećenje

Jednadžbe za određivanje nepoznatih rubnih momenata M_1 i M_2 glase:

$$\left. \begin{aligned} \frac{M_1}{3EI} + \frac{M_2}{6EI} + \varphi_{01} - \psi + \varphi_1 &= 0 \\ \frac{M_1}{6EI} + \frac{M_2}{3EI} + \varphi_{02} + \psi + \varphi_2 &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (97)$$

Ovdje su φ_{01} i φ_{02} kutovi zaokreta tangente na elastičnu liniju u tačkama 1 i 2 proste grede na dva oslonca za zadano opterećenje.

φ_1 i φ_2 su kutovi zaokreta tangente na elastičnu liniju u tačkama 1 i 2 na elastičnoj podlozi. Za njih se koristimo izrazom (88):

$$\varphi_1 = \left(\frac{M_1}{s} - \frac{T_1}{2s^2} \right) \frac{1}{EI} = -\frac{1}{2s^2 EI} (2M_1s - T_1),$$

$$\varphi_2 = \left(\frac{M_2}{s} - \frac{T_2}{2s^2} \right) \frac{1}{EI} = -\frac{1}{2s^2 EI} (2M_2s - T_2).$$

ψ je kut zaokreta štapa 1—2 usljed nejednakosti progiba u tačkama 1 i 2, te iznosi:

$$\psi = \frac{1}{l} (y_1 - y_2),$$

gdje su y_1 i y_2 progibi u tačkama 1 i 2, koji se dobijaju iz jednačbe (87) u kojoj je $x = 0$, tj:

$$y_1 = \frac{1}{2s^3 EI} (T_1 - M_1 s),$$

$$y_2 = \frac{1}{2s^3 EI} (T_2 - M_2 s),$$

$$\psi = \frac{1}{2s^3 EI} (T_1 - M_1 s - T_2 + M_2 s).$$

Nadalje, za T_1 i T_2 stavićemo poznate izraze:

$$T_1 = T_{01} - \frac{M_1 - M_2}{1},$$

$$T_2 = T_{02} - \frac{M_2 - M_1}{1},$$

gdje su T_{01} i T_{02} poprečne sile proste grede na dva oslonca — od zadanog opterećenja.

Kad sve ove izraze uvrstimo u jednačbe (97) te izvršimo potrebna sređivanja i sažimanja, dobijamo ove dvije jednačbe:

$$\left. \begin{aligned} (2u^3 + 6u^2 + 6u + 6) M_1 + (u^3 - 6u - 6) M_2 &= -6EI\varphi_{01}u^2s - \\ &\quad - 3T_{02}l + 3T_{01}l(u+1) \\ (u^3 - 6u - 6) M_1 + (2u^3 + 6u^2 + 6u + 6) M_2 &= -6EI\varphi_{02}u^2s - \\ &\quad - 3T_{01}l + 3T_{02}l(u+1) \end{aligned} \right\}, \quad (98)$$

iz kojih dobijamo nepoznate rubne momente M_1 i M_2 ,

$$u = sl.$$

Simetrično opterećenje

Za simetrično opterećenje važi slijedeće:

$$M_1 = M_2 = M,$$

$$T_{01} = T_{02} = T_0,$$

$$\varphi_{01} = \varphi_{02} = \varphi_0,$$

pa će izraz za nepoznati rubni moment glasiti:

$$M = - \frac{2EI\varphi_0us - T_0l}{u^3 + 2u}. \quad (99)$$

Za jednoliko opterećenje q :

$$\varphi_0 = \frac{q l^3}{24 EI}$$

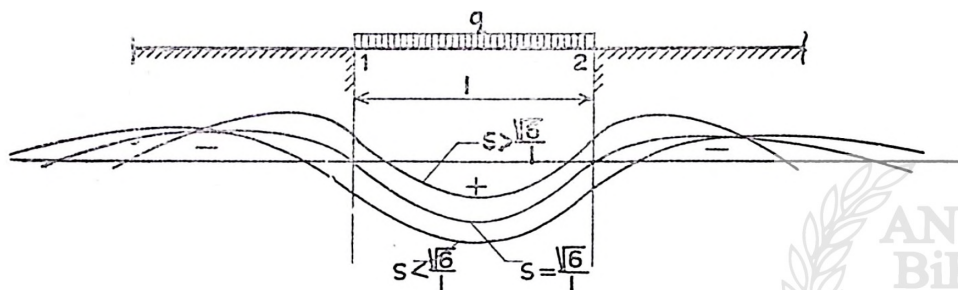
$$T_0 = \frac{1}{2} q l.$$

Nakon uvrštavanja:

$$M = -\frac{q l^2}{12} \frac{u^2 - 6}{u^2 + 2u}. \quad (100)$$

Rubni moment je jednak nuli za $1 = \frac{\sqrt{6}}{s}$, odnosno $s = \frac{\sqrt{6}}{l}$,

Momentni dijagram je pokazan na slici 67.



Sl. 67.

Za silu P u sredini:

$$\varphi_0 = \frac{P l^2}{16 EI},$$

$$T_0 = \frac{1}{2} P.$$

Nakon uvrštavanja:

$$M = -\frac{P l}{8} \frac{u^2 - 4}{u^2 + 2u}. \quad (101)$$

Rubni moment je jednak nuli za $1 = \frac{2}{s}$, odnosno $s = \frac{2}{l}$.

Momentni dijagram je analogan onom na sl. 67.

Ako je $l=0$, onda je moment:

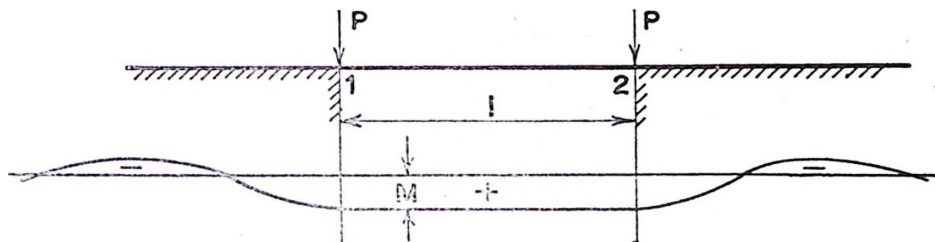
$$M = \frac{P}{4s}.$$

To je poznati izraz za moment beskonačne grede na elastičnoj podlozi opterećene silom P .

Za dvije sile P u rubovima oslonaca:

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= 0, \\ T_0 &= P, \\ M &= \frac{P}{s(u+2)}.\end{aligned}\quad (102)$$

Momentni dijagram na sl. 68:

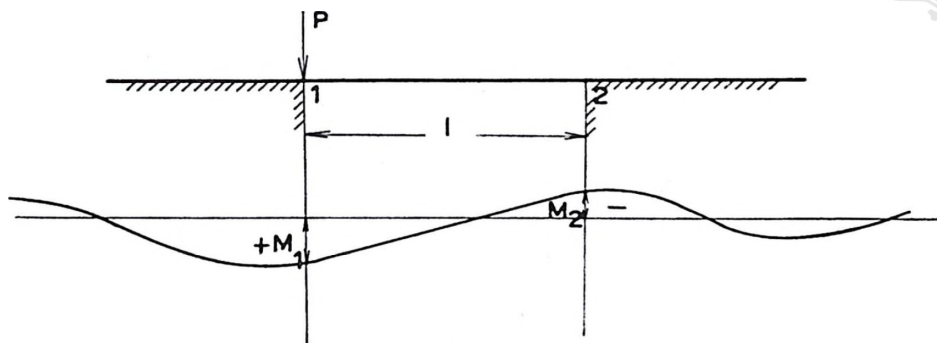


Sl. 68,

Ako je silom P opterećen samo jedan rub, onda, uzevši u obzir simetrično i antisimetrično opterećenje, dobijamo:

$$\left. \begin{aligned}M_1 &= \frac{P}{s} \frac{2u^3 + 9u^2 + 12u + 6}{u^4 + 8u^3 + 24u^2 + 36u + 24} \\ M_2 &= -\frac{P}{s} \frac{u^3 + 3u^2 - 6}{u^4 + 8u^3 + 24u^2 + 36u + 24}\end{aligned} \right\} \quad (103)$$

Na slici 69. pokazan je momentni dijagram.



Sl. 69,

Nosač s jednim normalnim i jednim polubeskonačnim osloncem

Nepoznati rubni moment M_2 dobijamo ako u drugu jednadžbu (98) stavimo $M_1 = 0$, pa je:

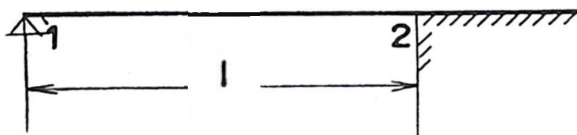
$$M_2 = -\frac{6EI\varphi_{02}u^2s - 3T_{02}l(u+1)}{u^3 + 6u^2 + 6u + 6}.\quad (104)$$

Jednoliko opterećenje q :

$$M_2 = -\frac{q l^2}{8} \frac{u^3 - 6(u+1)}{u^3 + 3u^2 + 3u + 3}. \quad (105)$$

Sila P sredini:

$$M_2 = -\frac{3}{16} P l \frac{u^3 - 4(u+1)}{u^3 + 3u^2 + 3u + 3}. \quad (106)$$



Sl. 70.

Sila P na rubu 2:

$$M_2 = \frac{3}{2} P l \frac{(u+1)}{u^3 + 3u^2 + 3u + 3}. \quad (107)$$

Šesti primjer

Uzmimo primjer 4. radi usporedbe s tačnim načinom. Rubni moment:

$$M = -\frac{q l^2}{12} \frac{u^2 - 6}{u^2 + 2u} \text{ prema (100), } q = 3,33 \text{ t/m, } u = 300 \cdot 0,021 = 6,3,$$

$$M = -\frac{3,33 \cdot 3,02}{12} \frac{6,3^2 - 6}{6,3^2 + 2 \cdot 6,3} = -1,61 \text{ tm.}$$

(u primjeru 4. rubni moment iznosi 1,55, odnosno 1,59 tm),

$$sx_m = \arctg \frac{1}{1 - \frac{2Ms}{T}} = \frac{2Ms}{T} = -\frac{2 \cdot 161.000 \cdot 0,021}{4.950} = -1,37,$$

$$sx_m = \arctg 0,42 = 0,40; \quad x_m = \frac{0,40}{0,021} = 19 \text{ cm,}$$

(u primjeru 4, $x_m = 21$ odnosno 23 cm).

Prema (89):

$$M_{\min} = -\left(\frac{4.950}{0,021} 0,261 + 161.000 \cdot 0,878\right) = -2,03 \text{ tm,}$$

gdje su koeficijenti 0,261 i 0,878 dobijeni iz tablica za funkcije $e^{-sx} \sin sx$, te $e^{-sx} (\cos sx + \sin sx)$, a za $sx = 0,40$.

(U primjeru 4: $M_{\min} = 2,14$, odnosno 1,97 tm.)

Naprezanje podloge:

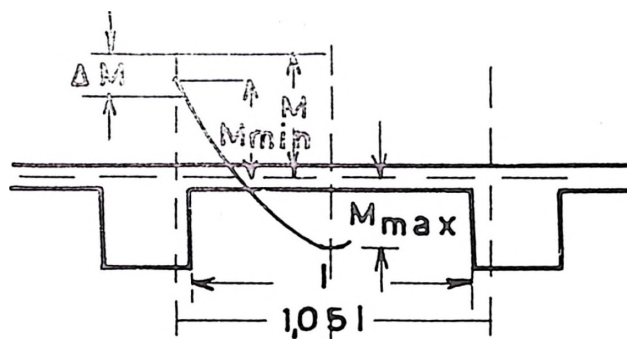
$$\sigma_{\max} = \frac{2 \cdot 0,021}{38} (4.950 + 161.000 \cdot 0,021) = 9,2 \text{ kg/cm}^2.$$

(U primjeru 4: $\sigma_{\max} = 9,15$, odnosno $9,30 \text{ kg/cm}^2$.)

Kako je iz prednjeg vidljivo, rezultati s praktičnog gledišta potpuno zadovoljavaju, jer razlike ne premašuju veličinu od 3%. Ovo tim više što je u ovom primjeru $z=4,2$, što znači da bi za $z=5,0$ (koju smo vrijednost uzeli kao kriterij) ova razlika bila još manja.

USPOREDBA REZULTATA S PROPISIMA

Tačka 19. Privremenih tehničkih propisa za beton i armirani beton praktično tretira pitanje širokih oslonaca tako da se za oslonce šire od $0,10 l$ izrađuje fiktivna šema nosača prema slici 71, pa se dimenzioniranje oslonačnog presjeka vrši s obzirom na reducirane momente $M_{\min}$.



Sl. 71.

Iz slike imamo:

$$M_{\min} = M - \frac{1}{2} \Delta M,$$

$$M = -\frac{1}{12} q (1,05 \cdot l)^2 = -0,092 q l^2,$$

$$\Delta M = \frac{qx}{2} (l-x) = \frac{q \cdot 0,025 \cdot l}{2} \cdot 1,025 \cdot l = 0,0128 q l^2,$$

$$M_{\min} = - (0,092 - 0,0064) q l^2 = -0,0856 q l^2,$$

$$M_{\max} = \frac{1}{8} q (1,05 \cdot l)^2 - 0,092 q l^2 = 0,046 q l^2.$$

Ovi momenti ostaju nepromijenjeni bez obzira na širinu oslonca.

Da bismo dobili stvarni tok momenata i uporedili ga s gornjim rezultatima, uzmimo nosač s beskonačno mnogo jednakih otvora i oslonaca (praktično s većim brojem jednakih otvora i oslonaca). Rubni moment dobijamo koristeći se jednažbom (80):

$$M = -\frac{q l^2}{12} \frac{u^2 a - 6(c - 2f)}{u(ua + 2g - 2h)}.$$

Za zadano opterećenje q i raspon l veličina ovog momenta ovisi o nekoliko faktora: o popustljivoj ti podloge, krutosti nosača i širini oslonaca. Da bismo ove uticaje što jednostavnije uzeli obzir, stavimo u izraz (32) —

$$s = \sqrt[4]{\frac{3 E_0}{H v^3 E}},$$

slijedeće oznake:

$$v = n l,$$

$$H = t = m l,$$

$$E_0 = r E$$

$$s = \frac{1}{l} \sqrt[4]{\frac{3 r}{m n^3}}.$$

Isto tako unesimo ove zamjene i u izraz za z :

$$z = s t = \sqrt[4]{\frac{3 r m^3}{n^3}}.$$

Nakon ovog dobijamo izraz za rubni moment u ovom obliku:

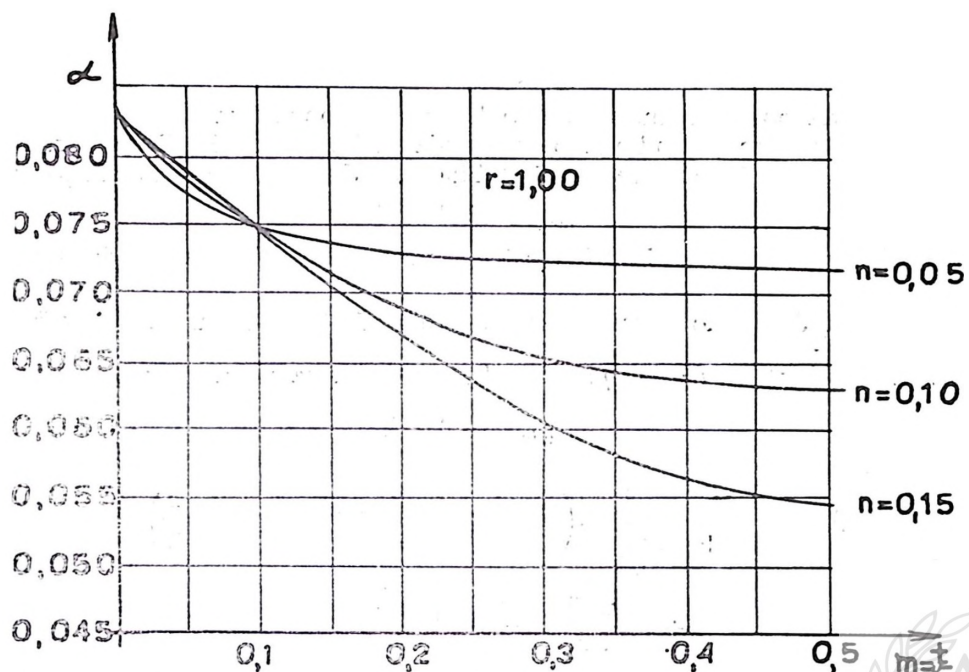
$$M = -\alpha q l^2,$$

gdje je:

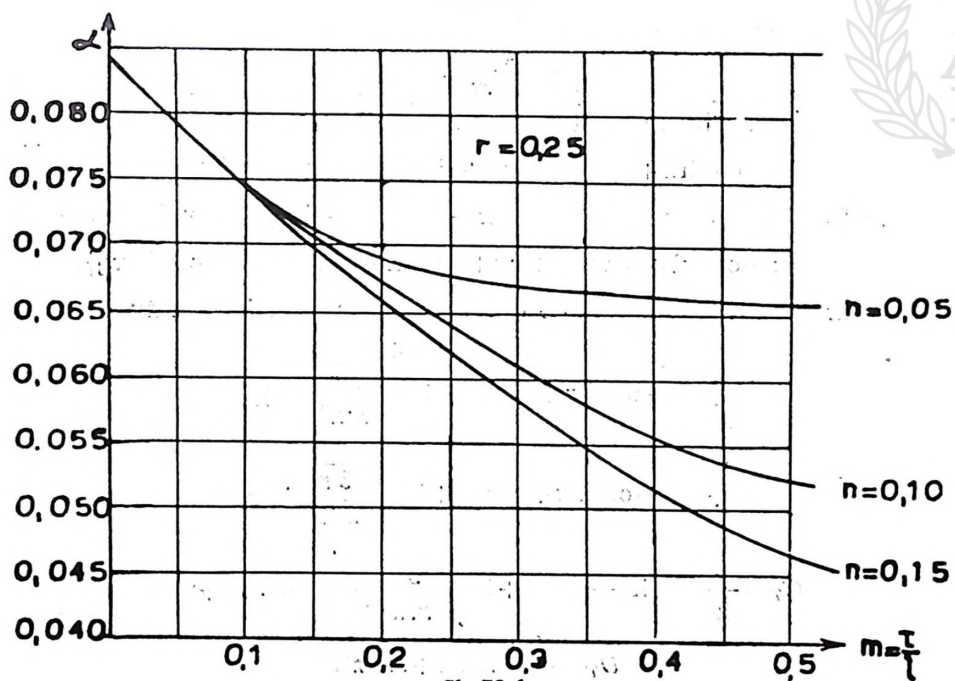
$$\alpha = \frac{a \sqrt[2]{\frac{3 r}{m n^3}} - 6(c - 2f)}{12 \sqrt[4]{\frac{3 r}{m n^3}} \left(a \sqrt[4]{\frac{3 r}{m n^3}} + 2g - 2h \right)}.$$

Da bi dobili ovisnost koeficijenata α o širini oslonca t , treba usvojiti odnose r i n . Za r usvajamo veličinu $r = 1$, što odgovara slučaju kad su nosač i oslonac od istog materijala, te $r = 0,25$, što odgovara nosaču od prosječnog betona na osloncima od pročišćene opeke. Za n su uzete vrijednosti od 0,05; 0,10 i 0,15, unutar kojih se praktično kreće visina nosača.

Na slici 72 a i b) dati su grafikoni ovisnosti koeficijenta α o širini oslonca $t = ml$.



Sl. 72. a



Sl. 72. b

Kako se iz datih dijagrama vidi, rubni moment po svojoj vrijednosti pada s porastom širine oslonca, i to tim više što je krutost nosača veća, a modul elastičnosti oslonca manji.

Pošto je:

$$M_{\max} = (0,125 - \alpha) q l^2,$$

to znači da pozitivni moment u polju raste s porastom širine oslonca, i to tim više što je podloga popustljivija, a nosač krući. Tako npr. za $r = 0,25$ i $n = 0,15$, te za $m = 0,5$, dobija se iz dijagrama $\alpha = 0,0465$, pa je:

$$M_{\max} = 0,0785 q l^2,$$

a to je za 70% više od vrijednosti po propisima, dakle nastaje drastična razlika.

$M_{\min}$ dobijamo pomoću izraza (72) i (72)', iz kojih, nakon uvrštavanja $T = \frac{1}{2} q l$ i $M = -\alpha q l^2$, te odgovarajućih zamjena za s i z , izlazi:

$$M_{\min} = -\beta q l^2,$$

gdje je:

$$\beta = \frac{1}{\sin h z + \sin z} \left[2\alpha \left(\sin \frac{z}{2} \cos h \frac{z}{2} + \cos \frac{z}{2} \sin h \frac{z}{2} \right) + \sqrt[4]{\frac{mn^3}{3r}} \sin \frac{z}{2} \sin h \frac{z}{2} \right].$$

Ovim izrazom dobijamo $M_{\min}$ u slučaju kad on nastaje u sredini oslonca.

Ako to nije slučaj, onda je:

$$\begin{aligned} \beta = \frac{1}{\sin h z + \sin z} & \left\{ \frac{1}{2} \sqrt[4]{\frac{mn^3}{3r}} [\sin h z \sin x \cos h s x - \right. \\ & - (\cos h z + \cos z) \sin s x + \sin z \cos s x \sin h s x] + \\ & + \alpha [(\cos h z - \cos z) \sin s x \cos h s x - (\sin h z - \sin z) \sin s x \sin h s x - \\ & - (\cos h z - \cos z) \cos s x \sin h s x + (\sin h z + \sin z) \cos s x \cos h s x] \}. \end{aligned}$$

gdje se $s x$ dobija iz (17), odnosno (18), upotrebom konstanti:

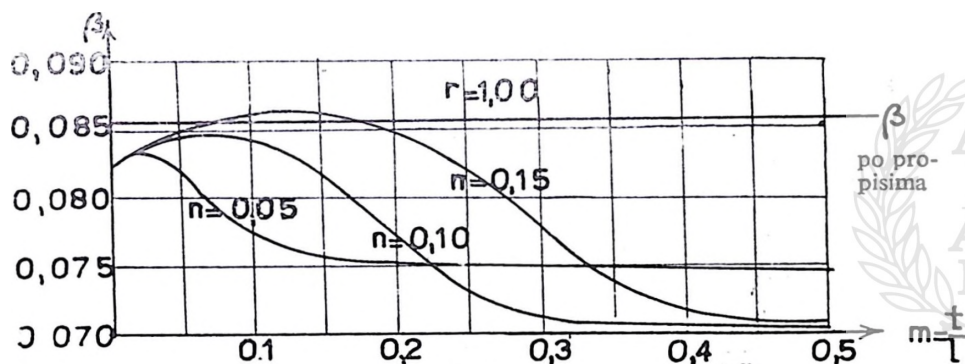
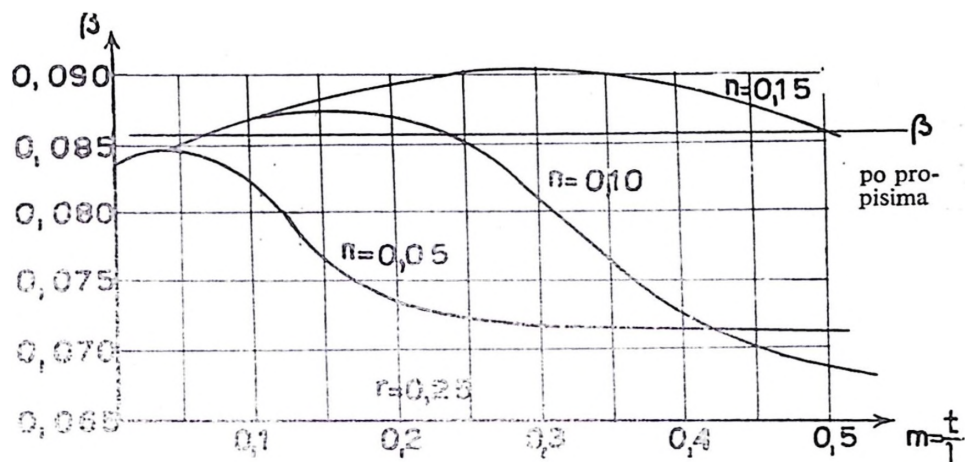
$$A_T = \frac{1}{2} \cos h z + \cos z + 2 \sqrt[4]{\frac{3r}{mn^3}} \sin h z,$$

$$B_T = \frac{1}{2} (\cos h z + \cos z) + 2 \sqrt[4]{\frac{3r}{mn^3}} \sin z,$$

$$C_T = \frac{1}{2} (\sin h z - \sin z) + 2 \sqrt[4]{\frac{3r}{mn^3}} (\cos h z - \cos z),$$

$$D_T = \frac{1}{2} (\sin h z + \sin z).$$

Na slici 73. dati su dijagrami ovisnosti koeficijenta β o širini oslonca, a za razne r -ove i n -ove.



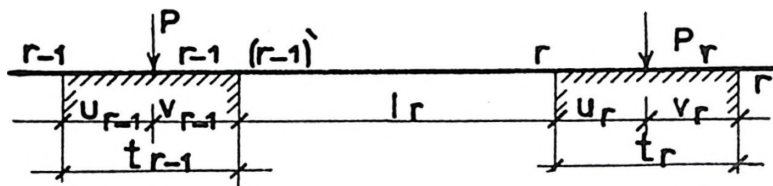
Sl. 73.

Iz pokazanih dijagrama vidi se da $M_{\min}$ s porastom širine oslonca najprije raste, a nakon toga počne naglo padati. Ovaj porast ide sve dotle dok $M_{\min}$ nastaje u sredini oslonca pa njegova vrijednost može biti veća nego ona prema propisima. Čim se mjesto gdje $M_{\min}$ nastaje pomiče prema rubu oslonca, vrijednost tog momenta naglo pada.

N A P O M E N E

- *) Ovu postavku o proporcionalnosti ugiba i opterećenja formulisao je 1867. god. E. Winkler. Njom su se koristili svi autori spomenuti u uvodu, koji su se bavili ovim problemom. Kasnije je ova postavka bila podvrgnuta oštroj kritici, naročito prilikom njezine primjene na rješavanje problema vezanih za prirodno tlo, pa su uvedene nove postavke bazirane na principima teorije elastičnosti. Ipak Winklerova postavka nije mogla biti odbačena: prvo, što je matematički najprostija, a drugo, što daje potpuno prihvatljive rezultate, koji su u nekim područjima primjene čak i egzaktni.

- **) Izrazi za ugame i kutove zaokreta na rubovima nosača na elastičnoj podlozi u ovom obliku su najpogodniji za dalje razvijanje potrebnih jednačbi, jer svaka od četiri statičke veličine: T_r , T_r' , M_r , M_r' , dolazi s jednim koeficijentom, koji se iz tablica, za zadani slučaj, odmah može dobiti. Druge metode rješavaju ove diferencijalne jednačbe koje se u savremenoj literaturi mogu naći, a koje su inače vrlo pogodne i spretne, ali nemaju naročitih preimućstava za ovaj slučaj.
- ***)) Za momente uzimamo predznake uobičajene u nauci o čvrstoći, tj. pozitivni moment izaziva konveksnost elastične linije prema dolje.
- ****)) Ukoliko ipak želimo uzeti u obzir uticaj pojedinačne sile P na osloncima,



prema slici, onda će za rub r desna strana jednačbe (10) imati ovaj oblik:

$$= -2EI s_r^2 l_r a_r a_{r-1} \varphi_{rp} - 2EI s_r^2 a_r a_{r-1} [y'_{(r-1)p} - y_{rp}],$$

gdje je:

$$y'_{(r-1)p} = \frac{P_{r-1}}{2EI s_{r-1}^3 a_{r-1}} (\sin h z_{r-1} \cos s_{r-1} v_{r-1} \cos h s_{r-1} u_{r-1} - \sin z_{r-1} \cos s_{r-1} u_{r-1} \cos h s_{r-1} v_{r-1}),$$

$$y_{rp} = \frac{P_r}{2EI s_r^3 a_r} (\sin h z_r \cos s_r u_r \cos h s_r v_r - \sin z_r \cos h s_r u_r \cos s_r v_r),$$

$$\varphi_{rp} = \frac{P_r}{2EI s_r^2 a_r} [\sin h z_r (\sin s_r u_r \cos h s_r v_r - \cos s_r u_r \sin h s_r v_r) + \sin z_r (\sin h s_r u_r \cos s_r v_r - \cos h s_r u_r \sin s_r v_r)].$$

- *****)) Ovaj rezultat dobijamo i isključivo matematičkim razmatranjem. Diferencijalna jednačba (1) je za ovaj slučaj nehomogena i glasi:

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + k_r y = p_r,$$

a njezino rješenje:

$y = y_0 + \frac{p_r}{k_r}$, gdje je y_0 — već iskorišteno opće rješenje homogene diferencijalne jednačbe. Kad to uvrstimo u izraz za ψ , dobijamo kako je napisano.

Vrijednosti funkcija $\sin sx$, $\cos sx$, $\sinh sx$, $\cosh sx$ sa sx od 0 do 5,0

sx	$\sin sx$	$\cos sx$	$\sinh sx$	$\cosh sx$
0,0	0,0000	0,000	0,0000	1,0000
0,1	0,0988	0,995	0,1002	1,0050
0,2	0,199	0,980	0,2013	1,0201
0,3	0,296	0,955	0,3045	1,0453
0,4	0,389	0,921	0,4107	1,0811
0,5	0,479	0,878	0,5211	1,1276
0,6	0,565	0,835	0,6366	1,1855
0,7	0,644	0,765	0,7586	1,3552
0,8	0,717	0,697	0,8881	1,3374
0,9	0,783	0,622	1,0265	1,4331
1,0	0,841	0,540	1,1752	1,5431
1,1	0,891	0,454	1,3356	1,6685
1,2	0,932	0,362	1,5094	1,8107
1,3	0,964	0,263	1,6984	1,9709
1,4	0,985	0,175	1,9043	2,1509
1,5	0,997	0,071	2,1293	2,3524
1,6	0,999	— 0,020	2,3756	2,5775
1,7	0,992	— 0,129	2,6456	2,8283
1,8	0,974	— 0,227	2,9422	3,1075
1,9	0,946	— 0,324	3,2682	3,4177
2,0	0,909	— 0,416	3,627	3,762
2,1	0,863	— 0,505	4,022	4,144
2,2	0,809	— 0,589	4,457	4,568
2,3	0,746	— 0,666	4,937	5,037
2,4	0,675	— 0,737	5,466	5,557
2,5	0,598	— 0,801	6,050	6,132
2,6	0,516	— 0,857	6,695	6,769
2,7	0,427	— 0,904	7,406	7,473
2,8	0,335	— 0,942	8,192	8,253
2,9	0,239	— 0,971	9,060	9,115
3,0	0,141	— 0,990	10,018	10,068
3,1	0,042	— 0,999	11,076	11,122
3,2	— 0,058	— 0,998	12,246	12,287
3,3	— 0,158	— 0,987	13,538	13,575
3,4	— 0,256	— 0,967	14,965	14,999
3,5	— 0,351	— 0,936	16,543	16,573
3,6	— 0,443	— 0,897	18,285	18,313
3,7	— 0,530	— 0,848	20,211	20,236
3,8	— 0,612	— 0,791	22,339	22,362
3,9	— 0,688	— 0,726	24,691	24,711
4,0	— 0,757	— 0,654	26,290	27,308
4,1	— 0,818	— 0,575	30,162	30,178
4,2	— 0,872	— 0,490	33,336	33,351
4,3	— 0,916	— 0,401	36,843	36,857
4,4	— 0,952	— 0,307	40,719	40,732
4,5	— 0,978	— 0,211	45,003	45,014
4,6	— 0,994	— 0,112	49,737	49,747
4,7	— 0,999	— 0,012	54,969	54,978
4,8	— 0,996	— 0,088	60,751	60,759
4,9	— 0,982	— 0,187	67,141	67,149
5,0	— 0,959	— 0,284	74,203	74,210



Vrijednost koeficijenata $a, c, d, e, f, g, h, i, j$ za $z=st$ od 0 do 5,0

z	a	c	d	e	f	g	h	i	j
0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,1	0,001	0,019	0,002	-0,001	0,010	0,200	0,200	0,010	0,010
0,2	0,001	0,079	0,010	-0,006	0,040	0,400	0,400	0,040	0,040
0,3	0,005	0,180	0,035	-0,018	0,090	0,601	0,600	0,088	0,093
0,4	0,017	0,320	0,086	-0,042	0,160	0,802	0,800	0,151	0,168
0,5	0,041	0,501	0,157	-0,083	0,250	0,999	0,997	0,229	0,271
0,6	0,086	0,723	0,289	-0,144	0,360	1,221	1,196	0,319	0,405
0,7	0,160	0,990	0,459	-0,227	0,489	1,445	1,389	0,414	0,575
0,8	0,274	1,303	0,687	-0,340	0,637	1,687	1,578	0,514	0,788
0,9	0,440	1,666	0,984	-0,483	0,804	1,958	1,661	0,613	1,053
1,0	0,673	2,087	1,359	-0,663	0,988	2,267	1,933	0,707	1,380
1,1	0,989	2,577	1,823	-0,879	1,190	2,633	2,093	0,794	1,783
1,2	1,408	3,144	2,396	-1,142	1,406	3,070	2,234	0,868	2,277
1,3	1,954	3,812	3,089	-1,445	1,637	3,605	2,355	0,929	2,883
1,4	2,655	4,595	3,928	-1,795	1,875	4,262	2,443	0,970	3,625
1,5	3,513	5,501	4,936	-2,194	2,123	5,078	2,496	0,994	4,507
1,6	4,645	6,644	6,152	-2,645	2,375	6,094	2,607	0,999	5,645
1,7	6,018	7,984	7,611	-3,146	2,627	7,355	2,464	0,983	7,001
1,8	7,707	9,603	9,362	-3,694	2,866	8,920	2,358	0,948	8,655
1,9	9,785	11,57	11,48	-4,292	3,092	10,85	2,174	0,895	10,68
2,0	12,33	13,98	14,02	-4,929	3,297	13,27	1,911	0,826	13,15
2,1	15,43	16,92	17,10	-5,607	3,471	16,23	1,545	0,745	16,18
2,2	19,21	20,52	20,84	-6,321	3,606	19,88	1,071	0,654	19,86
2,3	24,82	24,93	25,36	-7,046	3,683	24,37	0,470	0,557	24,37
2,4	29,42	30,33	30,87	-7,779	3,690	29,88	-0,277	0,456	29,88
2,5	36,24	36,96	37,58	-8,513	3,618	36,66	-1,179	0,358	36,60
2,6	44,56	45,09	45,76	-9,231	3,455	44,88	-2,245	0,266	44,82
2,7	54,67	55,03	55,73	-9,886	3,162	54,96	-3,504	0,182	54,85
2,8	66,99	67,22	67,92	-10,48	2,744	67,29	-4,952	0,112	67,11
2,9	82,03	82,14	82,81	-10,97	2,165	82,35	-6,619	0,057	82,08
3,0	100,3	100,4	101,0	-11,34	1,413	100,7	-8,498	0,020	100,4
3,1	122,7	122,7	123,2	-11,54	0,465	123,1	-10,61	0,002	122,7
3,2	150,0	150,0	150,4	-11,51	-0,710	150,5	-12,93	0,003	150,0
3,3	183,3	183,3	183,6	-11,22	-2,139	183,9	-15,51	0,025	182,3
3,4	223,9	224,0	224,2	-10,63	-3,831	224,7	-18,31	0,065	223,9
3,5	273,6	273,8	273,8	+9,667	-5,807	274,5	-21,30	0,123	273,7
3,6	334,1	334,5	336,5	8,289	-8,100	337,3	-24,52	0,196	334,3
3,7	408,2	408,8	408,5	6,414	-10,71	409,4	-27,86	0,281	408,5
3,8	498,7	499,4	499,1	4,062	-13,67	500,0	-31,28	0,375	499,0
3,9	609,2	610,1	609,6	1,172	-16,99	610,6	-35,17	0,473	609,6
4,0	744,2	745,3	744,7	2,824	-20,66	745,7	-38,52	0,573	744,7
4,1	909,1	910,4	909,8	7,343	-24,67	910,7	-42,03	0,669	909,7
4,2	1110,5	1112,0	1111,4	12,75	-29,07	1112,2	-45,42	0,760	1111,3
4,3	1356,6	1358,2	1357,6	18,99	-33,86	1358,3	-48,54	0,839	1357,4
4,4	1657,1	1658,9	1658,3	26,28	-38,76	1658,9	-51,28	0,906	1658,0
4,5	2024,3	2026,2	2025,6	34,53	-44,01	2026,0	-53,52	0,956	2025,3
4,6	2472,8	2474,8	2474,2	42,88	-49,44	2474,4	-55,02	0,987	2473,8
4,7	3020,6	3022,6	3022,1	54,32	-54,97	3022,1	-55,64	0,979	3021,6
4,8	3689,7	3691,7	3691,3	65,86	-60,51	3691,1	-55,17	0,993	3690,7
4,9	4506,9	4508,9	4508,6	78,49	-65,93	4508,3	-53,38	0,965	4507,9
5,0	5505,2	5507,0	5506,9	92,24	-71,16	5506,3	-50,09	0,919	5506,1

Vrijednosti $\operatorname{tg} h s x$ za $s x = 0$ do $s x = 5,0$

$s x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	00000	00100	00200	00300	00400	00500	00599	00699	00798	00898
0,1	00997	01096	01194	01293	01391	01489	01587	01684	01781	01878
0,2	01974	02070	02165	02260	02355	02449	02543	02636	02729	02821
0,3	02913	03004	03095	03185	03275	03364	03452	03540	03627	03714
0,4	03800	03885	03969	04053	04136	04219	04301	04382	04462	04542
0,5	04621	04700	04777	04854	04930	05005	05080	05154	05227	05299
0,6	05370	05441	05511	05581	05649	05717	05784	05850	05915	05980
0,7	06044	06107	06169	06231	06291	06352	06411	06469	06527	06584
0,8	06640	06696	06751	06805	06858	06911	06963	07014	07064	07114
0,9	07163	07211	07259	07306	07352	07398	07443	07487	07531	07574
1,0	07616	07658	07699	07739	07779	07818	07857	07895	07932	07969
1,1	08005	08041	08076	08110	08144	08178	08210	08243	08275	08356
1,2	08337	08367	08397	08426	08455	08483	08511	08538	08565	08591
1,3	08617	08643	08668	08793	08717	08741	08764	08787	08810	08832
1,4	08854	08875	08896	08917	08937	08957	08977	08996	09015	09033
1,5	09052	09069	09087	09104	09121	09138	09154	09170	09186	09202
1,6	09217	09232	09246	09261	09275	09289	09302	09316	09329	09340
1,7	09354	09367	09379	09391	09402	09414	09425	09436	09447	09458
1,8	09468	09478	09488	09498	09508	09518	09527	09536	09549	09554
1,9	09562	09571	09579	09587	09595	09603	09611	09619	09626	09633
2,0	09640	09647	09654	09661	09668	09674	09680	09687	09693	09699
2,1	09705	09710	09716	09722	09727	09732	09738	09743	09748	09753
2,2	09757	09762	09767	09771	09776	09780	09785	09789	09793	09797
2,3	09801	09805	09809	09812	09816	09820	09823	09827	09830	09834
2,4	09837	09840	09843	09846	09849	09852	09855	09858	09861	09863
2,5	09866	09869	09871	09874	09876	09879	09881	09884	09886	09888
2,6	09890	09892	09895	09897	09899	09901	09903	09905	09906	09908
2,7	09910	09912	09914	09915	09917	09919	09920	09922	09923	09925
2,8	09926	09928	09929	09931	09932	09933	09935	09936	09937	09938
2,9	09940	09941	09942	09943	09944	09945	09946	09947	09949	09950
3,0	09951	09959	09967	09973	09978	09982	09985	09988	09990	09992
4,0	09993	09995	09996	09996	09997	09998	09998	09998	09999	09999
5,0	09999									

Vrijednosti $\operatorname{tg} s x$ za $s x = 0$ do $s x = 1,6$

$s x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0100	0,0200	0,0300	0,0400	0,0500	0,0601	0,0701	0,0802	0,0902
0,1	0,1003	0,1105	0,1206	0,1307	0,1409	0,1511	0,1614	0,1717	0,1820	0,1923
0,2	0,2027	0,2131	0,2236	0,2341	0,2447	0,2553	0,2660	0,2768	0,2876	0,2984
0,3	0,3093	0,3203	0,3314	0,3425	0,3537	0,3650	0,3764	0,3879	0,3994	0,4111
0,4	0,4228	0,4346	0,4466	0,4586	0,4708	0,4831	0,4955	0,5080	0,5206	0,5334
0,5	0,5463	0,5594	0,5726	0,5859	0,5994	0,6131	0,6270	0,6410	0,6552	0,6696
0,6	0,6841	0,6989	0,7139	0,7291	0,7445	0,7602	0,7761	0,7923	0,8087	0,8253
0,7	0,8423	0,8595	0,8771	0,8949	0,9131	0,9316	0,9505	0,9697	0,9893	1,0092
0,8	1,0296	1,0505	1,0717	1,0934	1,1156	1,1383	1,1616	1,1853	1,2097	1,2346
0,9	1,2602	1,2864	1,3133	1,3409	1,3692	1,3984	1,4284	1,4592	1,4910	1,5237
1,0	1,5574	1,5922	1,6281	1,6652	1,7036	1,7433	1,7844	1,8270	1,8712	1,9171
1,1	1,9648	2,0143	2,0670	2,1198	2,1759	2,2345	2,2958	2,3600	2,4273	2,4979
1,2	2,5722	2,6503	2,7328	2,8198	2,9119	3,0096	3,1133	3,2236	3,3413	3,4672
1,3	3,6021	3,7471	3,9033	4,0723	4,2556	4,4552	4,6734	4,9131	5,1774	5,4707
1,4	5,7979	6,1654	6,5811	7,0555	7,6018	8,2381	8,9836	9,8874	10,983	12,350
1,5	14,101	16,428	19,670	24,498	32,461	48,078	92,621	1255,8	—108,65	—52,067
1,6	—34,233									

Vrijednosti funkcija: e^{-sx} ($\cos sx + \sin sx$), e^{-sx} ($\cos sx - \sin sx$),
 e^{-sx} $\cos sx$, e^{-sx} $\sin sx$

$s x$	e^{-sx} ($\cos sx + \sin sx$)	e^{-sx} ($\cos sx - \sin sx$)	e^{-sx} $\cos sx$	e^{-sx} $\sin sx$
0,0	1,0000	1,0000	1,0000	0
0,1	0,9907	0,8100	0,9003	0,0903
0,2	0,9651	0,6398	0,8024	0,1627
0,3	0,9267	0,4888	0,7077	0,2189
0,4	0,9784	0,3564	0,6174	0,2610
0,5	0,8231	0,2415	0,5323	0,2908
0,6	0,7628	0,1431	0,4530	0,3099
0,7	0,6997	0,0599	0,3798	0,3199
0,8	0,6354	0,0093	0,3131	0,3223
0,9	0,5712	0,0657	0,2527	0,3185
1,0	0,5083	0,1108	0,1988	0,3096
1,1	0,4476	0,1457	0,1510	0,2967
1,2	0,3899	0,1716	0,1091	0,2807
1,3	0,3355	0,1897	0,0729	0,2626
1,4	0,2849	0,2011	0,0419	0,2430
1,5	0,2384	0,2068	0,0158	0,2226
1,6	0,1959	0,2077	0,0059	0,2018
1,7	0,1576	0,2037	0,0235	0,1812
1,8	0,1234	0,1935	0,0376	0,1610
1,9	0,0932	0,1809	0,0484	0,1415
2,0	0,0667	0,1734	0,0563	0,1230
2,1	0,0439	0,1675	0,0618	0,1037
2,2	0,0244	0,1648	0,0652	0,0895
2,3	0,0080	0,166	0,0668	0,0748
2,4	0,0056	0,1282	0,0669	0,0613
2,5	0,0166	0,1149	0,0658	0,0492
2,6	0,0254	0,1019	0,0636	0,0383
2,7	0,0320	0,0895	0,0608	0,0287
2,8	0,0369	0,0777	0,0573	0,0204
2,9	0,0453	0,0666	0,0534	0,0232
3,0	0,0423	0,0563	0,0493	0,0170
3,1	0,0431	0,0469	0,0450	0,0109
3,2	0,0431	0,0383	0,0407	0,0024
3,3	0,0422	0,0306	0,0364	0,0058
3,4	0,0408	0,0237	0,0323	0,0085
3,5	0,0389	0,0177	0,0283	0,0006
3,6	0,0366	0,0124	0,0245	0,0121
3,7	0,0341	0,0079	0,0210	0,0137
3,8	0,0314	0,0040	0,0177	0,0137
3,9	0,0286	0,0008	0,0147	0,0140
4,0	0,0258	0,0019	0,0120	0,0139
4,1	0,0231	0,0040	0,0095	0,0136
4,2	0,0204	0,0057	0,0074	0,0131
4,3	0,0179	0,0070	0,0054	0,0125
4,4	0,0155	0,0079	0,0038	0,0117
4,5	0,0132	0,0085	0,0023	0,0108
4,6	0,0111	0,0089	0,0011	0,0100
4,7	0,0092	0,0090	0,0001	0,0091
4,8	0,0075	0,0089	0,0007	0,0082
4,9	0,0059	0,0087	0,0014	0,0073
5,0	0,0046	0,0084	0,0019	0,0065
5,1	0,0033	0,0080	0,0023	0,0057
5,2	0,0023	0,0075	0,0026	0,0049
5,3	0,0014	0,0069	0,0028	0,0042
5,4	0,0006	0,0064	0,0029	0,0035
5,5	+0,0000	0,0058	0,0029	0,0029
5,6	0,0005	0,0052	0,0029	0,0023
5,7	0,0010	0,0046	0,0028	0,0018

VJEKOSLAV MARENDIĆ

CALCUL DE LA POUTRE CONTINUE SUR APPUIS LARGES ÉLASTIQUES

R é s u m é

La statique des poutres considère les appuis comme étant des points. Ces appuis par points se réalisent, dans certains cas, par l'application des corps spéciaux tandis que l'état de tension dans ces poutres est défini par le calcul des valeurs des grandeurs statiques (poutres de ponts à longue portée, etc.).

En pratique, les poutres sont appuyées sur des supports (colonnes, murs) qui ont une largeur plus ou moins grande. Lorsque cette largeur est petite, c'est à dire lorsque la largeur d'appui est petite par rapport à la travée, on peut appliquer les résultats obtenus dans l'hypothèse des appuis par points. En augmentant cette largeur d'appuis, les grandeurs statiques diffèrent de plus en plus de celles obtenues en mettant en valeur l'hypothèse des appuis par points. La conséquence en est que les résultats obtenus dans ce dernier cas deviennent complètement inutilisables. Dans la pratique on traite, en général, ces poutres en déterminant les valeurs statiques par expérience et par intuition et en utilisant des coefficients variés. Il n'est pas rare de constater par la suite dans de telles poutres des défauts qui sont dus à l'estimation erronée des grandeurs statiques.

Le problème des poutres à larges appuis n'a pas été traité à fond dans les ouvrages spécialisés. Autant que l'auteur de cet ouvrage a pu le constater, le premier qui s'en est occupé en 1912 a été H. M a r c u s. Il a étudié la poutre à une travée, avec un et deux appuis larges. En soulignant qu'il est impossible de présenter une méthode générale pour la solution de ce problème, il développe dans chaque cas particulier des équations différentielles pour la partie de la poutre se trouvant sur l'appui, ainsi que pour la partie située entre les appuis.

En 1921. K. H a y a s h i traite le problème d'une poutre symétrique à une travée sur deux larges appuis et soumise symétriquement à une force s'exerçant en son milieu.

M. H e t é n y i donne également une solution pour une poutre symétrique sur deux appuis, soumise symétriquement à une force s'exerçant en son milieu et à une charge uniformément répartie sur la longueur de la travée.

K. Jäger traite le problème d'une poutre dont le nombre des appuis est infini, soumise à des charges égales et symétriques sur chaque travée.

Comme on peut le constater tous ces auteurs offrent des solutions pour certains cas particuliers.

Le présent ouvrage offre une solution générale pour une poutre continue aux appuis larges, par l'introduction de *l'équation des six moments* qui permet le calcul de n'importe quelle poutre à charge arbitraire. Cette équation peut être établie pour chaque bord d'appui et on tire $2n-2$ équations; grâce auxquelles nous pouvons calculer les moments inconnus au bord des appuis.

L'hypothèse émise par Winkler en 1867. a servi de base à ce calcul. Elle a été utilisée par tous les auteurs mentionnés. C'est l'hypothèse de la proportionnalité des flèches et des charges. Ultérieurement cette hypothèse a été soumise à une critique sévère, surtout dans les cas de son application aux problèmes liés au sol naturel, et c'est pour cela qu'on a fait intervenir des nouvelles considérations basées sur les principes de la théorie de l'élasticité. Cependant la supposition de Winkler n'a pas pu être rejetée, car elle est, d'une part, la plus simple du point de vue mathématique et, d'autre part, elle donne des résultats tout à fait acceptables, qui, dans certains domaines de son application, sont même exacts. Pour faciliter la formulation numérique des équations nécessaires et pour utiliser plus aisément les différentes expressions et formules des tables spéciales ont été élaborées, donnant les valeurs des fonctions les plus utilisées. Pour une poutre continue à travées multiples, avec charge uniforme, des diagrammes ont été conçus de telle façon qu'on peut y trouver directement les valeurs de tous les moments, ce qui est d'une grande importance pour l'application pratique.

L I T E R A T U R A

1. H. Marcus: Statische Untersuchung von einfachen und durchlaufenden Trägern mit elastischen Stützflächen — Der Eisenbau No. 1, 2, 1912.
2. K. Hayashi: Theorie des Trägers auf elastischer Unterlage — Berlin, 1921.
3. M. Hetényi: Beams on elastic foundation — London, 1946.
4. K. Jäger: Die Verteilung der Biegemomente und Stützdrücke in durchlaufenden Balken mit grösserer Auflagerlänge — Beton und Stahlbetonbau, Heft 5/6, 1943.
5. S. Timoshenko: Résistance des matériaux — Paris, 1949.
6. R. Kašanin: Viša matematika — Beograd, 1949.
7. J. Hlitičijev: Poglavlja iz teorije elastičnosti — Beograd, 1948.
8. Филопенко-Бородич: Сопротивление материялов — Москва, 1957.
9. Б. Н. Жемочкин: Теория упругости — Москва, 1957.
10. G. Jemte: Rechnerische Erfassung der Setzungen am Balken auf elastischer Bettung — Die Bautechnik, Heft 1, 1959.
11. С. Тимошенко: История науки о сопротивлении материялов — Москва, 1957.
12. С. Бернштейн: Очерки по истории строительной механики — Москва, 1957.