



Baština Akademije nauka i umjetnosti Bosne i Hercegovine

Uticaj krutosti, kontinuiteta i diskontinuiteta na proračun konstrukcija oslonjenih na elastično tlo

Krsmanović, Dušan

1958.

Akademija nauka i umjetnosti Bosne i Hercegovine

<https://bastina.anubih.ba/items/e73bfe30-58ac-4536-9761-bd3fd3d68352>

Preuzeto s Baštine Akademije nauka i umjetnosti Bosne i Hercegovine

<https://bastina.anubih.ba/>

NAUČNO DRUŠTVO NR BOSNE I HERCEGOVINE

DJELA

KNJ. XI

ODJELJENJE PRIVREDNO-TEHNIČKIH NAUKA

KNJ. 2

DUŠAN KRSMANOVIĆ

**UTICAJ KRUTOSTI, KONTINUITETA
I DISKONTINUITETA NA PRORAČUN
KONSTRUKCIJA OSLONJENIH
NA ELASTIČNO TLO**

SARAJEVO

1958

NAUČNO DRUŠTVO NR BOSNE I HERCEGOVINE

DJELA

KNJ. XI

ODJELJENJE PRIVREDNO-TEHNIČKIH NAUKA

KNJ. 2

DUŠAN KRSMANOVIĆ

UTICAJ KRUTOSTI, KONTINUITETA
I DISKONTINUITETA NA PRORAČUN
KONSTRUKCIJA OSLONJENIH
NA ELASTIČNO TLO



SARAJEVO

1958

Urednik
JULIJE HAHAMOVIĆ,
dopisni član Naučnog društva NR B i H



S A D R Ž A J

	Strana
UVOD	5
I. DEO	
<i>A). Istoriski pregled razvoja problema</i>	7
1) Metode rešavanja problema kad je tlo okarakterisano koeficijentom krutosti	7
2) Metode rešavanja problema u slučaju kad se tlo tretira kao elastičan, homogen i izotropan poluprostor	8
3) Metode rešavanja problema u slučaju kad se tlo tretira kao elastičan, homogen i anizotropan poluprostor	9
4) Metode rešavanja problema kad se tlo tretira kao elastičan ali hete- rogen i anizotropan poluprostor	9
<i>B). Postavljanje problema</i>	10
II. DEO	
KONTINUALNE TEMELJNE TRAKE I UTICAJ KRUTOSTI NA PRORAČUN KONSTRUKCIJA	15
<i>POGLAVLJE A).</i>	16
UTICAJ KONTINUITETA I KRUTOSTI NA PRORAČUN KONTINUALNIH KONSTRUKCIJA TEMELJNIH TRAKA	16
<i>I. Način rešavanja problema</i>	16
1) Uticaj krutosti	16
2) Osnovne pretpostavke	20
3) Principi proračuna	20
<i>II. Analiza mogućih slučajeva</i>	27
1) Slučaj I.	27
2) Slučaj II.	27
3) Slučaj III.	30
4) Slučaj IV.	30
5) Uticaj za vreme konsolidacije	31
6) Uticaj tečine temelja i stubova	31
<i>POGLAVLJE B).</i>	32
METODA PRORAČUNA KONTINUALNIH TEMELJNIH TRAKA	32
1) Način računanja kontinualne temeljne trake kad je I_k jednako nuli	32
2) Način računanja kontinualnih temeljnih traka kad se uzima da je krutost gornje konstrukcije objekta beskonačna, $I_k \rightarrow \infty$	32



	Strana
3) Prednosti i nedostaci metode računanja raspodele pritiska podelom kontinualnog sistema na osnovne	35
4) Opis toka operacija	36
5) Brojni primeri	40
a) Proračun kontinualne trake kada je $I_k = 0$	41
b) Proračun kontinualne trake kad I_k teži beskonačnosti	45
c) Proračun kontinualne trake kad je I_k promenljivo, a I_k ima konstantnu krutost	54

POGLAVLJE C).

UTICAJ POJEDINIH PARAMETARA NA VELIČINU UTICAJA USLED RAZLIKA OSLONAČKIH SILA	54
1) Uticaj krutosti sistema S_t na pojavu i veličinu uticaja usled razlika osloničkih sila	55
2) Uticaj promene modula deformacija tla, E_s	59
3) Uticaj veličine raspona konzola	67
4) Uslovi za iščezavanje momenta M_t° i M_k° u konstrukciji	67

III. DEO

DISKONTINUALNE TRAKE I UTICAJ KRUTOSTI NA PRORAČUN KONSTRUKCIJA

A). <i>O diskontinualnim trakama uopšte</i>	75
1) Objašnjenje pojma diskontinualne trake	75
2) Kakve promene u tlu i konstrukciji izaziva diskontinualna traka	77
B). <i>Proračun diskontinualnih traka</i>	77
I. <i>Srednje polje diskontinualnih traka</i>	78
II. <i>Krajnje polje diskontinualnih traka</i>	82
1) Nalaženje raspodele p_k^1	86
2) Nalaženje raspodele p_{sk}^1	87
3) Ispravljanje raspodele p_k^1	87
C). <i>Uticaj krutosti kod srednjeg polja diskontinualnih traka</i>	87
1) Dijagrami za proračun momenata savijanja	87
2) Poređenje temelja samca sa elementom nevezane diskontinualne trake	92
3) Aproksimacija sa parabolom 2 stepena	93
D). <i>Uticaj krutosti kod krajnjeg polja diskontinualnih traka</i>	96
E). <i>Uticaj krutosti u poljima do krajnjih kod diskontinualnih traka</i>	99

IV. DEO

Poređenje kontinualnih i diskontinualnih traka	102
--	-----

V. DEO

Zaključci	105
Rezime	108
Bibliografija	109

U V O D

Pri računanju konstrukcija oslonjenih na tlo obično se pretpostavlja:

a) da je konstrukcija izrađena od elastičnog, homogenog i izotropnog materijala.

b) da je poluprstor kontinuum koji može da se okarakterise ili koeficijentom krutosti, K , ili modulom deformacija, E_s i Poasonovim brojem μ ;

Takve pretpostavke u pogledu osobina konstrukcije mogu da se usvoje, ali u pogledu osobina poluprostora treba ukazati na izvesne činjenice.

Ako se poluprstor posmatra kao kontinuum okarakterisan sa koeficijentom krutosti, tada se pretpostavlja:

a) da su sleganja proporcionalna pritiscima;

b) da se pritisci prenose u poluprstoru samo na deo koji se nalazi ispod opterećene površine;

c) da je koeficijent krutosti konstantan.

Tla na koje oslanjamo objekte, međutim, imaju znatnu otpornost na smicanje, te za njih ne važe pretpostavke pod a) i b), a pošto su pritisci koji mogu da se jave ispod konstrukcija različiti, a različite su i veličine površina koje konstrukcijama opterećujemo, menja se i vrednost koeficijenta krutosti, te ne ostaje u važnosti ni pretpostavka pod c).

Da bi se ti nedostaci uklonili, određuju se u najnovije vreme vrednosti koeficijenta krutosti za izvesno tlo u zavisnosti od vrste konstrukcije, načina opterećenja i veličine opterećene površine (Ref. 20).

Ako se poluprstor posmatra kao kontinuum koji je elastičan, homogen i izotropan, pritisci proizvedeni na površini poluprostora šire se u poluprstoru na veće površine. Eksperimentima je ustanovljeno (Ref. 12) da se rasprostiranje tih pritisaka vrši na sličan način u nekim vrstama tla kao i u elastičnom, homogenom i izotropnom poluprstoru.

S druge strane je takođe ustanovljeno da se tla, u izvesnim granicama, ponajviše pod opterećenjem jedanput kao materijali koji su elastični, homogeni i izotropni, drugi put kao heterogeni i anizotropni, a ponekad i kao materijali homogeni i anizotropni.

Imajući sve ovo u vidu, dolazi se do zaključka da tretiranje poluprostora kao sredine okarakterisane koeficijentom krutosti treba napuštati.



Međutim, metode rada sa modulom deformacija znatno su komplikovanije i teže za primenu od metoda sa koeficijentom krutosti; osim toga, metode rada sa koeficijentom krutosti mnogo su ranije uvedene u tehničku literaturu, bolje su razrađene, te se i danas čine pokušaji od strane mnogih autora da se te metode rada prilagode potrebama prakse. Da bismo se približili bolje stvarnosti, potrebno je stoga tretirati konstrukcije oslonjene na tlo kao da se one oslanjaju na poluprostor koji je okarakterisan modulom deformacija i Poasonovim brojem.

Stoga će u razmatranjima koja slede biti smatrano da su konstrukcije izradene iz materijala koji je elastičan, homogen i izotropan, a poluprostor će biti tretiran kao beskonačan homogen i izotropan kontinuum. Pritom će konstrukcija i poluprostor biti tretirani kao jedna povezana celina.



I. DEO

A) ISTORISKI PREGLED RAZVOJA PROBLEMA

1) METODE REŠAVANJA PROBLEMA KAD JE TLO OKARAKTERISANO KOEFICIJENTOM KRUTOSTI

Problem konstrukcije oslonjene na „elastičnu posteljicu“ prvi je posmatrao E. Vinkler, – (Winkler E.) koji je objavio taj svoj rad u knjizi „Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit“, I deo, Prag, 1867. Autor je razmatrao problem beskonačnog kontinualnog nosača opterećenog silama i oslonjenog na poluprstor. Pritom je poluprstor smatran kao sredina u kojoj su sleganja proporcionalna pritiscima, tj. usvojeno je da su sleganja, s , vezana sa pritiscima, p , odnosom,

$$K = \frac{p}{s}, \text{ odnosno } p = K \cdot s \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (1)$$

gde je K koeficijent krutosti, koeficijent posteljice.

Oslanjajući se na rad Vinklera, I. V. Švedler, – (I. W. Schwedler) objavljuje 1881 godine rad „Discussion on Iron Permanent Way“ u kome tretira i daje rešenja za konačnu gredu, opterećenu dvema silama.

Sa te dve rasprave uvodi se u teoriju konstrukcija poznata metoda Vinkler-Švedlerova, koju dalje za razne slučajeve razrađuju razni autori. Tako napr. *problematiku nosača oslonjenih na tlo* tretiraju u dugom nizu godina:

- H. Cimerman, – (H. Zimmermann), – 1888, u radu „Berechnung des Eisenbahnoberbaues“ – analitički obrađuje problem gornjeg stroja željeznica,
- O. K. Frelih, – (O. K. Fröhlich), – 1912, u radu „Berechnung der Fundamenten unter Berücksichtigung der Elastizität des Baugrundes“ – prvi praktično primenjuje ovu metodu proračuna pri građenju jednog objekta,
- K. Hajaši, – (K. Hayashi), – 1921, u radu „Theorie des Trägers auf elastischer Unterlage und Ihre Anwendung auf den Tiefbau“, – razvija teoriju nosača na elastičnoj podlozi i daje njegovu primenu kod dubokih građenja.

P. Pasternak, — (P. Pasternak), — 1926, u radu „Die baustatische Theorie biegefesten Balken und Platten auf elastischer Unterlage“ — tretira problem krutih nosača oslonjenih na elastičnu podlogu.

E. P. Popov, — (E. P. Popov), — 1950, (Ref. 16) daje metodu sukcesivne aproksimacije za računanje nosača oslonjenih na tlo.

Osim navedenih autora još i drugi se bave tim problemom i to: A. Frojnd, — (A. Freund), — 1917, Bicceno, — (Biezeno), — 1923, K. von Sandn i F. Šljaher, — (K. von Sanden und F. Schleicher), — 1926, E. Hvala, — (E. Chwalla), — 1927, itd.

1946 godine objavio je M. Hetenji, — (M. Hetenyi), — rad u kome je sistematski obrađena problematika nosača oslonjenog na elastičnu podlogu (Ref. 11).

Na sličan, odgovarajući, način *problematiku ploča oslonjenih na tlo* obrađuju:

Dr. Leve, — (Lewe), — 1923, (Ref. 13) tretira gljivastu ploču oslonjenu na tlo,

F. Šljaher, — (F. Schleicher), — 1926, u delu „Über Kreisplatten auf elastischer Unterlage“ — daje rešenje kružne ploče oslonjene na elastičnu podlogu,

P. Nemenji, — (P. Nemenyi), — 1928, (Ref. 14) teoriski obrađuje kontinualnu traku na elastičnoj podlozi.

Svojevremeno E. Vinkler nije dao nikakvo fizičko značenje koeficijentu krutosti, K , nego je samo smatrao da je taj koeficijent konstanta za određenu vrstu tla. Kasnijim ispitivanjima se međutim ustanovilo da K nije konstantno nego da opada ukoliko površina opterećenja raste [E. Engeser, — (E. Engeser), — 1893]. Engeserovo se tvrđenje pokazalo kao tačno kasnijim upoređenjima sleganja, računatih na bazi koeficijenata krutosti i modula elastičnosti (Frelj, — Frölich, 1935, Ref. 9). Dalje je ustanovljeno da zakon izražen jednačinom (1) odgovara u stvari čvrstom telu koje pliva na tečnosti i da se ne može primeniti na materijale koji imaju izvesno unutrašnje trenje, a među koje spada i tlo.

2) METODE REŠAVANJA PROBLEMA U SLUČAJU KAD SE TLO TRETIRA KAO ELASTIČAN, HOMOGEN I IZOTROPAN POLUPROSTOR

Zbog navedenih nedostataka metoda sa koeficijentom krutosti, trebalo je tražiti nov način interpretiranja problema na drugoj osnovi. Pošto izvesne vrste tla mogu da se smatraju homogenim i izotropnim, to se pokušalo da se dođe do rešenja problema koristeći teoriju elastičnosti.

Polazeći od problema Businesska (J. Boussinesq, 1885) razni autori su pokušali da nađu matematička rešenja za pojedine slučajeve. Jedni traže izlaza u pojednostavljenju problema, drugi pristupaju rešavanju po strogoj teoriji. Tako, F. Šljaher, 1926, — (Ref. 18) daje jedan prilog teoriji osobina tla u kome ukazuje na načine proračuna sleganja kod elastičnog homogenog i izotropnog poluprostora,

O.K. Frelih, 1934, — (Ref. 8) objavljuje iscrpnu studiju o raspodeli pritisaka u tlu,

K. Volf, — (K. Wolf), 1935, — (Ref. 22) objavljuje rad o rasprostiranju sile u poluprostoru kod anizotropnog materijala,

H. Borovika, — (H. Borowicka), 1936, — (Ref. 2) daje matematičko rešenje za pločasti okrugli fundament opterećen jednako podeljenim opterećenjem,

M.A. Bio, — (M.A. Biot), — 1937, (Ref. 1) rešava po strogoj teoriji problem beskonačnog nosača na elastičnom, homogenom i izotropnom poluprostoru,

H. Borovika, 1938, (Ref. 3), daje matematičko rešenje po strogoj teoriji za beskonačnu pločastu traku opterećenu jednako podeljenim opterećenjem,

A. Habel, — (A. Habel), — 1938, (Ref. 10) daje aproksimativnu metodu za računanje nosača oslonjenih na elastičan, homogen i izotropan poluprostor,

E.E. De Ber, (De Beer) 1948, (Ref. 4) tretira problem fundamenta samca kao grede i daje predlog za aproksimativno rešenje, koje bi se moglo primeniti u praksi.

E.E. De Ber i D. Krsmanović, 1951, 1952, — (Ref. 6) razmatraju problem samca opterećenog podeljenim opterećenjem, beskonačne trake opterećene koncentrisanim silama na jednakom razmaku i problem ekscentrično opterećenog samca.

3) METODE REŠAVANJA PROBLEMA U SLUČAJU KAD SE TLO TRETIRA KAO ELASTIČAN, HOMOGEN I ANIZOTROPAN POLUPROSTOR

S obzirom da se anizotropija javlja kod mnogih zemljanih materijala u njihovim prirodnim ležištima, rađeno je i u tom pravcu. Uspelo se delimično.

U tom smislu otpočeo je ispitivanja takvog poluprostora K. Volf (K. Wolf), 1935, (Ref. 22) tretirajući materijale sa odnosom modula deformacije u horizontalnom i vertikalnom pravcu.

1948 je De Ber dao (Ref. 4) za matematički formulisan zakon promene modula deformacija od vrednosti E_v i vrednosti E_h , kao i vezu za ovaj slučaj između broja n (odnos modula deformacija u horizontalnom i vertikalnom pravcu) i faktora koncentracije koji je uveo Frelih. Pomoću tog poređenja moguće je uzeti u obzir dejstvo anizotropije ako nam je poznat odnos n .

4) METODE REŠAVANJA PROBLEMA KAD SE TLO TRETIRA KAO ELASTIČAN ALI HETEROGEN I ANIZOTROPAN POLUPROSTOR

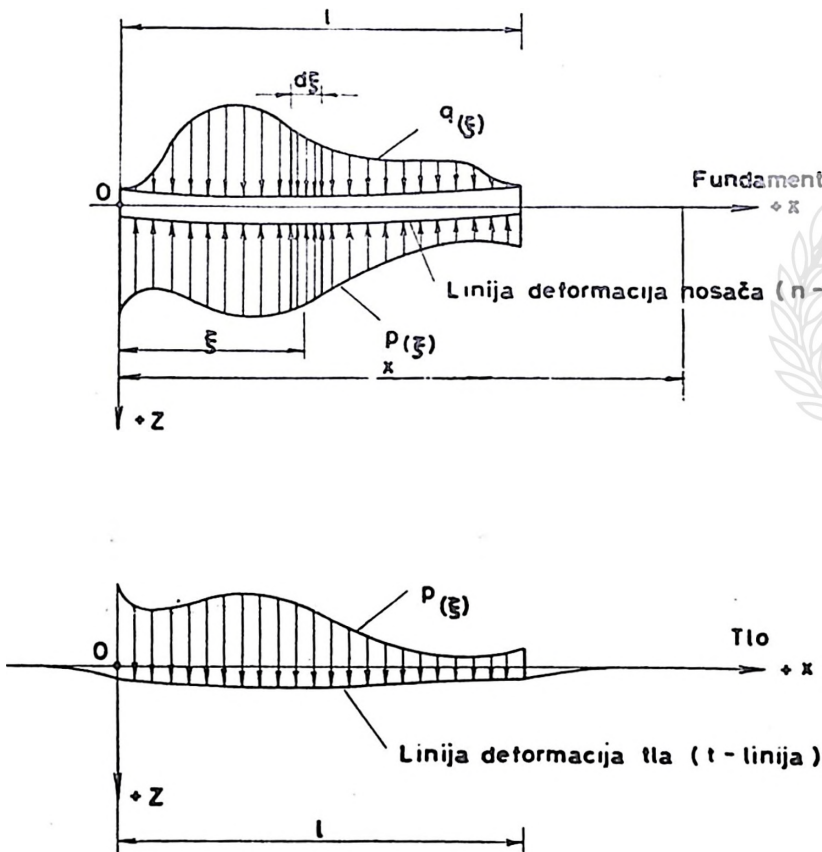
Ovakav poluprostor tretirao je 1932 godine K. Bajsman (K. Buisman) »Drukverdeeling in Bouwgrond in verband met ongelijke samendrukbaarheid in horizontale en vertikale richting.« Polazeći od odnosa modula deformacija

u horizontalnom i vertikalnom pravcu, Bajsman postavlja korelaciju između n i faktora koncentracije za unapred usvojenu zakonitost promene modula deformacija u zavisnosti od nagiba pravca prema horizontali. Na taj način svodi problem heterogenog i anizotropnog materijala samo na promenu faktora koncentracije. Pritom daje fizičko značenje faktoru koncentracije koje kod Freliha nije bilo dato.

B/ POSTAVLJANJE PROBLEMA

Pretpostavimo da je fundament položen na elastično, homogeno i izotropno tlo. Ako je opterećen odozdo nekim opterećenjem q_{ξ} , on će biti izložen i odozdo pritiscima p_{ξ} , koji će se javiti na kontaktnoj površini.

Te pritiske na kontaktnoj površini zvaćemo *raspodelom pritisaka*.



Sl. 1

Ako je određena priroda funkcija raspodele pritisaka $p(\xi)$ (vidi sliku 1), neće biti nikakvih teškoća da se nađu sve ostale potrebne statičke veličine, kao i naprezanja u fundamentu.

Pošto fundament pritiskuje tlo i pošto se pretpostavlja da između fundamenta i tla mora da postoji na celoj dužini prislan kontakt, izvesna raspodela pritisaka će se javiti duž celog fundamenta. Uslovi ravnoteže zahtevaju da mora biti u svakoj tački kontaktne površine akcija jednaka reakciji; linija raspodele pritisaka u preseku koja deluje na fundament prema gore mora biti identično jednaka liniji raspodele pritisaka koja deluje na tlo u pravcu prema dole. Stoga se linija sleganja tla pod dejstvom raspodele $p(\xi)$ mora u potpunosti poklapati sa elastičnom linijom fundamenta, opterećenog istom raspodelom.

Pošto će ovde biti reči isključivo o nosaču položenom na tlo, to treba poći od diferencijalne jednačine elastične linije nosača koja za taj slučaj glasi:

$$\frac{d^2 s}{dx^2} = \frac{M}{E_b I} \dots \dots \dots /2/$$

Dvostrukim diferenciranjem ove jednačine dobivamo diferencijalnu jednačinu nosača u zavisnosti od opterećenja $q_0(\xi)$, koja glasi,

$$E_b \cdot I \cdot \frac{d^4 s}{dx^4} = b[q_0(\xi) - p_0(\xi)] \dots \dots \dots /3/$$

pri čemu je

$$p(\xi) = p_0(\xi) \cdot b \text{ i } q(\xi) = q_0(\xi) \cdot b.$$

Ako $p_0(\xi)$ u jednačini /3/ izrazimo u zavisnosti od sleganja, (jednačina 1) i uvrstimo izraz za $p_0(\xi)$ u jednačinu /3/ i rešimo diferencijalnu jednačinu, dobićemo zavisnost između s i x , tj. matematički izraz za elastičnu liniju nosača opterećenog opterećenjem $q_0(\xi)$.

Postepenim diferenciranjem dobivene jednačine elastične linije dobivamo onda jednačine za momente, transverzalne sile i naposljetku za opterećenje. Time je problem rešen.

Kako se, međutim, izražava veza između pritisaka i sleganja?

Ako usvojimo metodu sa koeficijentom krutosti, onda veza data jednačinom (1).

$$p_0(\xi) = K \cdot s_0(\xi) \dots \dots \dots (1)$$

Uvrštavajući izraz za p iz jednačine (1) u jednačinu (3) dobijamo

$$\frac{d^4 s}{dx^4} = \frac{b[q_0(\xi) - K s_0(\xi)]}{E_b \cdot I} \dots \dots \dots (4)$$

Opšti integral jednačine (4) je poznat i prema tome zadatak može biti rešen.

Ako se, međutim, posmatra nosač položen na elastično, homogeno i izotropno tlo, problem je komplikovaniji.

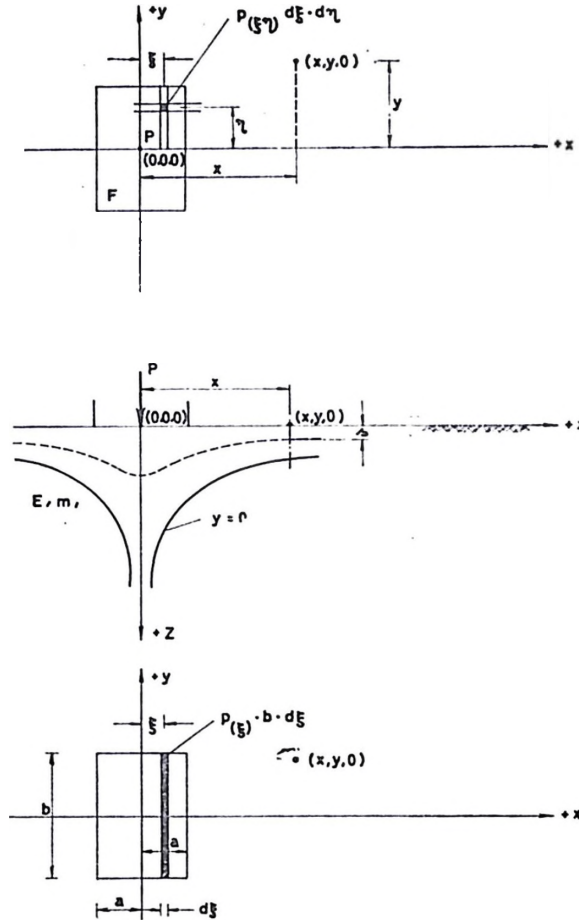
Ako jedna koncentrisana sila P deluje u prostornom koordinatnom sistemu x, y, z u tački sa koordinatama (o, o, o) sleganje jedne proizvoljne

tačke na površini takvog poluprostora sa koordinatama (x, y, o) u pravcu z osovine (vidi sliku 2) dato je, po Busnesku, izrazom,

$$s(x, y, o) = \frac{m^2 - 1}{m^2} \cdot \frac{p}{\pi \cdot E} \cdot \frac{1}{r} \dots \dots \dots (5)$$

gde je,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Sl. 2

Ako imamo izvesnu ograničenu površinu opterećenu podeljenim opterećenjem $p(\xi, \eta)$, možemo dobiti sleganje tačke (x, y, o) integracijom svih pojedinačnih sila intenziteta,

$$p = p(\xi, \eta) \cdot d\xi d\eta$$

Tada će biti r dato izrazom,

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$$

a sleganje je jednako,

$$s_{(x,y,o)} = \frac{1}{\pi \cdot C} \cdot \int_F \int \frac{P_{(\xi, \eta)}}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} d\xi \cdot d\eta \cdot \dots \cdot (6)$$

gde je, $C = \frac{m^2 \cdot E}{m^2 - 1}$, a F površina na koju se opterećenje rasprostire.

U slučaju kad je širina opterećene površine konstantna i jednaka b biće,

$$s_{(x,y,o)} = \frac{b}{\pi \cdot c} \cdot \int_{-a}^{+a} \frac{P_{(\xi)}}{\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}} \cdot d\xi \cdot \dots \cdot (7)$$

pri čemu je,

$$p = p_{(\xi)} \cdot b d\xi; r = \sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}.$$

Pošto nas pri rešavanju problema često zanimaju veličine sleganja duž osovine x , to ćemo imati dalje da je,

$$s_{x,o,o} = \frac{b}{\pi \cdot c} \int_{-a}^{+a} \frac{p_{(\xi)}}{x-\xi} d\xi \cdot \dots \cdot (8)$$

gde je,

$$r = x - \xi$$

Izraz (8) prtestavlja zavisnost sleganja od opterećenja $p_{(\xi)}$.

Iz jednačine (8) potrebno je izraziti $p_{(\xi)}$, uvrstiti ga u jednačinu (3), rešiti tu diferencijalnu jednačinu i dobiti zavisnost između s i x , tj. matematički izraz za elastičnu liniju nosača. Zatim se diferenciranjem jednačine elastične linije dobiva postepeno jednačina za momente, transverzalne sile i naposljetku za opterećenje, čime je problem rešen.

Međutim, rešenje problema ovim čisto matematičkim putem je vrlo komplikovano, zahteva obimnu matematičku aparaturu i stavlja teškoće koje su često neprebrodive.

Ovim putem uspeo je do danas da se reše samo neki jedostavniji slučajevi i to:

Kružni fundament opterećen jednako podeljenim opterećenjem (H. Borovika, 1936, Ref. 2)

Beskonačni nosač položen na horizontalan poluprstor (M. A. Bio, 1937, Ref. 1)

Beskonačna pločasta traka opterećena jednako podeljenim opterećenjem i položena na poluprstor. (H. Borovika, 1938, Ref. 3).

Za druge slučajeve, za koje se nije uspeo da dâ ovakvo matematičko rešenje, uvedene su razne druge približne metode rada, koje omogućavaju rešavanje pojedinačnih slučajeva sa dovoljno tačnosti.



Umesto da se traži matematički izraz za elastičnu liniju i liniju raspodele pritisaka p , zahteva se da se nađe raspodela pritisaka koja u jednom ograničenom broju tačaka u potpunosti zadovoljava uslove poklapanja deformacija fundamenta i tla.

Takav jedan način rešavanja problema približnom metodom dao je A. Habel, 1938, (Ref. 10) rešavajući diferencijalnu jednačinu nosača pomoću jednačina diferencija, a jednačinu sleganja tla pomoću jednačina suma.

Deljenjem nosača na n jednakih delova može da se napiše n linearnih jednačina diferencija sa n nepoznatih vrednosti intenziteta p i n nepoznatih sleganja s . Nepoznate vrednosti s mogu se izraziti pomoću jednačina suma, uvrstiti te vrednosti u jednačine diferencija i dobiti sistem od n linearnih nehomogenih jednačina čije rešenje daje nepoznate intenzitete opterećenja p , tj. raspodelu pritisaka.

Kod metode koja će ovde biti korišćena za određivanje raspodele pritisaka nosač se deli takođe na izvestan broj jednakih lamela; zatim se u sredinama lamela stavljaju jedinična opterećenja i to jedanput na nosač — prema gore — i jedanput na tlo — prema dole — i nalaze njihovi jedinični uticaji. Iz uslova da sleganja u izabranim tačkama (u sredinama lamela) moraju da budu jednaka i za nosač i za tlo dobija se sistem od onoliko linearnih jednačina na koliko smo lamela podelili nosač. Rešavanjem sistema linearnih jednačina dobivaju se onda intenziteti raspodele ispod pojedinih lamela i sa njima i linija raspodele pritisaka.



II DEO

KONTINUALNE TEMELJNE TRAKE I UTICAJ
KRUTOSTI NA PRORAČUN KONSTRUKCIJA

Pre nego što se pređe na rešavanje kontinualnih traka, potrebno je ustanoviti:

a) Kada je dozvoljeno posmatrati jedan temelj kao nosač (liniski sistem), a kada je potrebno preći na tretiranje ploče (površinski sistem), tj. za koji najmanji odnos dužine fundamenta L prema širini fundamenta B imamo dovoljno opravdanja da problem tretiramo kao liniski, a od kog odnosa L/B kao površinski sistem.

b) U kojoj meri, — u zavisnosti od odnosa L/B , — mogu da se jave promene u intenzitetu raspodele pritisaka u poprečnom pravcu i kakav je njihov uticaj na proračun temeljnog nosača.

Ovim problemom se bavio De Ber (Ref. 7, 1955). Ispitujući fundament samac De Ber je pošao od odnosa $L/B=4$ (Slika 4a). Nalazeći raspodelu pritisaka, jedanput deleći osnovu temelja na kvadrate i uzimajući da je raspodela pritisaka u poprečnom pravcu promenljiva, i drugi put deleći temelj na trake duž cele širine B i pretpostavljajući da je raspodela pritisaka u poprečnom pravcu jednako podeljena, dobio je razlike koje se pojavljuju u konačnim rezultatima. Tim ispitivanjima ustanovio je da se raspodela pritisaka znatno menja u poprečnom pravcu, naročito za velike vrednosti I_r . Ali prosečna vrednost pritisaka u poprečnom pravcu vrlo se malo razlikuje od pritiska koji se dobija pod pretpostavkom da je raspodela u poprečnom pravcu konstantna. Prema tome, *moгуće je zanemariti promene intenziteta raspodele u poprečnom pravcu*, ukoliko nema nekih naročitih razloga da se to ne čini.

Idući dalje De Ber je izvršio ispitivanja sličnih nosača samaca i sa drugim odnosima L/B . Ispitao je slučaj $L/B=3$ i $L/B=2$. I u tim slučajevima konstatovao je da se konačni rezultati po jednoj ili drugoj metodi (deleći temelj na kvadrate ili trake) vrlo malo međusobno razlikuju.

Radi ilustracije navodimo rezultate dobijene za slučaj krutog nosača sa odnosom $L/B=2$. U dva razna slučaja ti pritisci iznose:

Srednja vrednost poprečne raspodele	Raspodela kad poprečne varijacije pritisaka nisu uzimane u obzir
Lamela a 2,369 kg/cm ²	2,405 kg/cm ²
„ b 0,718 „	0,703 „
„ c 1,001 „	1,015 „
„ d 0,908 „	0,876 „

Na osnovu ovih i još nekih drugih ispitivanja De Ber je ustanovio:

a) da prema ispitivanim primerima raspodela pritisaka u poprečnom pravcu daleko odstupa od ravnomerne.

b) Ipak, pri svem tom, postoji vrlo dobro slaganje u rezultatima između srednjih vrednosti poprečnih pritisaka raspodele i rezultata koji se dobiju sa ravnomerno raspodeljenim pritiscima u poprečnom pravcu.

Prema tome, poznavanje promena poprečne raspodele je nepotrebno ili suvišno za onu primenu u kojoj je dovoljno da se sračunaju samo srednje vrednosti pritisaka u poprečnom pravcu

Usvajajući ove konstatacije De Bera, mi ćemo se ograničiti na ispitivanje samo sa ravnomernim raspodelama pritisaka u poprečnom pravcu.

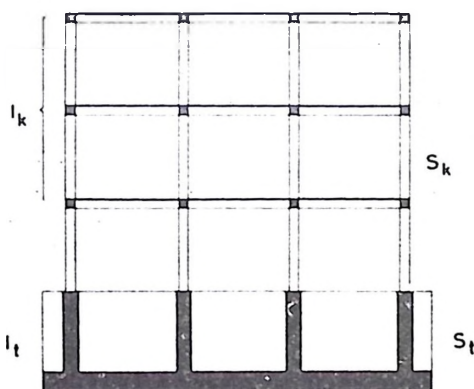
POGLAVLJE A

UTICAJ KONTINUITETA I KRUTOSTI NA PRORAČUN KONTINUALNIH KONSTRUKCIJA I KONTINUALNIH TEMELJNIH TRAKA

I. NAČIN REŠAVANJA PROBLEMA

1) UTICAJ KRUTOSTI

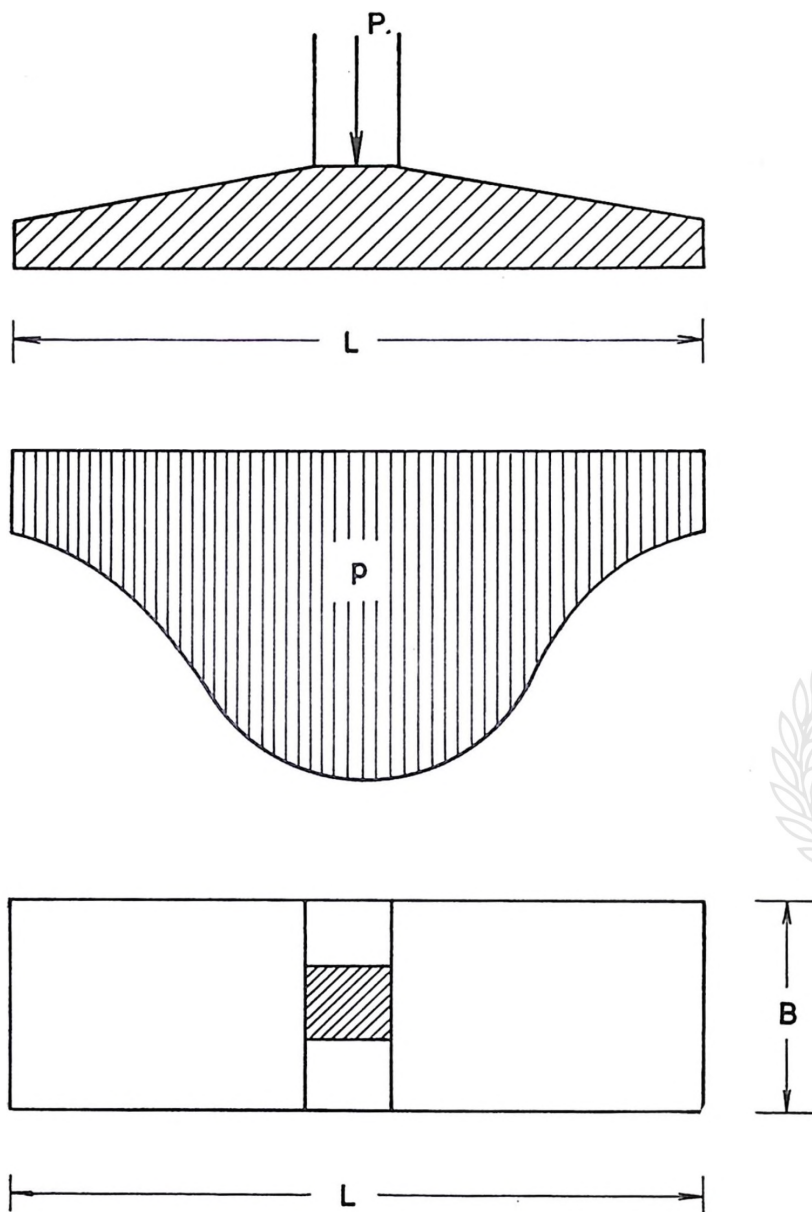
Krutost gornje konstrukcije jednog objekta (I_k) i krutost konstrukcije temelja (I_t) utiču na način prenošenja pritisaka sa konstrukcije temelja na tlo. Pritom, u zavisnosti od statičkog sistema (S_k) gornje konstrukcije



Sistem S_k predstavlja jedna ramovska konstrukcija, ili ma kakva druga konstrukcija, a sistem S_t je kontinuirana traka, ili ma kakav drugi kontinuirani sistem

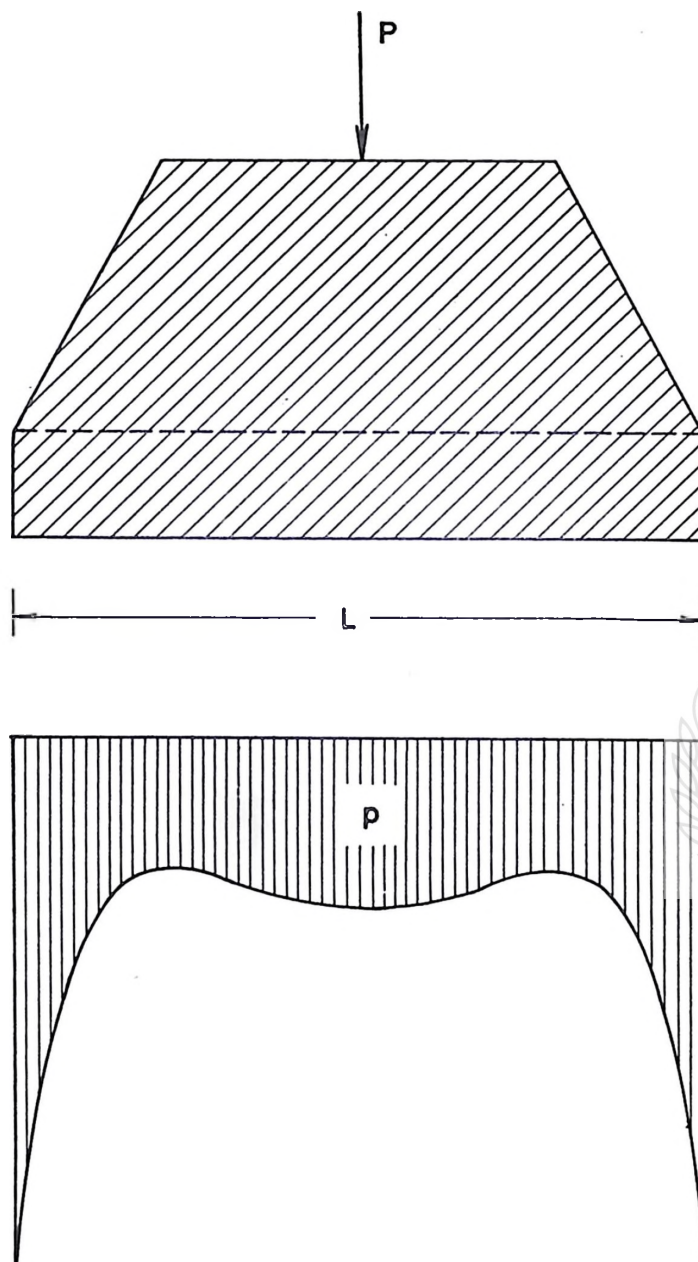
Sl. 3

i sistema (S_t) temeljnih nosača kao i načina njihovog povezivanja, jedni ili drugi mogu da igraju više ili manje važnu ulogu u načinu raspodele pritisaka na kontaknoj površini između donje površine temelja i tla (Sl. 3).



Raspodela pritiska na kontaktu temelj - tlo u slučaju savitljivog temelja samca

Sl. 4a



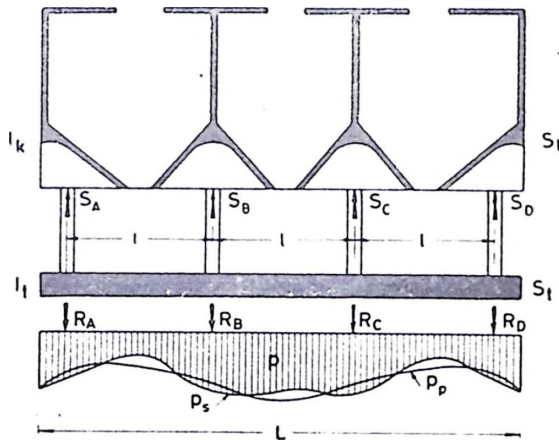
Raspodela pritisaka na kontaktu temelj-tlo u slučaju krutog temelja samca.

Sl. 4b

Posmatrajući temelj samac, možemo razlikovati dva slučaja. Ili je temelj savitljiv, pod dejstvom opterećenja odozgo, ili je krut. U prvom slučaju linija raspodele opterećenja na kontaktnoj površini je takva da se oko srednjeg dela temelja samca koncentrišu veći pritisci, a na krajevima manji. U drugom slučaju je obratno, pritisci su na krajevima znatno veći od pritiska oko sredine temeljnog nosača (sl. 4a i 4b).

Na isti način kao temelj samac može da se posmatra i ceo objekat sa njegovom gornjom konstrukcijom S_k povezanom stubovima sa konstrukcijom temelja S_f . Tada prema Ref. 6 treba razlikovati kod posmatranja ovog problema dva činioca koji mogu da utiču na oblik linije raspodele opterećenja.

Neka je dat slučaj na slici 5, kod koga je dužina L znatno veća od širine B , gde L i B predstavljaju dužinu odnosno širinu objekta. Pošto objekat kao celina, zajedno sa sistemom temeljnih nosača, ima svoju



Primarna i sekundarna raspodela pritisaka u slučaju kad je sistem S_f male krutosti u odnosu na raspon l

Sl. 5

određenu krutost, to će on postavljen na tlo izazvati svojom težinom i opterećenjem pojavu izvesne raspodele pritiska p_p . Temeljni nosač, međutim, ima svoju krutost koja će moći, u izvesnim slučajevima, da dođe do izražaja u poljima raspona l . Usled toga će se povećati pritisci oko stubova S , a smanjiti oko sredina između njih. Stoga treba razlikovati (Ref. 6):

a) primarnu raspodelu p_p koja potiče od zajedničkog dejstva krutosti gornje konstrukcije i temeljnog nosača kad posmatramo objekat u celini,

b) sekundarnu raspodelu p_s koja potiče od povijanja samog temeljnog nosača, i to od sekundarnih povijanja koja se odigravaju u poljima između pojedinih oslonaca gornje konstrukcije. Pri tom se intenziteti pritisaka u poljima temeljnog nosača smanjuju, a na osloncima povećavaju.

U slučajevima kad je temeljni nosač dovoljno krut, te razlike u liniji raspodele pritiska koje potiču od povijanja samog temeljnog nosača na rasponima / tako su male da se sekundarno talasanje može da zanemari.

2) OSNOVNE PRETPOSTAVKE

Da bismo mogli da ograničimo ispitivanja na uže područje i da bismo definisali uslove pod kojima su ova izlaganja u važnosti, usvajamo sledeće osnovne pretpostavke:

a) Predmet ispitivanja su kontinualne temeljne trake kod kojih je moguće pretpostaviti da je raspodela pritiska u poprečnom pravcu jednako podeljenog intenziteta, tj. to su takvi temeljni nosači kod kojih je dužina znatno ili nekoliko puta veća od širine;

b) Krutost sistema gornje konstrukcije S_k i donje konstrukcije S_f konstantna je celom dužinom objekta;

c) Materijali iz kojih su izrađene konstrukcije S_k i S_f imaju konstantne module elastičnosti;

d) Modul deformacija tla je konstantan;

Konsolidacija u tlu je već obavljena u potpunosti pod dejstvom opterećenja izazvanog izgradnjom objekta;

e) Plastične osobine betona, njegovo vremensko prilagodavanje i deformisanje pod opterećenjem (promene E_b sa vremenom) nisu uzeti u obzir;

f) Krutost sistema S_f u odnosu na tlo je takva da temeljni nosač ima na celoj površini prislan kontakt sa tlom, tj. da na celoj dužini naleže na tlo. S druge strane, razlike u deformacijama tla pod temeljnim nosačem su takve da su i sistem S_k i sistem S_f u stanju da ih prate bez štetnih posledica;

g) Pošto su vitkosti stubova u većini slučajeva male u odnosu na vrednosti I_k i I_f , u toku daljih ispitivanja neće biti vođeno računa o dejstvu uklještenja stubova u konstrukciju, nego će se smatrati kao da su oni povezani sa konstrukcijom putem zglobova;

h) Radi jednostavnosti biće tretirani samo simetrični sistemi konstrukcija i to simetrično opterećeni.

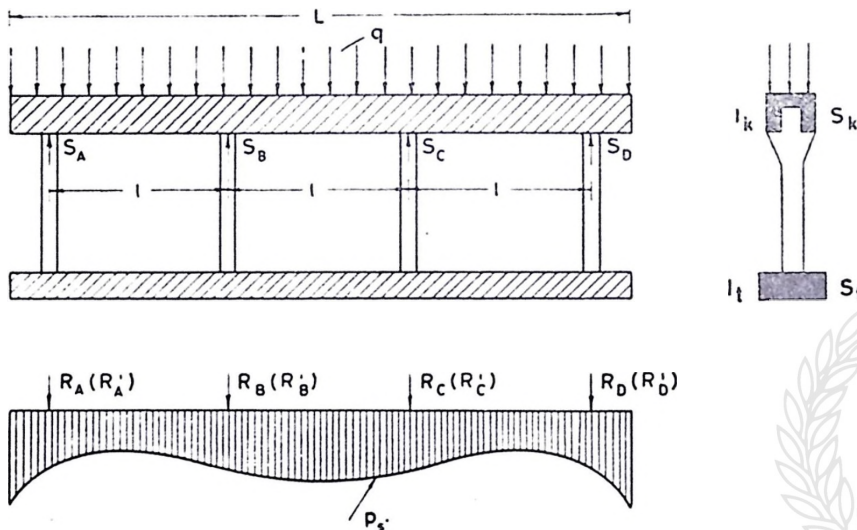
3) PRINCIPI PRORAČUNA

Kod proračuna konstrukcija oslonjenih na stišljivo tlo treba nastojati da se uvede ne samo uticaj sleganja objekta kao celine, nego da se uzme u obzir i dejstvo nejednakih sleganja pojedinih delova konstrukcije. Pritom je neophodno uvesti u proračun i stvarne raspodele koje se javljaju na kontaktnim površinama tla i konstrukcije. Tada, međutim, u tretiranju problema znatnu ulogu igraju krutost i kontinuitet konstrukcije bilo u sistemu S_k bilo u sistemu S_f .

Pri takvom tretiranju konstrukcija nije dovoljno samo izvršiti proračun konstrukcija odozgo prema dole, nego treba još ispitivati i naći uticaj i veličinu nejednakih sleganja pojedinih delova konstrukcije i u vezi sa njima uzeti u obzir promene u naprežanjima pojedinih elemenata konstrukcije.

Da se to postigne, moraju se posmatrati kao celina gornja konstrukcija S_k , konstrukcija temelja S_t , i sam stišljivi poluprostor na kome konstrukcija leži.

Pošto se problem u suštini svodi na kraju na određivanje sila u stubovima koji vežu obe konstrukcije, bilo bi najprirodnije odabrati te sile kao nepoznate veličine, pa direktno rešavati problem. To je, međutim, moguće zasada samo kod konstrukcija koje se mogu smatrati potpuno krutim. Kod savitljivih konstrukcija rešenje problema može se obaviti samo postupno izjednačavanjem ugiba u sistemu S_k sa ugibom u sistemu S_t .



Sistem kontinuirane konstrukcije oslonjene na tlo i opterećene jednako podeljenim opterećenjem q ; p_s predstavlja stvarnu liniju raspodele pritiska.

Sl. 6

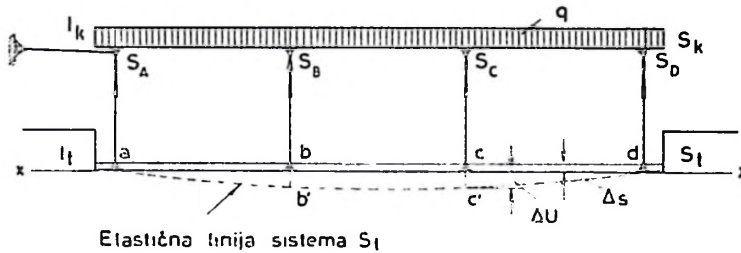
Razmotrimo način proračuna na primeru (slika 6). Sistemi S_k i S_t su kontinuirani; sistem S_k je opterećen jednako podeljenim opterećenjem q . Momente savijanja i poprečne sile u sistemu S_k računamo na uobičajeni način pod pretpostavkom da su svi oslonci međusobno nepomerljivi, odnosno, da se svi sležu istovremeno za istu veličinu. Pritom dobijamo izvesne vrednosti reakcija u stubovima S_A , S_B , S_C , i S_D . Kad ne postoje razlike u sleganjima oslonaca, taj proračun je konačan (prvi slučaj, slika 7a). Međutim, ako se oslonci različito sležu, reakcije u stubovima ispod sistema S_k će se promeniti. Razlike sleganja pojedinih oslonaca, koje zavise od načina opterećenja konstrukcije, krutosti sistema S_k i S_t , kao i od stišljivosti tla, treba proračunom odrediti.

Pretpostavimo da je na neki način određena raspodela pritiska p_s (sl. 6). Ako za tu raspodelu sračunamo reakcije R_A , R_B , R_C i R_D , one će se razlikovati od reakcija S_A , S_B , S_C i S_D (drugi slučaj, slika 7b).

Razlike sila R i S , koje deluju na pojedinim osloncima ispod stubova i koje su izražene sa:

$$\begin{aligned} \Delta A &= R_A - S_A, & \Delta C &= R_C - S_C \\ \Delta B &= R_B - S_B, & \Delta D &= R_D - S_D, \dots \dots \dots (15) \end{aligned}$$

savijaće sisteme S_k i S_t . U zavisnosti od linije ugibanja tla te će sile naprezati sisteme S_k i S_t pozitivno (+ linija) ili negativno (- linija), već prema rasporedu i veličini spoljnih sila kao i obliku osnove sisteme S_t (slika 7 d). Sistem sila Δ dat je shematički na slici 7c.

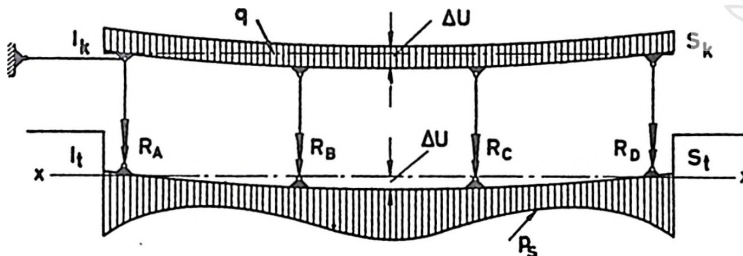


Elastična linija sistema S_t

Δs Steganje krajnih oslonaca
 ΔU Razlika steganja oslonaca

Prvi slučaj: Razlika u steganjima oslonaca jednaka nuli
 reakcije S_A S_B S_C S_D dobivene računom odozgo na niže

Sl. 7a



Drugi slučaj: Oba sistema su se povila pod dejstvom stalnog opterećenja q i stvarne raspodele R_s .

Sl. 7b

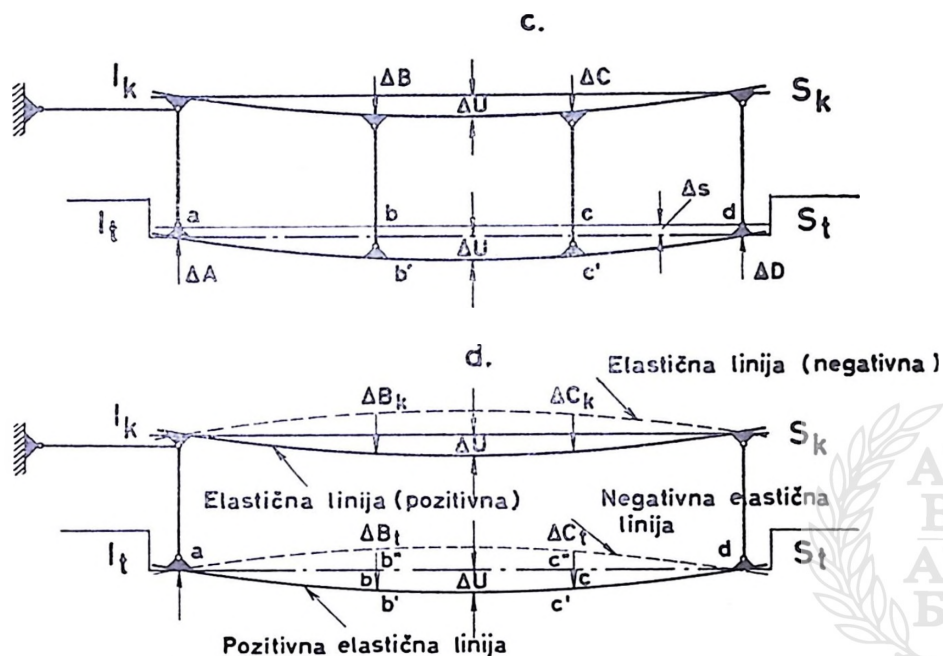
Kako će se sile Δ raspodeliti na pojedine sisteme, zavisi od odnosa njihovih krutosti, jer mora biti

$$\frac{I_k}{I} = \frac{\Delta B_k}{\Delta B}, \frac{I_t}{I} = \frac{\Delta B_t}{\Delta B}, \frac{I_k}{I} = \frac{\Delta C_k}{\Delta C}, \frac{I_t}{I} = \frac{\Delta C_t}{\Delta C}$$



Iz tih odnosa dobija se da se podela sila Δ vrši prema sledećem obrascu,

$$\frac{I_k}{I_t} = \frac{\Delta B_k}{\Delta B_t} = \frac{\Delta C_k}{\Delta C_t} \dots \dots \dots (16)$$



Podela sila Δ

Sl. 7 c, d,

U obrascima (16) veličine ΔB_t i ΔC_t , odnosno ΔB_k i ΔC_k su delov sila ΔB i ΔC koje prima sistem S_t odnosno S_k .

Pojava sila Δ zahteva da se kontinualni sistem S_t računa odozdo naviše kao nosač opterećen stvarnom raspodelom pritiska, uzimajući u obzir i dejstvo sila Δ_t .

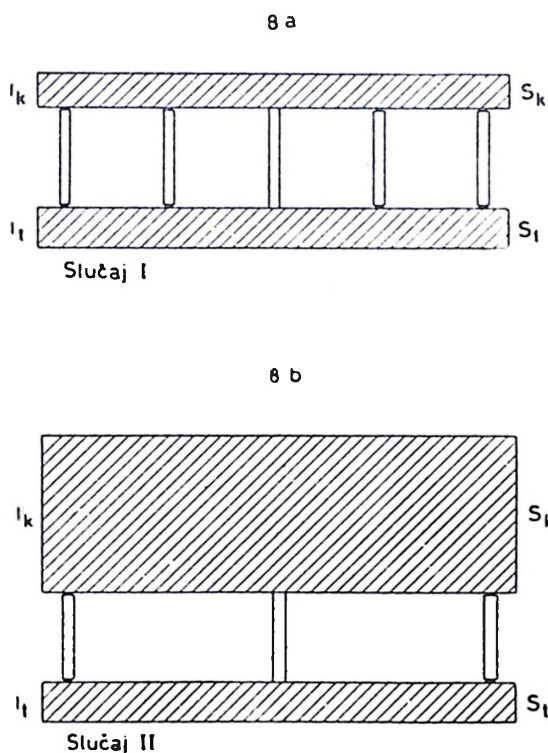
Za sistem S_k potrebno je naknadno izvršiti korigovanje proračuna opterećavajući ga silama Δ_k .

Prema tome, rešenje problema kod ovakvih konstrukcija svodi se na nalaženje stvarne raspodele pritiska ispod kontinualnog sistema S_t . U zavisnosti od krutosti pojedinih delova konstrukcija, ta se raspodela može naći na razne načine.

II. ANALIZA MOGUĆIH SLUČAJEVA

S obzirom na krutosti sistema S_k i S_t i njihov međusobni odnos možemo razlikovati četiri različita slučaja.

Pritom uvek smatramo da su oba sistema kontinualna, a ukoliko to nije slučaj, tj. ukoliko jedan ili drugi sistem, ili oba sistema, nemaju kontinuiteta, ti će slučajevi biti smatrani specijalnim. Tada će biti ili $I_k = 0$, ili $I_t = 0$, ili $I_k = 0$, $I_t = 0$ (vidi sl. 9).



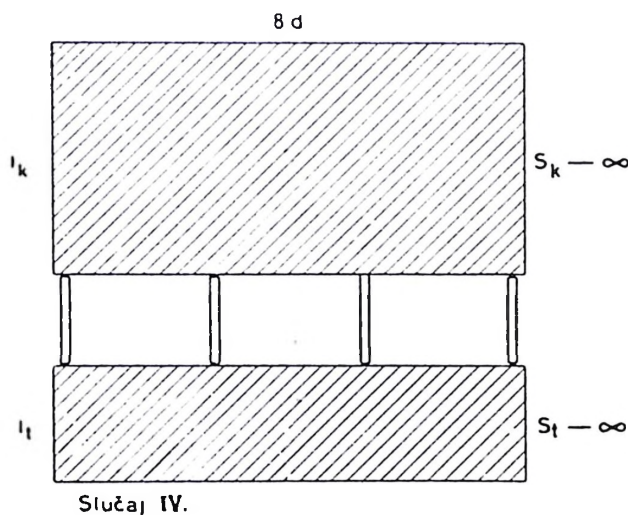
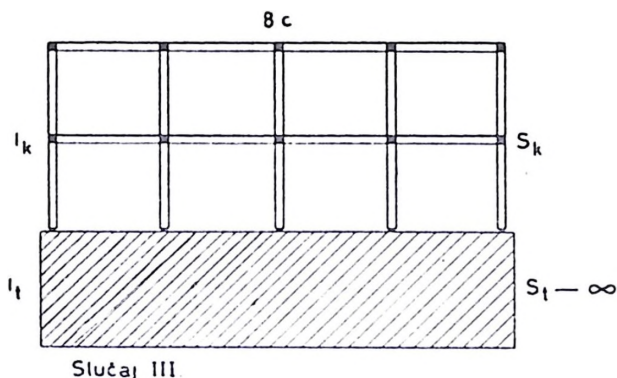
Sl. 8 a, b

- I Slučaj.* Krutosti oba sistema su male i vrednosti I_k i I_t su istog reda veličine (sl. 8a).
- II Slučaj.* Krutosti sistema S_k i S_t imaju različit red veličine i to: krutost sistema S_k je velika u odnosu na krutost sistema S_t , koja je mala (sl. 8b).



III Slučaj. Krutosti sistema S_k i S_t imaju različit red veličine i to: krutost sistema S_k je mala, a sistem S_t velika (sl. 8c).

IV Slučaj. Krutosti oba sistema su velike i vrednosti I_k i I_t su istog reda veličine (sl. 8d).



Sl. 8 c, d

1) SLUČAJ I.

Pošto su I_k i I_t mali to su, sistemi S_k i S_t u stanju da do izvesnih granica prate deformacije tla i da se deformišu onako kako to tlo zahteva, stavljajući pri tom izvesne relativno male otpore nejednolikim sleganjima tla ispod konstrukcije.

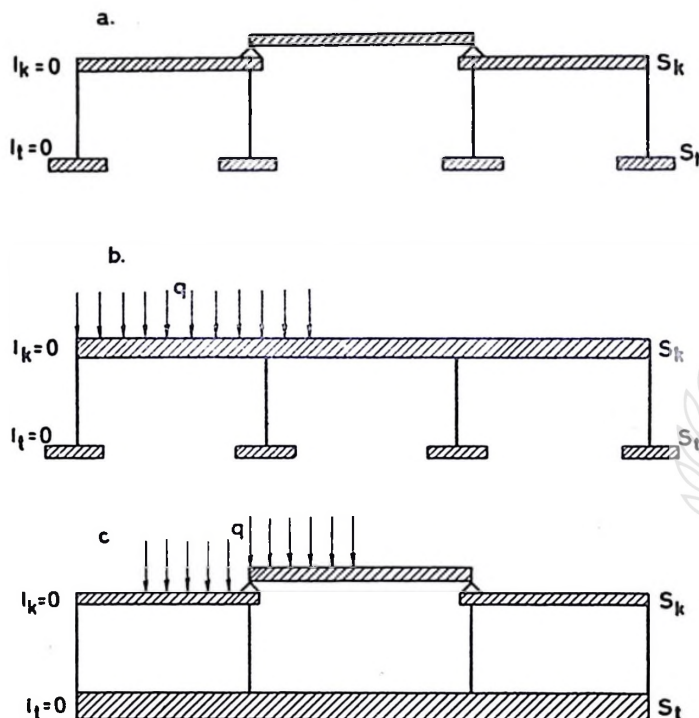
Za male razlike u sleganjima konstrukcija se deformiše uz izvesnu promenu naprezanja. Ako razlike postanu veće, dolazi do oštećenja konstrukcija.

Krutosti pojedinih sistema mogu toliko varirati da jedan od sistema ili i oba postanu diskontinualni (sl. 9). To su specijalni slučajevi.

Proračun ovakvih konstrukcija može se izvršiti na dva načina:

1) Ako je krutost sistema S_t toliko mala da je potrebno voditi računa o sekundarnom talasanju raspodele, proračun treba obaviti putem postupnog izjednačavanja ugiba sistema S_k i S_t na sledeći način:

Specijalni slučajevi kod slučaja I.



- a. Nema kontinuiteta ni u sistema S_k ni u sistemu S_t
 b. Nema kontinuiteta u sistemu S_k
 c. Nema kontinuiteta u sistemu S_t

Sl. 9

a) Pod pretpostavkom da je krutost sistema S_k jednaka nuli, [naći raspodelu pritisaka p (za sistem S_t sa krutosti I_t) metodom razlaganja kontinualnog sistema na osnovne. Istovremeno naći i razlike sleganja ΔU_t i sile R

b) Sračunati sile Δ i raspodeliti ih na oba sistema srazmerno njihovim krutostima, prema jednačinama 16

c) Opeteretiti sistem S_k silama Δ_k i naći razliku sleganja ΔU_k na sistemu S_k . Sa tom razlikom sleganja ΔU_k preći na sistem S_t i sračunati odgovarajuće razlike sleganja $\Delta U_{t,1}$

d) Operacije a) do c) ponoviti toliko puta dok se ne izjednače razlike u sleganjima $\Delta U_{k,n}$ i $\Delta U_{t,n}$

Koristeći metodu razlaganja kontinualnog sistema na osnovne sisteme, mogu se na vrlo lak način dobiti odgovarajuće vrednosti $\Delta U_{k,1}, \Delta U_{k,2}, \dots, \Delta U_{k,n}$. Potrebno je samo koristiti jednačinu sličnu onoj pod 18, vodeći računa o tome da razlike u sleganjima nisu jednake nuli, nego da imaju unapred određene vrednosti $\Delta U_{t,1}, \Delta U_{t,2}, \dots, \Delta U_{t,n}$ itd.

Na taj način može se izvršiti izravnjanje do tačnosti koja se zahteva.

2) Ako je krutost sistema S_t tolika da se mogu zanemariti sekundarna talasanja kod raspodele, proračun se može obaviti i naći linija raspodele usvajajući unapred da je krutost sistema S_t jednaka zbiru krutosti sistema S_k i S_t ,

$$I_t' = I_k + I_t$$

2) SLUČAJ II.

Objekat ima veliku krutost u sistemu S_k , koji uslovljava svojom krutošću, izjednačenje razlika u sleganjima ispod pojedinih stubova.

Tlo, većom ili manjom stišljivošću utiče uglavnom na veličinu apsolutnih sleganja objekta. U rasponima između pojedinih stubova javljaju se sekundarne promene u sleganjima i raspodeli onako kako to uslovljavaju tlo i krutost sistema S_t .

Pošto sistem S_k mora da izjednači sleganja svih oslonaca ispod stubova, on ima da izvrši izvesni napor.

Postavljanjem krute konstrukcije S_k na stubove, u sistemu S_t se odigravaju takođe promene.

Pretpostavimo da imamo konstrukciju datu prema slici 10.

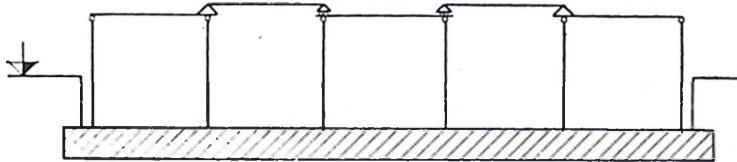
Kad sistem S_t ne bi bio opterećen i ne bi imao svoje težine, oslonci A do F bi ležali na pravoj liniji (sl. 10 a).

Ako opteretimo sistem S_t silama dobijenim računajući konstrukciju odozgo prema dole i to pod pretpostavkom da je krutost sistema S_k jednaka nuli, sistem S_t će se poviti i sleganja oslonaca A do F će biti nejednaka (sl. 10 b). Toj konstrukciji odgovara raspodela pritisaka p (sl. 10 c), a pomoću te raspodele moguće je naći i sile Δ , koje savijaju sistem S_t . Momentna površina koju dobijamo za sistem S_t , — kad je $I_k = 0$, — sastoji se od dva dela; iz dela površine koja se dobija usled opterećenja raspodelom p i iz dela koji se dobija usled razlika oslonačkih sila S i R (sile Δ).

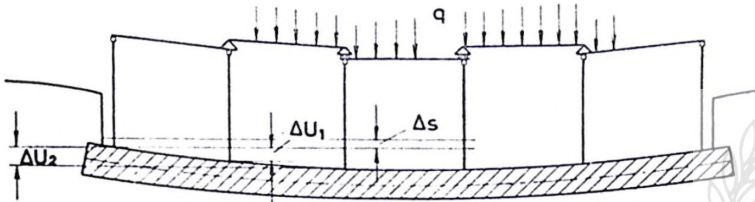
Drugi deo momentne površine može biti znatno veći od prvog dela, naročito u slučajevima kad je sistem S_t nepovoljno opterećen, kad je oslonjen na tlo malog modula deformacija, ili kad je sistem S_t jako krut ili nekonstruktivnog oblika.

Ovaj deo momentne površine se javlja usled razlika oslonačkih sila S i R i on ne postoji ako su ove sile međusobno jednake. Prema tome, treba težiti da se postigne takvo stanje da budu sile Δ u sistemu S_i jednake nuli.

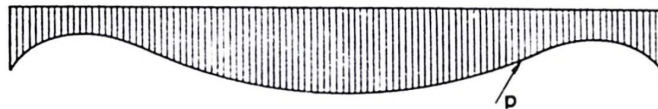
a Sistem S_i neopterećen



b Sistem S_i opterećen silama sistema S_k ali u slučaju kad je krutost sistema S_k jednaka nuli



c Stvarna raspodela pritisaka na kontaktnoj površini kad je krutost sistema S_k jednak nuli



Sl. 10

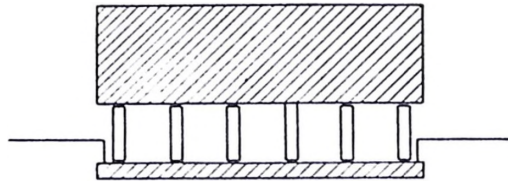
Pošto sile Δ predstavljaju razlike sila na osloncima sistema S_i , nazvaćemo ove uticaje *uticajima sistema S_i , koji potiču od razlika u oslonačkim silama*. Odgovarajuće momente označićemo sa M_i^o , a transverzalne sile sa T_i^o , (vidi obradene primere na slikama 25 do 33).

Ako, međutim, na sistem S_i sa $I_k = 0$ postavimo odozgo konstrukciju sa $I_k \rightarrow \infty$, menja se način opterećenja sistema S_i . Pošto je S_k krut, svi će se oslonci sleći za istu meru. Umesto raspodele p dobićemo raspodelu p' (sl. 11 b). Opterećenje sistema S_i menja se još i usled promena raspodele pritisaka.

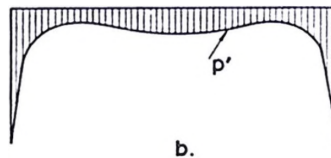
Sile Δ u sistemu S_i postaju jednake nuli, ali se javljaju sile Δ' (razlike sila S i R') na osloncima sistema S_k , koje sad savijaju taj sistem.

Sistem S_k oslobodio je svojom krutosti sistem S_r od razlika oslonačkih sila i on je sad preuzeo celokupnu razliku sila Δ , pošto je sistem S_r pretpostavljen kao sistem male krutosti.

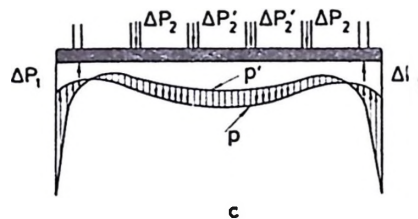
Ovi uticaji na sistemu S_k takođe potiču od razlika oslonačkih sila, te ćemo momente tih uticaja označiti sa M_k^o a transverzalne sile sa T_k^o , (vidi obrađene primere na slikama 25 do 33).



Shema konstrukcije sa krutim sistemom S_k



Stvarna raspodela pritiska na kontaktnoj površini kad krutost sistema S_k teži ka beskonačnosti



Razlike raspodela pritiska kojima je opterećen sistem S_r ; pritisci ΔP_1 deluju odozdo na više i pritisci ΔP_2 odozgo na niže

Sl. 11

Dosada su rasmatrana dva granična slučaja: slučaj sa $I_k=0$ i slučaj sa $I_k \rightarrow \infty$. U prvom slučaju javili su se uticaji usled razlika oslonačkih sila na sistemu S_r , a u drugom slučaju usled razlika tih sila na sistemu S_k . Ako, međutim, imamo ne granične slučajeve, nego slučaj kad I_k ima konačnu vrednost, ovi uticaji će se podeliti na oba sistema, kako je ranije i kod slučaja I objašnjeno.

Da bi se ilustrovalo uticaj postavljanja sistema S_k sa velikom krutosti na sistem S_r , prikazana je na odgovarajućim slikama i razlika momenata,

$M_1 - M_2 = M_t^k$, na sistemu S_t . Pritom još i površine koje zahvataju linije M_t^o i M_t^k (šrafirane površine na obradenim primerima, slike 27, 30 i 33) pretstavljaju uticaj promena raspodele p u p' , na sistemu S_t .

Proračun konstrukcije slučaja II može se izvršiti na sledeća dva načina:

1) Ako je sistem S_t dovoljno krut i mogu se zanemariti sekundarna talasanja, proračun konstrukcije sistema S_t se vrši samo nalaženjem linije raspodele pritiska koja odgovara raspodeli krutog temeljnog nosača.

2) Ako se žele da uzmu u obzir i sekundarna talasanja raspodele između stubova, potrebno je naći raspodelu p' , posmatrajući ceo sistem S_t kao kontinualni sistem preko niza polja. Ta se raspodela može da dobije i pomoću raspodele p na način koji će kasnije biti dat.

3) SLUČAJ III.

Krutost konstrukcije S_k može se u ovom slučaju zanemariti, jer je njezino dejstvo u odnosu na krutost sistema S_t vrlo malo. Može se smatrati da je sistem S_k u ovom slučaju za svako opterećenje obezbeđen od neravnomernih sleganja, jer sve neravnomernosti u sleganjima mora da primi na sebe sistem S_t . Dok je taj sistem neoštećen, ne mogu se javiti praktično nikakve promene u naponima u sistemu S_k .

U ovom slučaju sistem S_t diktira kako će da se sležu sve tačke tla i pošto je već po samoj pretpostavci sistem krut, sve će se tačke jednako slegati. Stišljivost tla određuje samo apsolutnu veličinu sleganja.

Računanje treba u ovom slučaju sprovesti na sledeći način:

- a) naći liniju raspodele za krut nosač sistema S_t ;
- b) izračunati potrebne statičke veličine u sistemu S_t smatrajući da je opterećen silama spoljnog opterećenja odozgo i opterećenjem linije raspodele odozdo.

Ukoliko sistem S_t ne može da se smatra potpuno krutim, treba u proračunu postupiti kao u slučaju II kad je $I_k = 0$, samo što praktično celokupne sile Δ prima na sebe sistem S_t .

4) SLUČAJ IV.

Oba sistema imaju neobično veliku krutost, približno istog reda veličine. Stoga se može smatrati da će razlike u sleganju pojedinih tačaka biti jednake nuli. Kao i u slučaju III i ovde osobine tla određuju apsolutne vrednosti sleganja objekta, a krutosti sistema S_k i S_t diktiraju da sleganja svih tačaka tla moraju biti jednaka.

Proračun jednog takvog sistema može se izvršiti sa dovoljno tačnosti, računajući konstrukciju odozgo prema dole, zatim nalazeći raspodelu opterećenja za kruti sistem S_t . Razlike sila u stubovima koje će se pojaviti kod ova dva načina računanja dade vrednosti sila Δ' , koje su potrebne za proračun.

Uticaji usled sila Δ' raspodeljuju se u ovom slučaju proporcionalno krutostima pojedinih sistema (jednačine 16).

5) UTICAJI ZA VREME KONSOLIDACIJE

Sva dosadašnja razmatranja odnose se na slučajeve kod kojih je konsolidacija izvršena u potpunosti, pošto su uvek dobijene vrednosti sleganja uzimane u punim iznosima, tj. pod pretpostavkom da su sleganja potpuno završena.

Ukoliko se mogu da pojave, iz ma kojih razloga, za vreme trajanja građenja ili konsolidacije opasnija naponska stanja u pojedinim delovima ma kog sistema, biće potrebno za ta prolazna naponska stanja izvršiti ispitivanja i ustanoviti te nepovoljnije uslove za konstrukciju.

6) UTICAJ TEŽINE TEMELJA I STUBOVA

Dosada su zanemarene težine stubova, i težine temelja. Težine stubova mogu se u većini slučajeva zanemariti, jer su male u odnosu na ostala opterećenja, ili ako to nije slučaj, treba ih uvesti u račun naknadno pri određivanju raspodele opterećenja. Težina temelja se može uzeti u obzir na dva načina:

a) Ako je *težina temelja relativno mala* (vitki temelji), može se uzeti u obzir samo pri proračunu apsolutnih vrednosti sleganja objekta, a zanemariti pri nalaženju linije raspodele pritiska, zanemarujući pritom i naprezanja koja se javljaju u samom sistemu S_i od sopstvene težine.

b) Ako je *težina temeljnih nosača relativno velika*, može se prvo posmatrati problem ne uzimajući težinu temelja u obzir i kasnije je zasebno uvesti u proračun.

Pošto je momenat inercije konstantan, pretpostavlja se da je i težina temeljnih nosača konstantna po celoj dužini, tj. treba posmatrati slučaj opterećenja nosača jednako podeljenim opterećenjem. Ako se vrši ispitivanje uticaja težine temelja posebno, znači da je njegova težina velika. Stoga se može u većini slučajeva smatrati takav temeljni nosač krutim. Za krut nosač opterećen jednako podeljenim opterećenjem dobijamo raspodelu koja odgovara krutom nosaču. Prema tome, naprezanja od sopstvene težine dobiće se ako se sistem S_i optereti odozgo još jednako podeljenim opterećenjem (sopstvena težina temelja) i odozdo raspodelom opterećenja za krut sistem S_i koja potiče od težine tog sistema.

U slučaju da se ne može da smatra temeljni sistem S_i krutim, treba postupiti na isti način kao kod slučaja III, s tom razlikom što ćemo imati kao opterećenje odozgo ravnomerno podeljen teret.

Konačna linija raspodele pritiska dobija se superponiranjem raspodele dobivene opterećenjem od sistema konstrukcije sa raspodelom dobivenom od sopstvene težine sistema S_i .

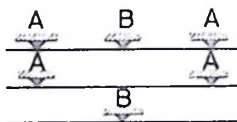
B POGLAVLJE

METODA PRORAČUNA KONTINUALNIH TEMELJNIH TRAKA

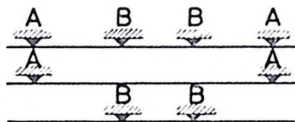
1) NAČIN RAČUNANJA KONTINUALNE TEMELJNE TRAKE KAD JE I_k JEDNAKO NULI

Pretpostavimo da je dat sistem S_1 u obliku kontinualnog nosača na 3 oslonca i sa prepustima. Taj kontinualni sistem može se rastaviti na dva osnovna sistema, koji će biti statički određeni; na gredu sa prepustima i na dvostruku konzolu (sl. 12a).

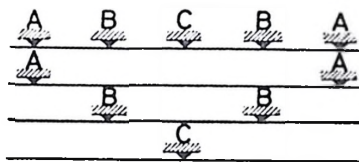
Rastavljanje kontinualnog sistema S_1 na osnovne – statički određene – sisteme



a. Nosač na 3 oslonca



b. Nosač na 4 oslonca



c. Nosač na 5 oslonaca

Sl. 12 a, b, c

Kod nosača sa 4 oslonca može se kontinualni sistem rastaviti na dve grede sa prepustima (sl. 12b).

U slučaju kad je kontinualni nosač oslonjen na 5 oslonaca rastavićemo sistem na tri statički određena sistema; dve grede sa prepustima i jednu dvostruku konzolu, prema slici 12 c. I tako dalje.



Metoda računanja sastoji se u tome da posmatrajući odvojeno do kraja osnovne, statički određene sisteme nađemo jedinične *uticajne raspodele pritiska* između sistema S_i i tla, za jedinične sile na osloncima.

Pošto je u važnosti zakon proporcionalnosti, dobijaju se prvo raspodele opterećenja za osnovne sisteme, množenjem intenziteta jedinačnih uticajnih raspodela sa intenzitetima stvarnih sila S . Zatim, superpozicijom dobijenih rezultata za osnovne sisteme mogu se dobiti stvarne raspodele pritiska ispod kontinualnog sistema S_i .

Kada je raspodela p ispod kontinualnog nosača određena, mogu se onda sračunati i sve ostale potrebne veličine:

a) Sile R se dobiju opterećujući sistem S_i raspodelom p i pretpostavljajući da je razlika u sleganjima oslonaca jednaka nuli. Kad su poznate sile R , sile Δ će se dobiti prema jednačinama (15).

b) Razlike u sleganjima oslonaca mogu se dobiti ili računajući sleganja tla opterećenog raspodelom p , ili nalaženjem elastične linije kontinualnog nosača sistema S_i opterećenog silama S i raspodelom p .

2) NAČIN RAČUNANJA KONTINUALNIH TEMELJNIH TRAKA KAD SE UZIMA DA JE KRUTOST GORNJE KONSTRUKCIJE OBJEKTA BESKONAČNA, $I_k \rightarrow \infty$

Način proračuna opisan u poglavlju pod 1. može se primeniti kada je:

a) krutost sistema S_k jednaka nuli (sistem S_k je statički određen sistem),

b) krutost sistema S_k u odnosu na krutost sistema S_i toliko je mala da se može zanemariti (slučaj III. Deo II A),

c) kad je moguće zanemariti sekundarna talasanja u raspodeli opterećenja između pojedinih stubova koji povezuju obe konstrukcije, tj. kad je krutost sistema S_i tolika da se sekundarna talasanja u raspodeli gotovo i ne osećaju. U tim slučajevima se može ceo proračun obaviti uzimajući odmah u račun ukupnu krutost oba sistema $I'_i = I_i + I_k$ (slučaj I. Deo II A).

Kad je, međutim, krutost sistema S_k jako velika (Slučajevi II i IV, Deo II A), potrebno je naći raspodelu pritiska p' pri kojoj će se svi oslonci slegati za istu meru, pošto se pretpostavlja da je sistem S_k krut.

Pretpostavimo da je sistem S_i opterećen nekim drugim simetričnim sistemom sila S' umesto sistemom S , uz uslov da mora biti,

$$\sum S' = \sum S \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (17)$$

Taj sistem sila S' treba tako odabrati da veličine ΔU budu jednake nuli, tj. da sleganja oslonaca s_A i s_B u našem primeru budu međusobno jednaka.

To se postiže—koristeći se dobijenim jediničnim uticajnim raspodelama za osnovne sisteme—na sledeći način:

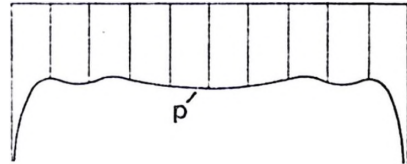
Veličine sila S'_A i S'_B treba odabrati tako da je zadovoljen uslov,

$$s_A^g + s_A^k = s_B + s_B^k \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (18)$$

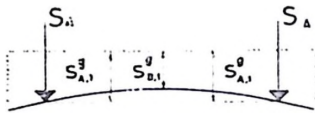
gde su s_A^g i s_B^g sleganja oslonaca da gredu sa prepustima i za opterećenje S'_A , a s_A^k i s_B^k sleganja oslonaca za dvostruku konzolu pod opterećenjem S'_B .

Ako se još uzme u obzir da su sleganja oslonaca A i B za jedinična opterećenja na gredi sa prepustima, $s_{A,1}^g$ i $s_{B,1}^g$, a na dvostrukoj konzoli $s_{A,1}^k$ i $s_{B,1}^k$, može se napisati jednačina (18) u obliku (vidi sliku 13),

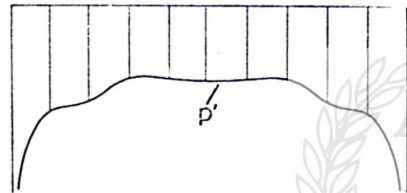
Raspodela p za slučaj nejednakih sleganja oslonaca



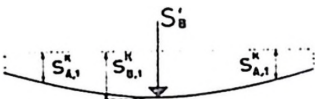
Greda sa prepustima



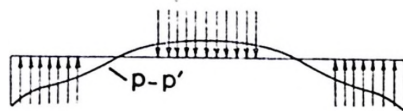
Raspodela p' za slučaj jednakih sleganja oslonaca



Dvostruka konzola



Razlika raspodela p i p'



Sl. 13

Sl. 14

$$s_{A,1}^g S'_A + s_{A,1}^k \cdot S'_B = s_{B,1}^g \cdot S'_A + s_{B,1}^k \cdot S'_B \quad \dots \quad (19)$$

pri čemu je

$$S'_A = S_A + \Delta B' / 2$$

$$S'_B = S_B - \Delta B' \quad \dots \quad (20)$$

Uvrštavanjem vrednosti iz jednačina (20) u jednačinu (19) dobija se jedna jednačina sa jednom nepoznatom.

Uvrštavanjem dobijene vrednosti $\Delta B'$ u jednačine (20) dobijaju se veličine S'_A i S'_B koje predstavljaju u datom slučaju sistem sila opterećenja pri kome će biti razlika u sleganjima oslonaca ΔU jednaka nuli.

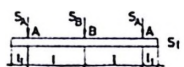
Ako nađene vrednosti sila S'_A i S'_B pomnožimo sa vrednostima odgovarajućih jediničnih uticajnih raspodela i izvršimo njihovu superpoziciju, dobićemo raspodelu p' (sl. 14).

Na sličan način može se postupiti i sa sistemima koji su oslonjeni na više polja, samo što će onda izjednačenje sleganja oslonaca zahtevati postavljanje (a-2) jednačina sličnih onoj pod (19), ako sa a označimo broj oslonaca.

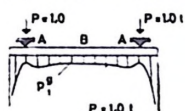
Ako za raspodelu p' sračunamo reakcije na osloncima, dobićemo veličine R' .

Razlika između sila S i R' daće nam sile Δ kojima će u slučaju II biti opterećen sistem S_k .

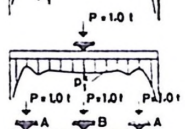
Tok operacija za proračun kontinualnog sistema S_1 preko dva polja



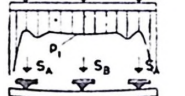
Sile S_A i S_B dobivene su računanjem konstrukcije odazgo na niže



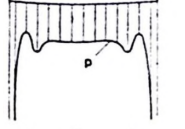
Linija raspodele opterećenja za gredu sa propustima raspodena 2i opterećena sa dve jedinične sile $2P = 2 \times 1.00t$. Δ_{A1}^g i Δ_{B1}^g su sleganja oslonaca A i B za jedinično opterećenje grede



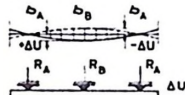
Linija raspodele opterećenja za dvostruku konzolu prepustila l_1 opterećenu sa $P = 1.00t$. Δ_{A1}^k i Δ_{B1}^k su sleganja oslonaca A i B za jedinično opterećenje konzole



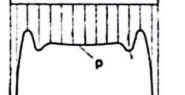
Superpozicijom je dobivena zbirna linija raspodele za jedinične sile na gredi i konzoli. Δ_{A1} i Δ_{B1} su sleganja oslonaca za jedinična opterećenja $P = 1.00t$



Množeci stvarne veličine sile S sa jediničnim raspodelama grede i konzole njihovim sabiranjem dobijamo stvarnu raspodelu opterećenja za kontinualnu temeljnu traku. Δ_A i Δ_B su sleganja oslonaca za to opterećenje. Vrednosti Δ_A i Δ_B nisu međusobno jednake i one daju razliku u sleganjima ΔU koja zavisi od krutosti temeljne trake elastičnih osobina ili E_A i veličina sile S . Razlika ΔU može biti jednaka nuli.



Elastična linija sistema S_1 može biti promatrano u celini povijena konkavnom stranom prema gore (ΔU pozitivno) ili prema dole (ΔU negativno). U specijalnom slučaju biće ΔU jednako nuli.

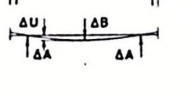


Dobivena linija raspodele p daće reakcije R_A i R_B u osloncima kontinualnog sistema S_1 . Reakcije R se razlikuju od sila S , ukoliko ΔU nije jednako nuli.

Ako je ΔU pozitivno biće $R_A < S_A$, $R_B > S_B$; i obratno.

Sada će biti $R_B = S_B - \Delta B$ i radi simetrije sistema $2\Delta A = \Delta B$; $R_A = S_A + \Delta A$

Ukoliko je ΔU negativno promenice se predznaci u ovim jednačinama.



Sile Δ savijaju nosač sistema S_1 . Te momente savijanja M_1^0 i transverzalne sile T_1^0 koji potiču od nejednakog sleganja oslonaca zovemo uticajima usled razlika oslonackih sila. Za ΔU pozitivno M_1^0 je pozitivno i obratno $M_1^0 = I \cdot \Delta A$ za tačku B.

Sl. 15

3) PREDNOSTI I NEDOSTACI METODE RAČUNANJA RASPODELE PODELOM KONTINUALNOG SISTEMA NA OSNOVNE

Prednosti koje imamo pri proračunu raspodela pritisaka kontinualnih sistema S_1 na opisani način su ove:

a) Ako se menjaju opterećenja sistema S_1 pomoću jediničnih uticajnih raspodela, mogu se dobiti vrlo lako raspodele i za sve druge načine opterećenja;

b) Kod proračuna konstrukcija za slučaj I koristimo se jediničnim uticajnim raspodelama pri postupku izjednačavanja, dobijajući vrlo brzo konačne rezultate, ma kakvu krutost imao sistem S_k ;

c) Postavljajući uslov jednakih sleganja oslonaca kod konstrukcija sa velikim I_k , može se vrlo brzo dobiti raspodela p'

d) Jednostavan je proračun ordinata elastičnih linija za statički određene proste sisteme.

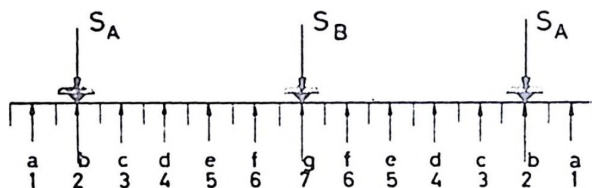
Nedostatak ovog načina računanja je taj što je potrebno postaviti i rešiti onoliko puta niz nehomogenih linearnih jednačina, na koliko smo osnovnih sistema rastavili dati kontinualni sistem.

Pošto je tok operacija pri proračunu vrlo dug, to je ceo redosled operacija radi lakšeg razumevanja dat i objašnjen na jednom jednostavnijem primeru (vidi tok operacija za kontinualni sistem, slika 15).

4) OPIS TOKA OPERACIJA

Pretpostavimo da je dat sistem S_1 kao kontinualna traka na 3 oslonca sa prepustima, opterećena nekim silama S_A i S_B (sl. 16). Podeljimo temeljnu traku na lamele i rastavimo je na osnovne sisteme, na gredu sa prepustima i na dvostruku konzulu.

Podela kontinualnog sistema S_1 na lamele



Sl. 16

Za podeljenu traku na lamele treba dalje naći s-liniju sa ordinatama u tačkama na otstojanju $b, 2b, 3b, \dots$ od ose simetrije kroz B, (sl. 17). Nalaženje ordinata s-linije za jednako podeljeno opterećenje q na lameli može se naći putem jednog od poznatih načina (Ref. 19, str. 382, Ref. 8).

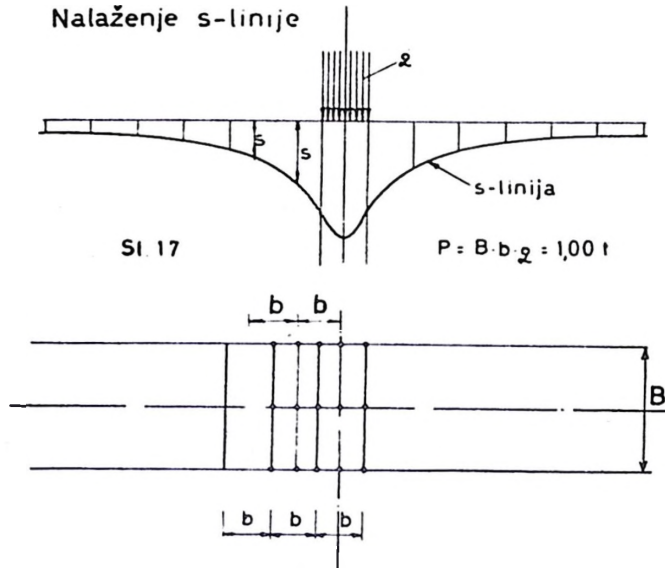
Pošto je traka podeljena na lamele, pretpostavimo da je raspodela data nepoznatim veličinama X'_1 do X'_n gde n označava broj lamela na polovini trake, a veličine X' nepoznate, jednako podeljene, intenzitete pritisaka raspodele (vidi sl. 18).

Opterećujući tlo parovima podeljenih opterećenja na odgovarajućim lamelama intenziteta,

$$q = \frac{1.00}{B.b}$$

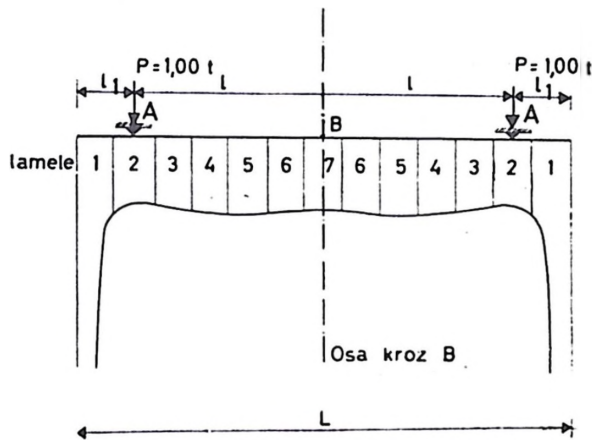
uz pomoć ordinata s-linije dobijaju se linije s_1 do s_n , (vidi sl. 19). Ordinate tih linija u sredinama lamela neka su $s_{1a}, s_{1b}, s_{1c}, \dots, s_{2a}, s_{2b}, s_{2c}, \dots, s_{na}, s_{nb}, s_{nc}, \dots$

Ako sada za gredu sa prepustima sračunamo u sredinama lamela ugibe η , za dejstvo parova podeljenih opterećenja q , dobiće se, u odnosu na liniju koja spaja oslonce, ordinate η_{1a} $\eta_{2a} \dots \eta_{1b}$, $\eta_{2b} \dots \eta_{1g}$, η_{2g}



Sl. 17

Linija raspodele ispod grede sa prepustima

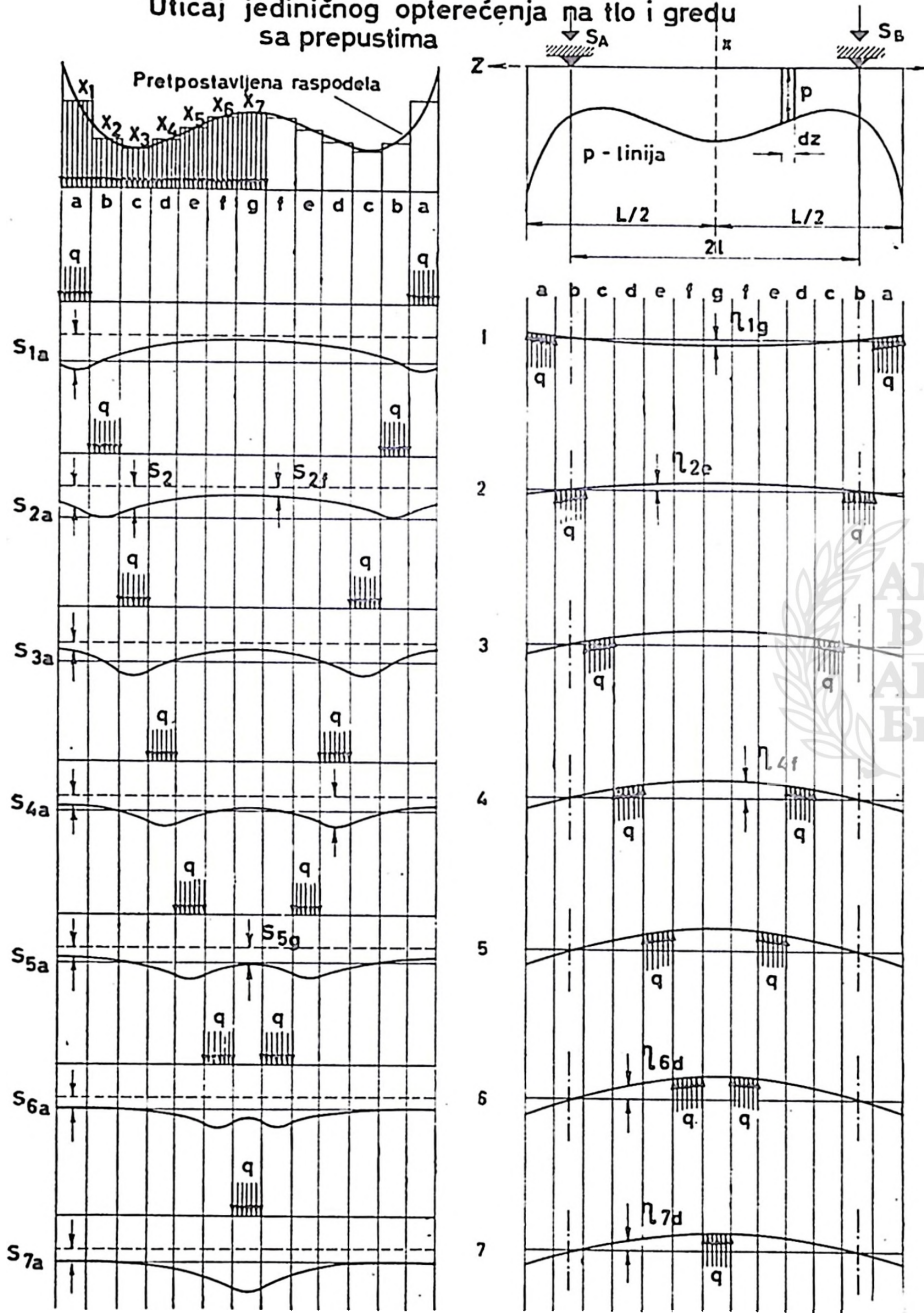


Sl. 18

Iz uslova da linija sleganja tla mora biti istog oblika kao i linija deformacija trake, može se dobiti niz od n nehomogenih linearnih jedna-



Uticaj jediničnog opterećenja na tlo i gredu sa preputima



Sl. 19



Kad su jednom dobijene jedinične uticajne raspodele za osnovne sisteme, raspodele p se dobijaju jednostavnim množenjem sila X^1 sa datim odgovarajućim silama osnovnog sistema S , a superpozicijom tih raspodela osnovnih sistema dobija se raspodela p .

5) BROJNI PRIMERI

Zadatak

a) Data je kontinualna temeljna traka na dva polja sa prepustima, — prema sl. 21, — položena na tlo koje ima konstantan modul deformacije. Potrebno je naći stvarnu raspodelu pritisaka ispod kontinualnog temeljnog nosača, a zatim izvršiti kontrolu proračuna nalaženjem linija deformacija tla i temeljne trake. Pretpostavimo da smo proračunom konstrukcije odozgo na niže dobili da je kontinualna temeljna traka opterećena silama 300—600—300 tona, kao i da je zasada I_k jednako nuli.

Zadate su još i sledeće veličine:

Modul deformacija betona temeljne trake:

$$E_b = 210.000 \text{ kg/cm}^2$$

Modul deformacija tla: $E_s = 1.000$ „

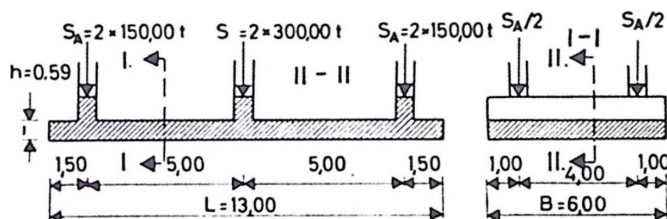
Moment inercije preseka temeljne trake koji po celoj dužini ostaje nepromenljiv (debljina ploče temelja 59 cm)

$$I = 0,108 \text{ m}^4$$

Deformacije temeljne ploče kao i neravnomernost raspodele u poprečnom pravcu mogu se zanemariti pri proračunu i proračun izvršiti kao da je traka liniska.

Brojni primer.

Dispozicija.



$$E_s = 1000 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_b = 210.000 \text{ kg/cm}^2$$

Sl. 21

Uticaj krutosti stubova na deformacije trake može da se zanemari. Isto tako se može smatrati da su poprečne trake koje vežu oslonce toliko krute da se mogu smatrati nesavitljivim (sl. 21).

b) Naći raspodelu pritiska ispod istog sistema S_t za slučaj kad se na taj sistem oslanja konstrukcija S_k kod koje I_k teži ∞ .

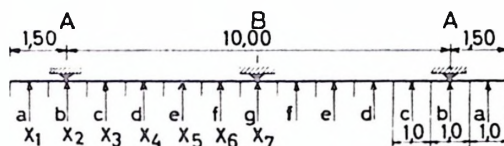
c) Ispitati slučaj kad je $I_t = 0,587 \text{ m}^4$ a I_k se menja od nule do izvesne konačne vrednosti.

PRORAČUN

a) PRORAČUN KONTINUALNE TRAKE KADA JE $I_k = 0$

Dati sistem podeljen je prema slici 22 na lamele. Za širinu lamela 1,00 m sračunate su ordinate s -linije i date na slici 23. Zatim su za tlo

Podela kontinualnog sistema S_t na lamele



Sl. 22

određene linije $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$, i za gredu sa prepustima nadene ordinate η (sl. 24). Postavljanjem i rešenjem jednačina (21) dobijena je jedinična uticajna raspodela, a množenjem dobijenih vrednosti X' sa silom $S_A = 300,00 \text{ t}$ dobijena je raspodela za gredu sa prepustima koja je data na sl. 25 (gore levo).

Ponavljajući iste operacije i za dvostruku konzolu, dobija se jedinična linija raspodele za taj osnovni sistem, a množeci intenzitete jedinične raspodele sa silom $S_B = 600,00 \text{ t}$, dobija se raspodela prikazana na sl. 25 (gore desno).

Superpozicijom dveju dobijenih raspodela dobijena je raspodela p za kontinualni sistem opterećen silama S_A i S_B , koja je prikazana na istom dijagramu kao sumarna raspodela.

Za dobijenu sumarnu raspodelu kontinualnog sistema nadene su, radi kontrole, linije ugibanja tla i elastična linija kontinualnog nosača S_t . Njihove ordinate su date na sl. 25, (dole). Kao što se vidi, obe linije se vrlo dobro podudaraju jedna s drugom, što znači da je račun dovoljno tačno sproveden. Dobijena odstupanja su u svim tačkama ispod 1%, što se može smatrati praktično sasvim tačnim. Razlika u sleganjima oslonaca je u ovom slučaju veličine

$$\Delta U = 4,211 \text{ mm.}$$

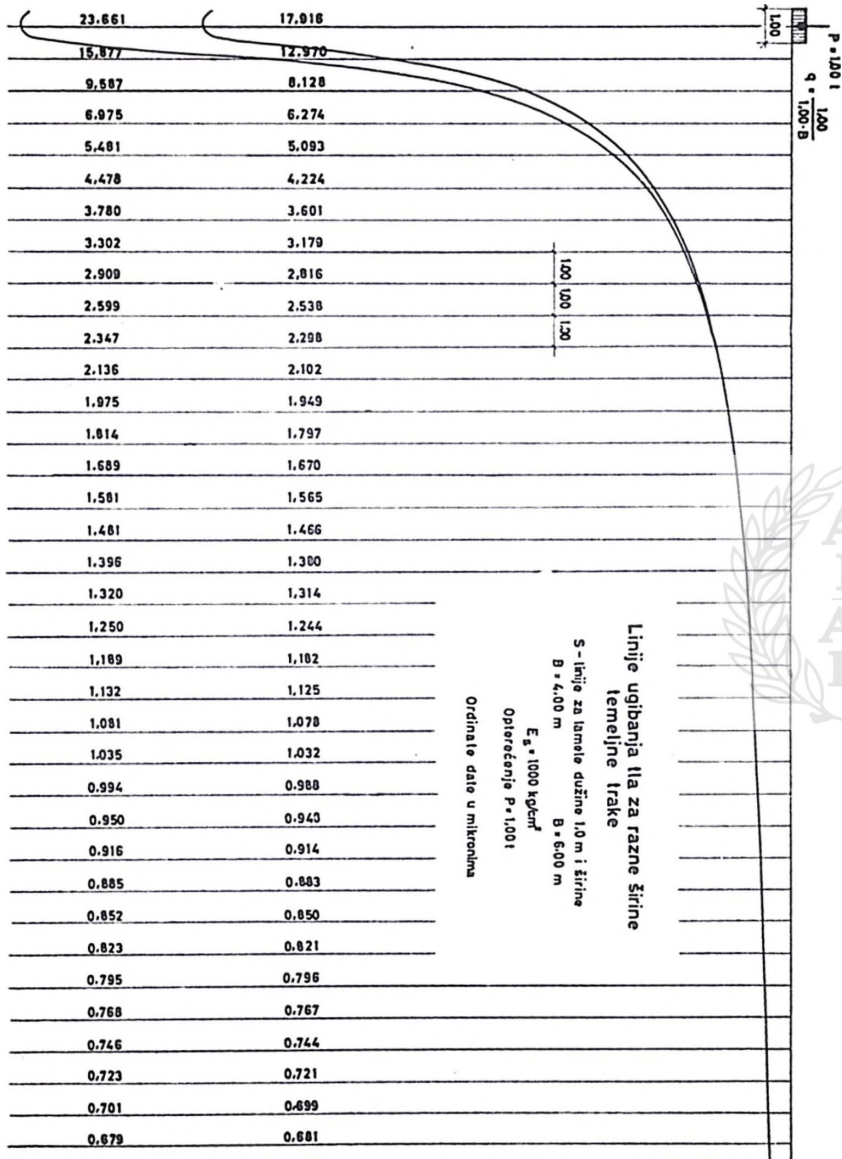
Ako se za dobijenu raspodelu p sračunaju reakcije kontinualnog sistema S_t , dobiće se veličine R_A i R_B .

Dobijene vrednosti sila Δ iznose, prema (15)

$$\Delta A = 22,92 \text{ t} \quad \Delta B = 45,84 \text{ t}$$

Taj sistem sila Δ savija sistem S_1 i izaziva u njemu momente M_i^o i transverzalne sile T_i^o koji potiču od razlika oslonačkih sila. Ti momenti i transverzalne sile prikazani su na sl. 27.

Analogni primeri izradeni su i za veće krutosti sistema S_1 (sl. 30 i 33).



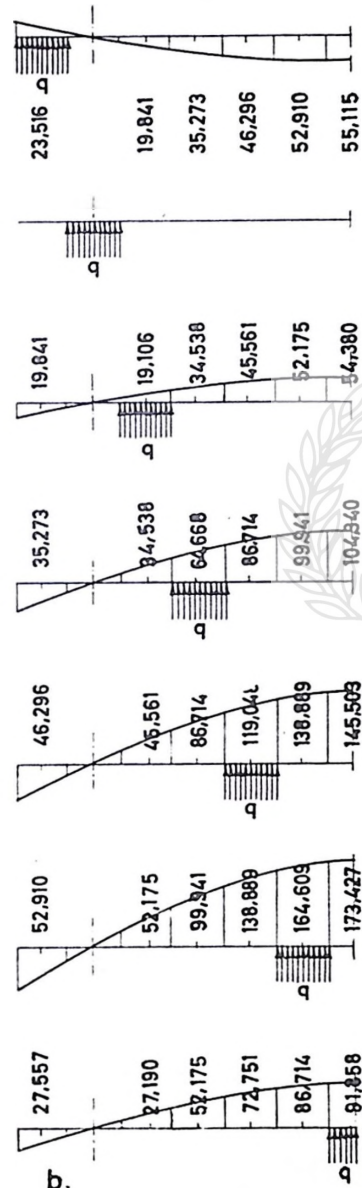
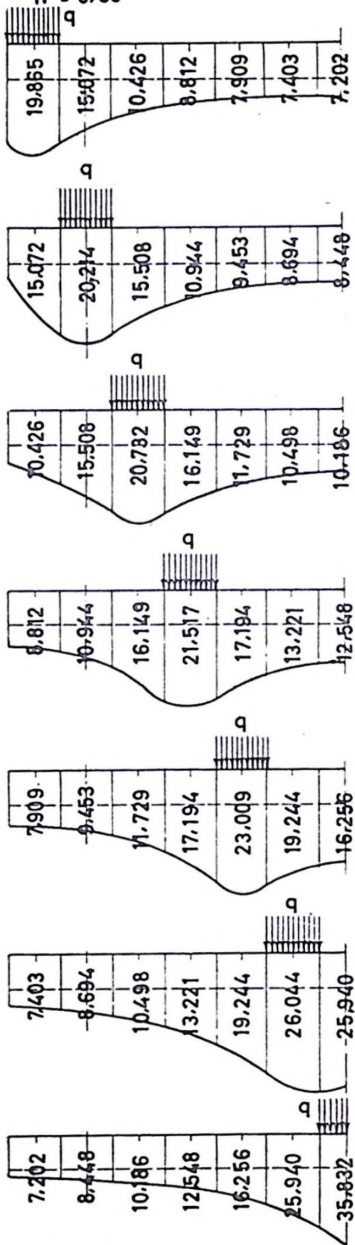
Linije ugibanja tla za parove jediničnih sila

Linije deformacije nosača za parove jediničnih sila

1.50 + 5.00 + 5.00 + 1.50

L = 13,00 m
B = 6,00 m
f = 0,59

$E_b = 210.000 \text{ kg/cm}^2$
 $E_s = 1000 \text{ kg/cm}^2$
 $I = 0,108 \text{ m}^4$



Ugibi dati u mikronima

a.

b.



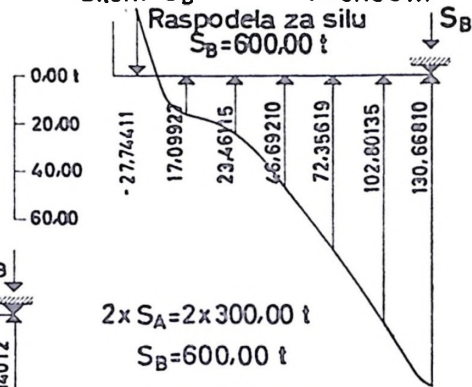
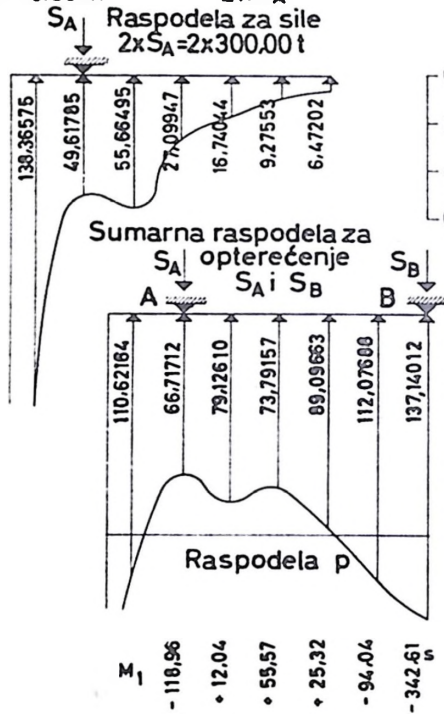
Sistem S₁: Kontinualni nosač sa prepustima 1,50+5,00+5,00+1,50

L=13,00m
B=6,00m
h=0,59m

Greda sa prepustima
opterećena silama
2xS_A

Dvostruka konzola
opterećena
silom S_B

E_b=210.000 kg/cm²
E_s=1000 kg/cm²
I=0,108 m⁴



2x S_A=2x300,00 t

S_B=600,00 t

ΔU=4,211 mm

s_A+4,211 = s_B

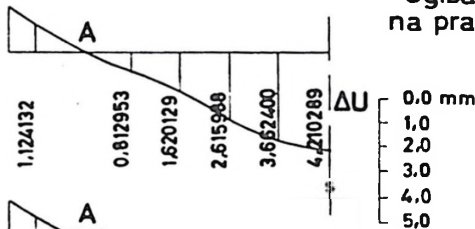
ΔB = 45,84 t

R_B = S_B - ΔB = 554,16 t

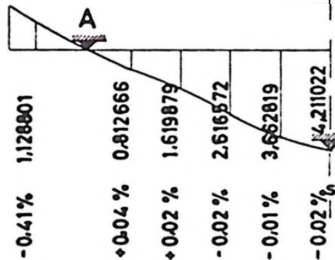
R_A = S_A + $\frac{\Delta B}{2}$ = 322,92 t

Vrednosti napadnih momenata

Ugibanja tla u odnosu na pravu koja spaja tačke A



Elastična linija nosača u odnosu na pravu koja spaja tačke A



← Odstupanje

b) PRORAČUN KONTINUALNE TRAKE KAD I_k TEŽI BESKONAČNOSTI

Ako je na istoj temeljnoj traci posmatranoj pod a) postavljena konstrukcija koja je potpuno kruta, ona neće dozvoliti nejednaka sleganja oslonaca. U tom slučaju se menja raspodela p u raspodelu p' , a sa njome i veličina reakcija R_A i R_B u R'_A i R'_B .

Koristeći se jednačinom (19) i postavljajući uslov da sleganja oslonaca moraju biti međusobno jednaka, dobija se nova vrednost sila Δ' i reakcija R'_A i R'_B . Pojedine raspodele za gredu i konzole, kao i sumarna nova raspodela p' date su sa dijagramom sl. 26.

Kontrolom deformacija kontinualnog sistema S_t i ugibanja tla za novu raspodelu p' dobijene su takođe nove linije deformacije sistema S_t i tla. koje daju rezultate sa zadovoljavajućom tačnošću.

Od raspodele p' dobijene su veličine sila Δ' i one iznose:

$$\Delta A' = 127,00 \text{ t}; \quad \Delta B' = 254,01 \text{ t.}$$

Postavljanjem krutog sistema S_k na sistem S_t raspodela p se menja u raspodelu p' . Momentna površina sistema S_t , M_1 prelazi u momentnu površinu M_2 (dijagram sl. 27). Razlike tih momentnih površina i odgovarajućih transverzalnih sila daju momente i transverzalne sile označene sa M_t^k , T_t^k .

Šrafirana površina momentnih razlika

$$M_2 - M_3 = M_t^o - M_t^k,$$

pretstavlja razliku u momentima sistema S_t koja potiče od razlika u raspodelama p i p' .

Promenom sila R u sile R' cela konstrukcija je opterećena razlikama sila S i R' koje sada iznose,

$$R'_B = 345,99 \text{ t} \text{ i } R'_A = 427,01 \text{ t}$$

Razlika tih sila S i R' deluje na konstrukciju tako da celu konstrukciju savija i izaziva momente M_k^o i transverzalne sile T_k^o . U osloncu B veličina tih momenata iznosi,

$${}_B M_k^o = 635,00 \text{ tm.}$$

Pošto je krutost sistema S_k jako velika, može se smatrati da će biti momenti M_t^o u sistemu S_t jednaki nuli.

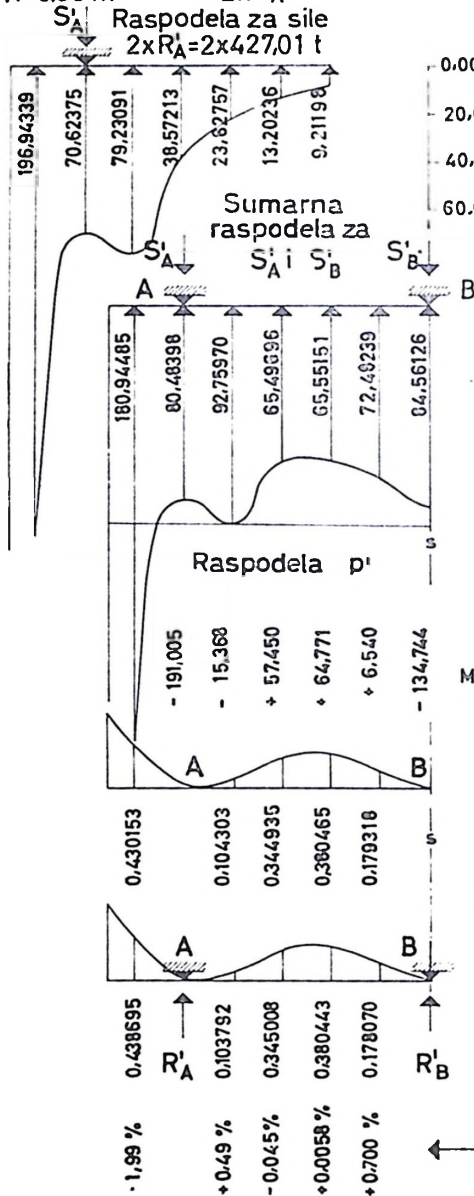
Analogni primeri izradeni su i za veće krutosti sistema S_t (sl. 28 do 33).

Veličina momenata M_t^o i M_k^o za ispitivane slučajeve date su na tablici I.

Sistem S_1 : Kontinualni nosač sa prepustima 1,50+5,00+5,00+1,50

$L=13,00\text{m}$ Greda sa prepustima
 $B=6,00\text{m}$ opterećena silama
 $h=0,59\text{m}$ $2 \times S_A$

Dvostruka konzola opterećena silom S'_B
 $E_b=210.000\text{ kg/cm}^2$
 $E_s=1000\text{ kg/cm}^2$
 $I=0,108\text{ m}^4$
Raspodela za silu $S'_B=345,99\text{ t}$



Za $\Delta U = 0$

$S'_A = R'_A$

$S'_B = R'_B$

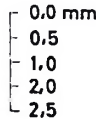
$\Delta B' = 254,01\text{ t}$

$S'_B = R'_B = S_B - \Delta B' = 345,99\text{ t}$

$S'_A = R'_A = S_A + \frac{\Delta B'}{2} = 427,01\text{ t}$

Vrednosti napadnih momenata M_2

Ugibanja tla u odnosu na pravu koja spaja tačke A



Elastična linija nosača u odnosu na pravu koja spaja tačke A

← Odstupanje

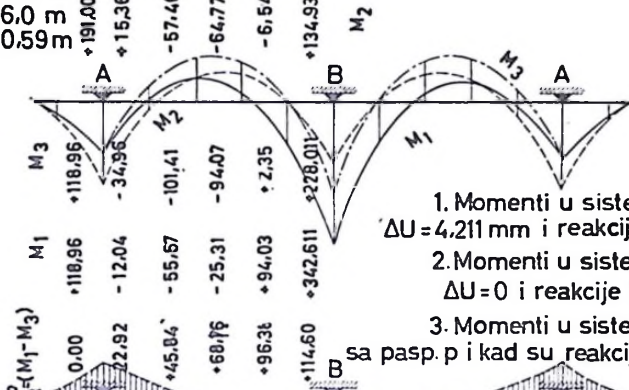
Sl. 26



Sistem S_t : Kontinualni nosač sa prepustima
1,50+5,00+5,00+1,50

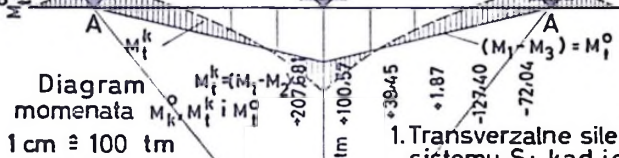
$l_1 = 13,0$ m
 $l_2 = 6,0$ m
 $l_3 = 0,59$ m

$E_B = 1000$ kg/cm²
 $I = 0,108$ m⁴
 $E_b = 210.000$ kg/cm²



1. Momenti u sistemu S_t kad je $\Delta U = 4,211$ mm i reakcije na osloncima S_A i S_B
2. Momenti u sistemu S_t kad je $\Delta U = 0$ i reakcije R'_A i R'_B

3. Momenti u sistemu S_t kad je opterećen sa rasp. p i kad su reakcije na osloncima R_A i R_B



1. Transverzne sile u sistemu S_t kad je $\Delta U = 4,211$ mm i reakcije na osloncima S_A i S_B

2. Transverzne sile u sistemu S_t kad je $\Delta U = 0$ mm i reakcije R'_A i R'_B

3. Transverzne sile u sistemu S_t kad je opterećen sa rasp. p i kad su reakcije na osloncima R_A i R_B

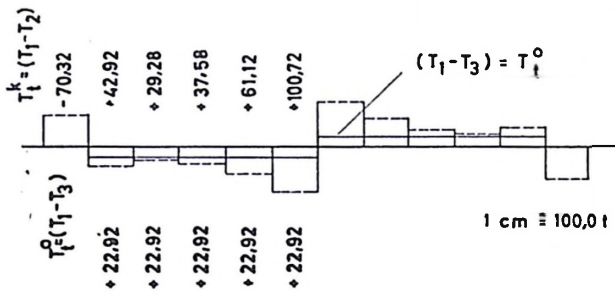


Diagram transverzalnih sila
 T_k^o, T_t^k, T_t^o

Sl. 27

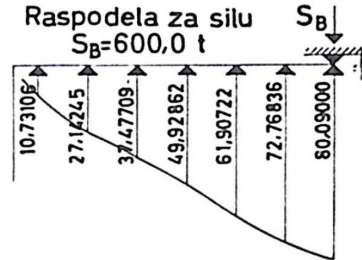
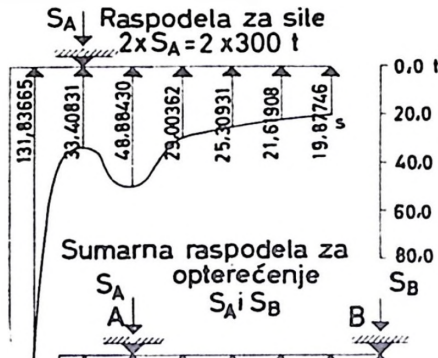
Sistem S_1 : Kontinualni nosač sa prepustom 1,5 + 5,0 + 5,0 + 1,5

L=13,00 m
B=6,00 m
h=0,59 m

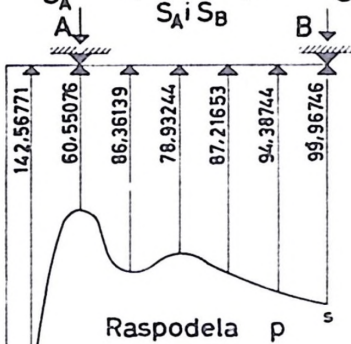
Dvostruka greda
opterećena silama
 $2 \times S_A$

Dvostruka konzola
opterećena
silom S_B

$E_b = 210.000 \text{ kg/cm}^2$
 $E_s = 200 \text{ kg/cm}^2$
 $I = 0,108 \text{ m}^4$



Sumarna raspodela za opterećenje S_A i S_B



$$2 \times S_A = 2 \times 300,0 \text{ t}$$

$$S_B = 600,0 \text{ t}$$

$$\Delta U = 11,79787 \text{ mm}$$

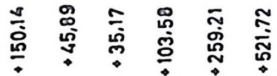
$$S_A + 11,79787 = S_B$$

$$\Delta B = +128,44 \text{ t}$$

$$R_B = S_B - \Delta B = 471,56 \text{ t}$$

$$R_A = S_A + \frac{\Delta B}{2} = 364,22 \text{ t}$$

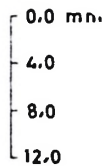
Raspodela p



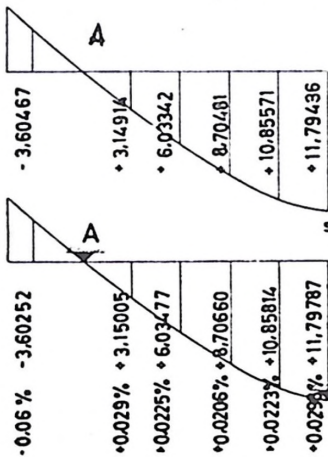
Vrednosti napadnih momenata

M_1

Sleganje tla u odnosu na pravu koja spaja tačke A



Elastična linija nosaca u odnosu na pravu koja spaja tačke A



Neslaganje u procentima

Sl. 28

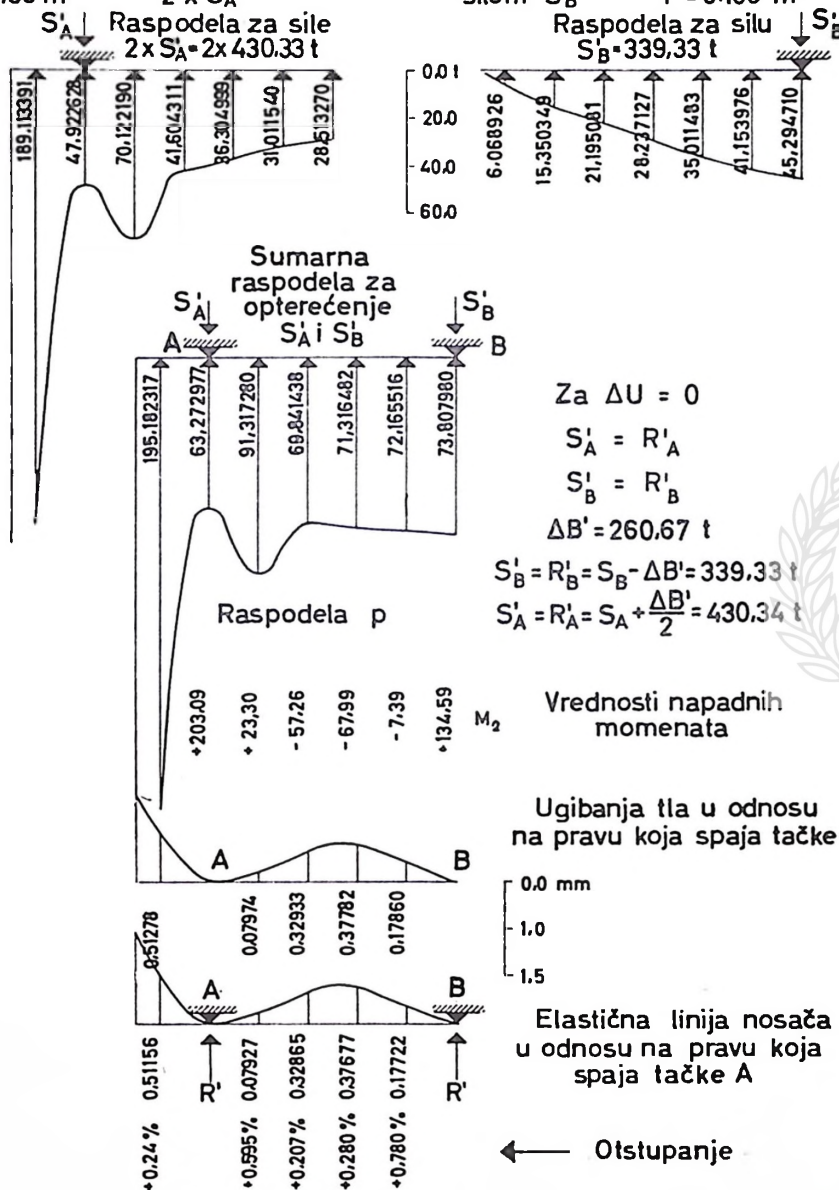
Sistem S_f : Kontinualni nosač sa prepustima 1,50+5,00+5,00+1,50

L=13,0 m
B=6,0 m
h=0,59 m

Greda sa prepustima
opterećena silama
 $2 \times S'_A$

Dvostruka konzola
opterećena
silom S'_B

$E_b=210.000 \text{ kg/cm}^2$
 $E_s=200 \text{ kg/cm}^2$
 $I=0,108 \text{ m}^4$

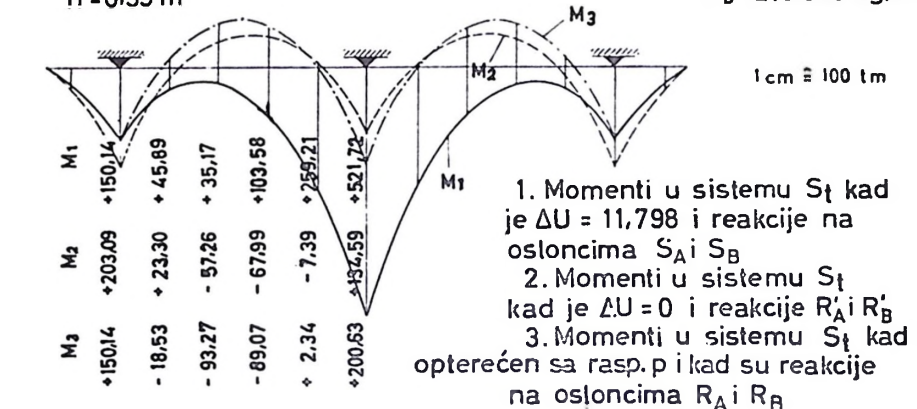


Sl. 29

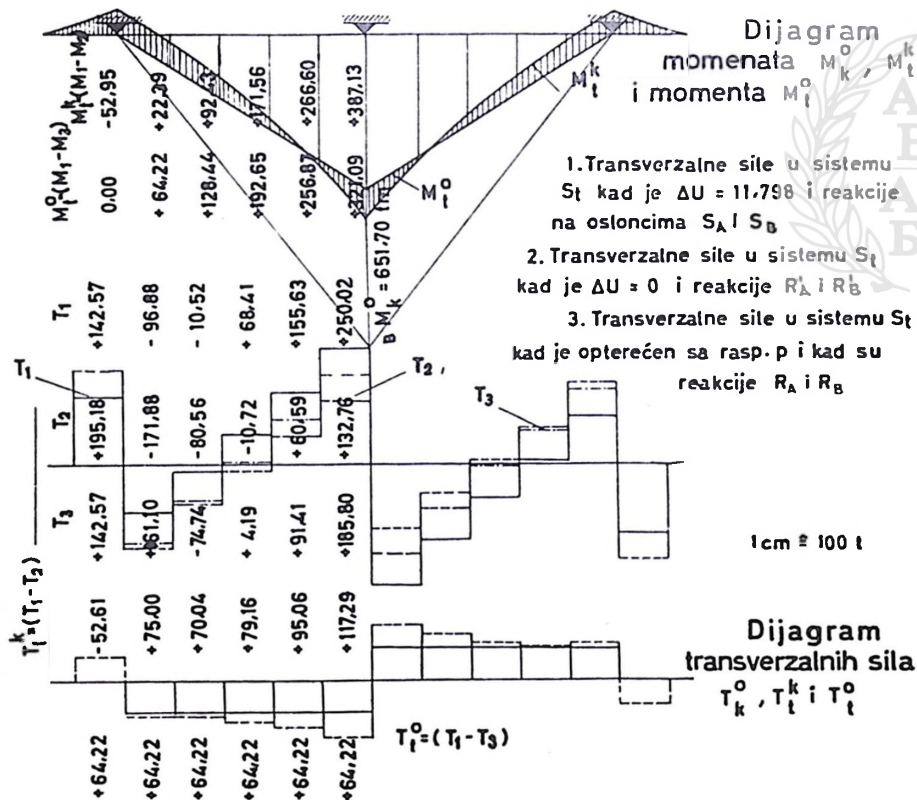
Sistem S_t : Kontinualni nosač sa prepustima 1,5+5,0+5,0+1,5

$L = 13.0\text{ m}$
 $B = 6.0\text{ m}$
 $\gamma = 0.59\text{ m}$

$E_s = 200\text{ kg/cm}^2$
 $I = 0.108\text{ m}^4$
 $E_b = 210.000\text{ kg/cm}^2$



1. Momenti u sistemu S_t kad je $\Delta U = 11,798$ i reakcije na osloncima S_A i S_B
2. Momenti u sistemu S_t kad je $\Delta U = 0$ i reakcije R'_A i R'_B
3. Momenti u sistemu S_t kad je opterećen sa rasp. p i kad su reakcije na osloncima R_A i R_B



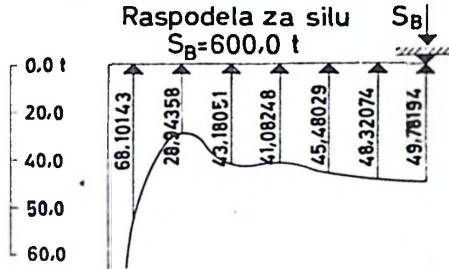
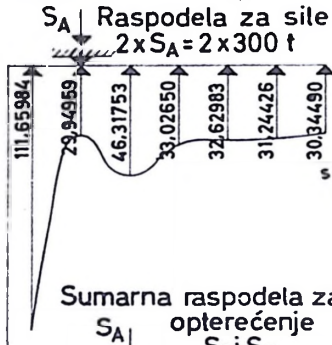
- Dijagram momenata M_k^o, M_t^k i momenta M_t^o, M_t^k
1. Transverzalne sile u sistemu S_t kad je $\Delta U = 11,798$ i reakcije na osloncima S_A i S_B
 2. Transverzalne sile u sistemu S_t kad je $\Delta U = 0$ i reakcije R'_A i R'_B
 3. Transverzalne sile u sistemu S_t kad je opterećen sa rasp. p i kad su reakcije R_A i R_B

Dijagram transverzalnih sila T_k^o, T_t^k i T_t^o

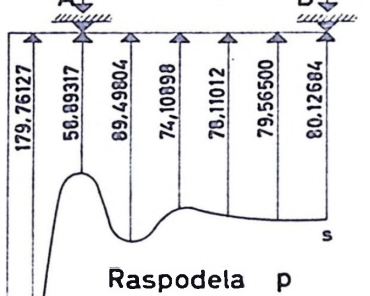
Sistem S_t : Kontinualni nosač sa prepustom 1,5 + 5,0 + 5,0 + 1,5

L=13.00 m Dvostruka greda
B=6.00 m opterećena silama
h=0.59 cm $2 \times S_A$

Dvostruka konzola
opterećena silom S_B
 $E_b = 210.000 \text{ kg/cm}^2$
 $E_s = 40 \text{ kg/cm}^2$
 $I = 0.108 \text{ m}^4$



Sumarna raspodela za opterećenje S_A i S_B



$$2 \times S_A = 2 \times 300.0 \text{ t}$$

$$S_B = 600.0 \text{ t}$$

$$\Delta U = 19,89864 \text{ mm}$$

$$S_A + 19,89864 = S_B$$

$$\Delta B = 216.62 \text{ t}$$

$$R_B = S_B - \Delta B = 383.38 \text{ t}$$

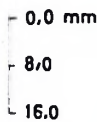
$$R_A = S_A + \frac{\Delta B}{2} = 408,31 \text{ t}$$



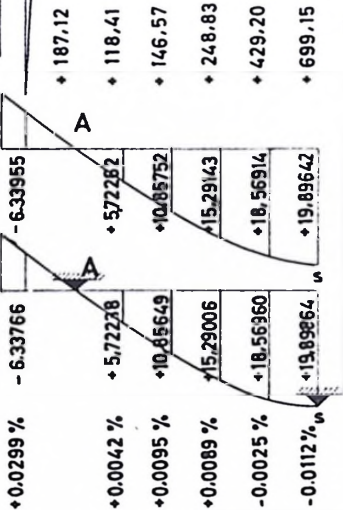
Vrednosti napadnih momenata

M_1

Sleganje tla u odnosu na pravu koja spaja tačke A



Elastična linija nosača u odnosu na pravu koja spaja tačke A



Neslaganje u procentima

Sl. 31

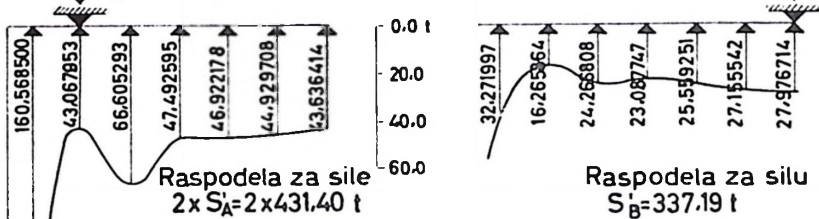
Sistem S_t : Kontinualni nosač sa prepustima 1,50+5,00+5,00+1,50

$L=13,0$ m
 $B=6,0$ m
 $h=0,59$

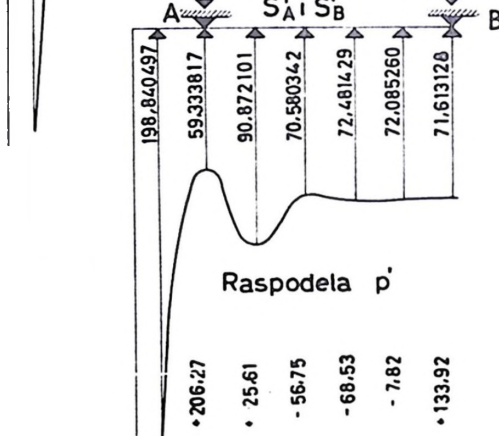
Greda sa prepustima
opterećena silama
 S'_A $2 \times S'_A$

Dvostruka konzola
opterećena
silom S'_B

$E_b = 210.000$ kg/cm²
 $E_s = 40,0$ kg/cm²
 $I = 0,108$ m⁴



Sumarna raspodela za
 S'_A i S'_B



Za $\Delta U = 0$

$S'_A = R'_A$

$S'_B = R'_B$

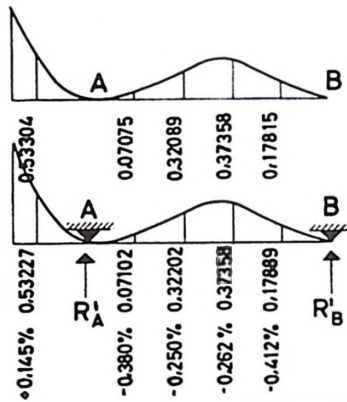
$\Delta B = 262,81$ t

$S'_B = R'_B = S_B - \Delta B = 337,19$ t

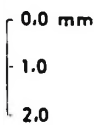
$S'_A = R'_A = S_A + \frac{\Delta B}{2} = 431,40$ t

Vrednosti napadnih
momenta

M_2



Ugibanja tla u odnosu
na pravu koja spaja tačke A



Elastična linija nosača
u odnosu na pravu koja spa-
ja tačke A

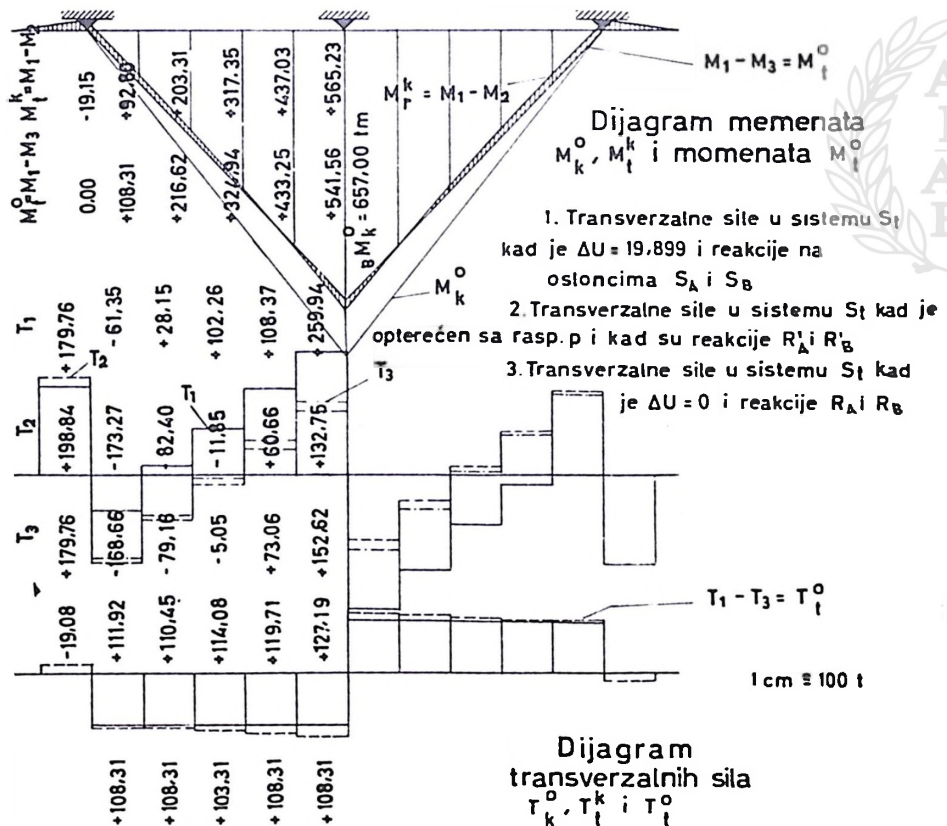
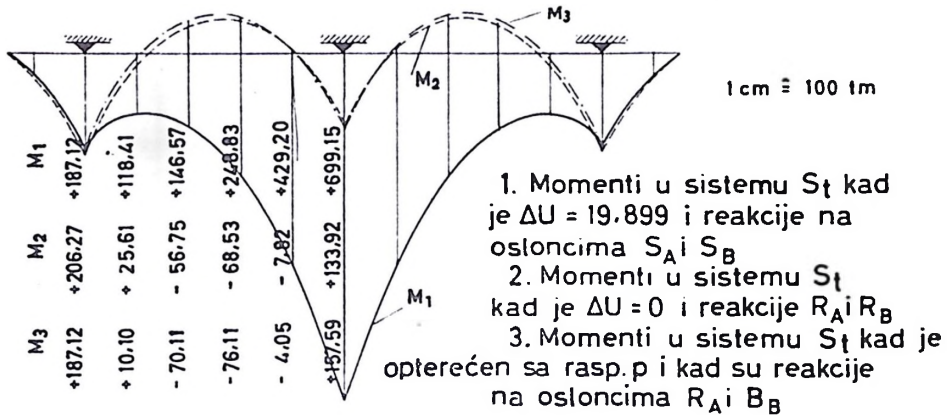
← Odstupanje

Sl. 32

Sistem S_t : Kontinualni nosač sa prepustom 1,5+5,0+5,0+1,5

$L = 13.0 \text{ m}$
 $B = 6,0 \text{ m}$
 $h = 0,59 \text{ m}$

$E_s = 40 \text{ kg/cm}^2$
 $I = 0,108 \text{ m}^4$
 $E_b = 210.000 \text{ kg/cm}^2$



Sl. 33

kontinualni nosač 1,50 + 5,00 + 5,00 + 1,50

Tabelarni pregled
momenata na ostoncu B u vezi sa
promenama E_s i I_t

Opterećenje kontinualnog nosača odzgo uvek
silama $S_A = 300,00$ t . $S_B = 600,00$ t

Za M_k^0 pretpostavljeno da $I_k \rightarrow \infty$.

Za M_l^0 pretpostavljeno da je $I_k = 0$

E_s kg/cm ²	I_t m ⁴	M_k^0 tm	%	M_l^0 tm	%
1000	0,027	609,86	96,03	38,39	29,84
1000	0,108	635,05	100,00	114,60	100,00
1000	0,587	652,55	102,80	334,60	292,00
1000	5,870	657,80	103,70	598,80	523,00
1000	0,108	635,05	100,00	114,60	100,00
200	0,108	651,70	102,80	321,09	280,00
40	0,108	657,00	103,60	541,56	472,00

Tab. 1

c) PRORAČUN KONTINUALNE TRAKE KAD JE I_k PROMENLJIVO,
A I_t IMA KONSTANTNU VREDNOST.

Ako na sličnu traku koja je ranije ispitivana (I_t je sada 0,587 m⁴ a ne 0,108 m⁴) postavimo konstrukciju S_k sa konačnom krutosti I_k , menjajući pritom vrednosti I_k , momenti M_l^0 i M_k^0 se javljaju u oba sistema i raspodeljuju saglasno jednačini (16). Na dijagramu sl. 34 data je zavisnost razlike sleganja ΔU od promena krutosti sistema S_k (I_k).

Na dijagramu na slici 35 data je zavisnost veličine momenata M_l^0 i M_k^0 od promena krutosti sistema S_k , kad I_k raste od nule do vrednosti 11,74 m⁴. Brojne vrednosti tih momenata, kao i njihova suma date su u tablici na istom dijagramu.

POGLAVLJE C

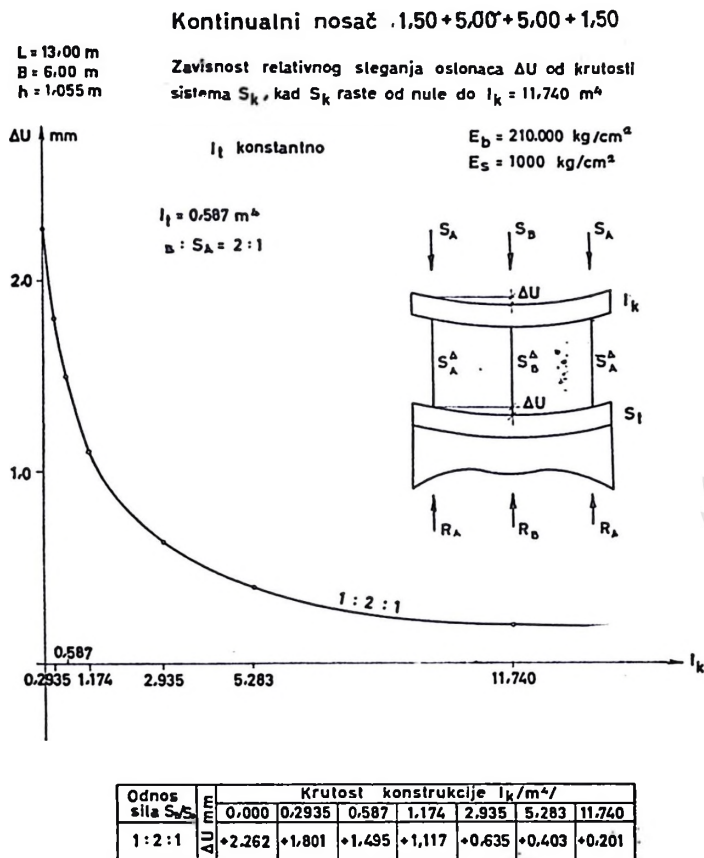
UTICAJ POJEDINIH PARAMETARA NA VELIČINU UTICAJA USLED RAZLIKA OSLONAČKIH SILA

Način proračuna kontinualnih traka koji je ranije izložen omogućava proizvoljno menjanje odnosa veličina spoljnih sila, te na taj način možemo ispitati po pojedinim parametrima njihov uticaj.

Parametri po kojima je potrebno ispitati uticaje usled razlika oslonackih sila su sledeci:

- 1) Uticaj krutosti sistema S_t ,
- 2) Uticaj velicine modula deformacije tla, E_s ,
- 3) Uticaj velicine prepusta konzole,

Po tim parametrima biće u daljem tekstu za dati primer izvršena analiza i na kraju izvedeni izvesni zaključci.



Sl. 34

1) UTICAJ KRUTOSTI SISTEMA S_t NA POJAVU I VELIČINU UTICAJA USLED RAZLIKA OSLONAČKIH SILA

Dosada je na dijagramima bila krutost sistema S_t data veličinom

$$I_t = 0,108 \text{ m}^4$$

Na isti način obrađeni su i slučajevi sa krutostima

$$I_t = 0,587 \text{ m}^4 \text{ i}$$

$$I_t = 5,870 \text{ m}^4$$

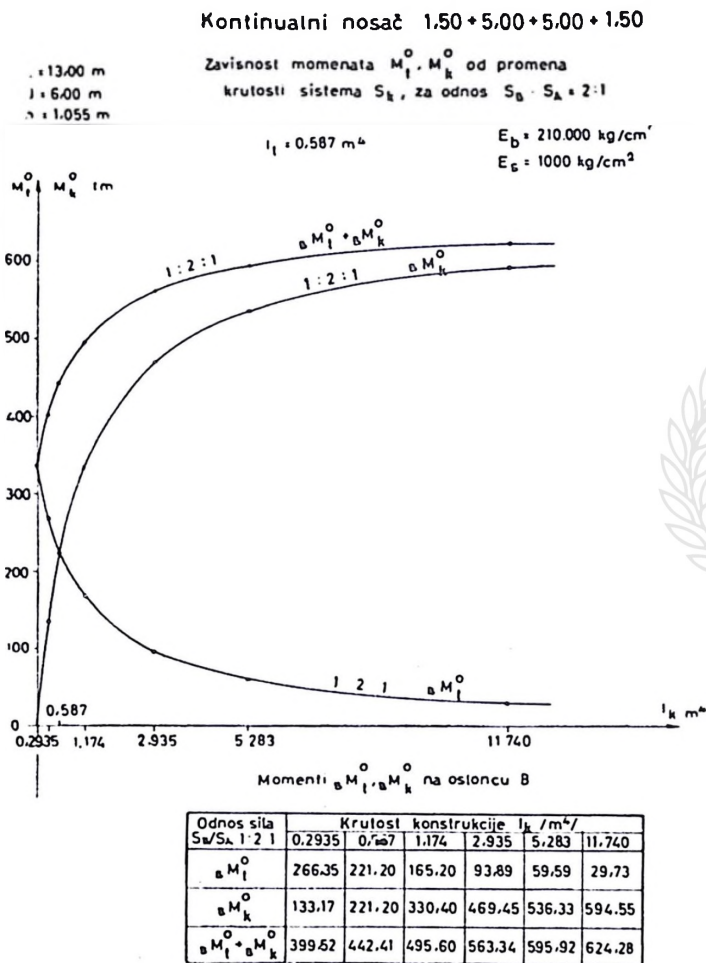
Na dijagramu sl. 36 prikazane su veličine momenata savijanja M_t^o ispod oslonca B, za razne slučajeve krutosti sistema S_t .

Ranije su ti momenti računati za odnos sila $S_A : S_B : S_A = 1 : 2 : 1$. Sada su date vrednosti tih momenata za razne odnose sila S_A i S_B .

Iz rezultata koje pruža ovaj dijagram može se zaključiti:

a) Što je veća krutost sistema S_t (pri $I_k = 0$), veće su i vrednosti momenata M_t^o (vidi tablicu I).

b) Veličina momenata M_t^o zavisi jako od načina opterećenja sistema S_t .



Sl. 35

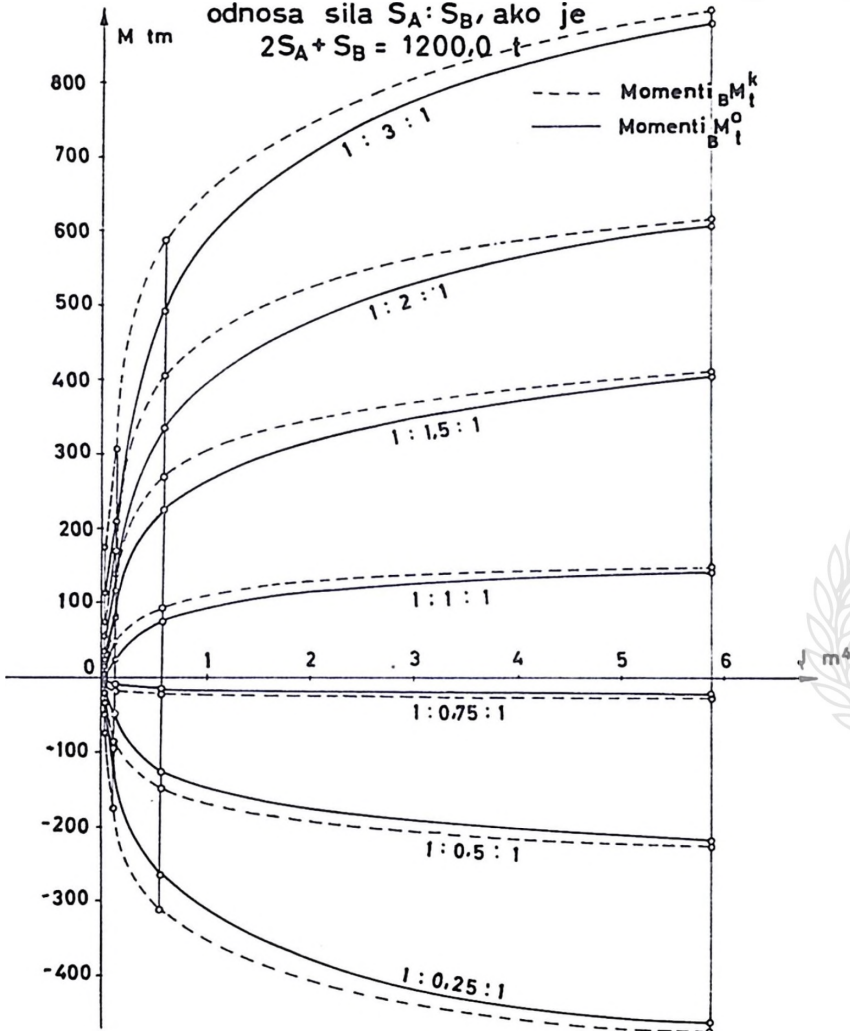
Momenti u zavisnosti od odnosa sila S_B/S_A mogu biti pozitivni i negativni. Postoji, međutim, za svaku vrednost I_t jedan odnos sila S_A i S_B za koji će ti momenti biti jednaki nuli. Taj slučaj nastupa onda kad je odnos sila S tako podešen da je razlika u slaganjima pojedinih oslonaca jednaka nuli.

Kontinualni nosač 1,50 + 5,00 + 5,00 + 1,50

Zavisnost veličine momenta M_i^o
od krutosti sistema S_t i

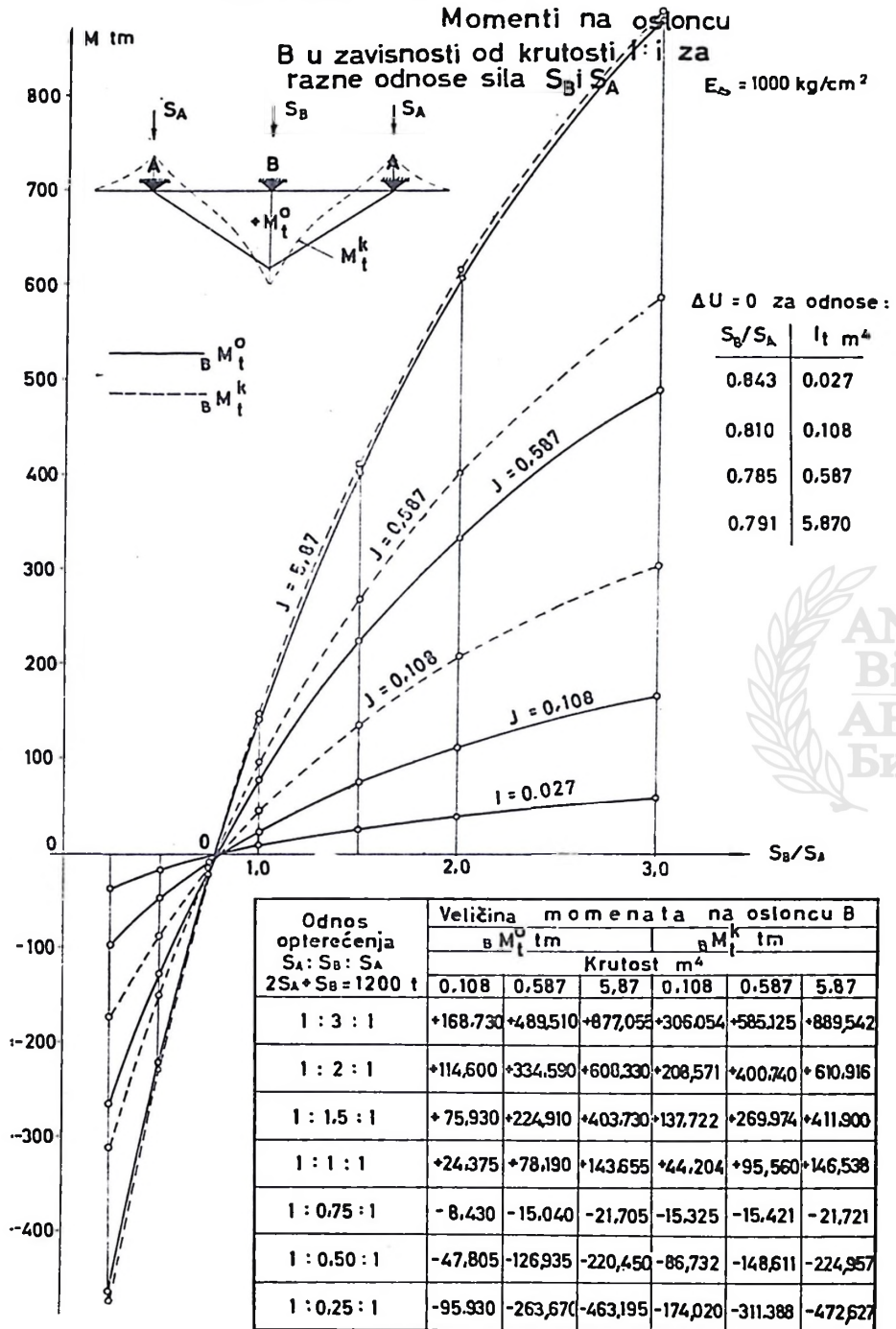
$E_{\Delta} = 1000 \text{ kg/cm}^2$

odnosa sila $S_A : S_B$, ako je
 $2S_A + S_B = 1200,0 \text{ t}$



Odnos sila $S_A : S_B : S_A$	Vrednosti momenta					
	Krutost m^4			Krutost m^4		
	0,108	0,587	5,87	0,108	0,587	5,87
1 : 3 : 1	+168,730	+489,510	+877,055	+306,054	+585,125	+889,542
1 : 2 : 1	+114,600	+334,590	+608,330	+208,571	+400,740	+610,916
1 : 1,5 : 1	+75,930	+224,910	+403,730	+137,722	+269,974	+411,900
1 : 1 : 1	+24,375	+78,190	+143,655	+44,204	+95,560	+146,538
1 : 0,75 : 1	-8,430	-15,040	-21,705	-15,325	-15,421	-21,271
1 : 0,50 : 1	-47,805	-126,935	-220,450	-86,732	-148,611	-224,957
1 : 0,25 : 1	-95,930	-263,670	-463,195	-174,020	-311,388	-472,627

Kontinualni nosač 1,50 ÷ 5,00 + 5,00 + 1,50



Sl. 37

Ta se zavisnost najbolje vidi iz dijagrama na sl. 37 u kome su za razne vrednosti odnosa $S_A : S_B$ i za razne krutosti sistema S_t date vrednosti momenata M_t^o ispod oslonca B .

Iz dijagrama se vidi da će u svakom slučaju izvestan i određen odnos sila $S_B : S_A$ biti momenti M_t^o jednaki nuli. U ispitivanom slučaju taj odnos gotovo ne zavisi od promena krutosti sistema S_t i varira od vrednosti 0,843 do 0,785, dok je krutost sistema S_t porasla za oko 200 puta.

c) *Konstrukcije fundirane na jednom te istom tlu imaju mnogo manje momente, M_t^o , ukoliko je manja krutost sistema S_t , (pri $I_k = 0$). Stoga, — ako je $I_k = 0$, treba radi pojave ovih uticaja usvajati sistem S_t sa što je moguće manjom krutosti, naročito u slučajevima sa nepovoljnim odnosima sila S .*

d) Kad su sleganja oslonaca sistema S_t (za slučaj $I_k = 0$) za izvesno opterećenje međusobno jednaka, razlike oslonačkih sila postaju jednake nuli, a sa njima i momenti M_t^o . Isto se dešava i kod konstrukcija sa $I_k \rightarrow \infty$; ako su razlike oslonačkih sila jednake nuli i momenti M_k^o postaju jednaki nuli.

Stoga, da bi se izbegla pojava tih uticaja, treba — po mogućnosti — za dato opterećenje tako projektovati sistem S_t da sleganja pojedinih oslonaca budu međusobno jednaka. To se postiže — u mnogim slučajevima — promenom oblika sistema S_t .

e) U slučaju kad je $I_k = 0$ i kad se menja vrednost I_t , promena momenata M_t^o su velike. Međutim, ako kod sistema S_k , I_k teži ka beskonačnosti, menjanjem vrednosti I_t promene vrednosti momenata M_k^o su minimalne (vidi tablicu I).

f) Promene vrednosti I_t vrlo malo utiču na promenu najpovoljnijeg odnosa $S_B : S_A$, (vidi Sl. 37) tako da se može smatrati da ako imamo najpovoljniji odnos sila S , da je taj odnos obično skoro nezavisan od promena I_t , (Vidi tablicu na sl. 37). I_t utiče znatnije na promene odnosa sila S samo u slučajevima velikog raspona konzola sistema S_t odnosno malih vrednosti relativne krutosti. Za normalne raspone konzola kao i za velike raspone konzola ali sa velikom relativnom krutosti može se smatrati da je odnos sila S nezavisan od promena I_t (vidi sl. 47 i 48).

Na dijagramu na sl. 38 data je zavisnost razlike u sleganjima oslonaca ΔU od odnosa $S_B : S_A$, za razne krutosti sistema S_t .

Na dijagramu na sl. 39 prikazani su, za razne vrednosti krutosti sistema S_t promene sleganja pojedinih oslonaca A i B u zavisnosti od odnosa $S_B : S_A$.

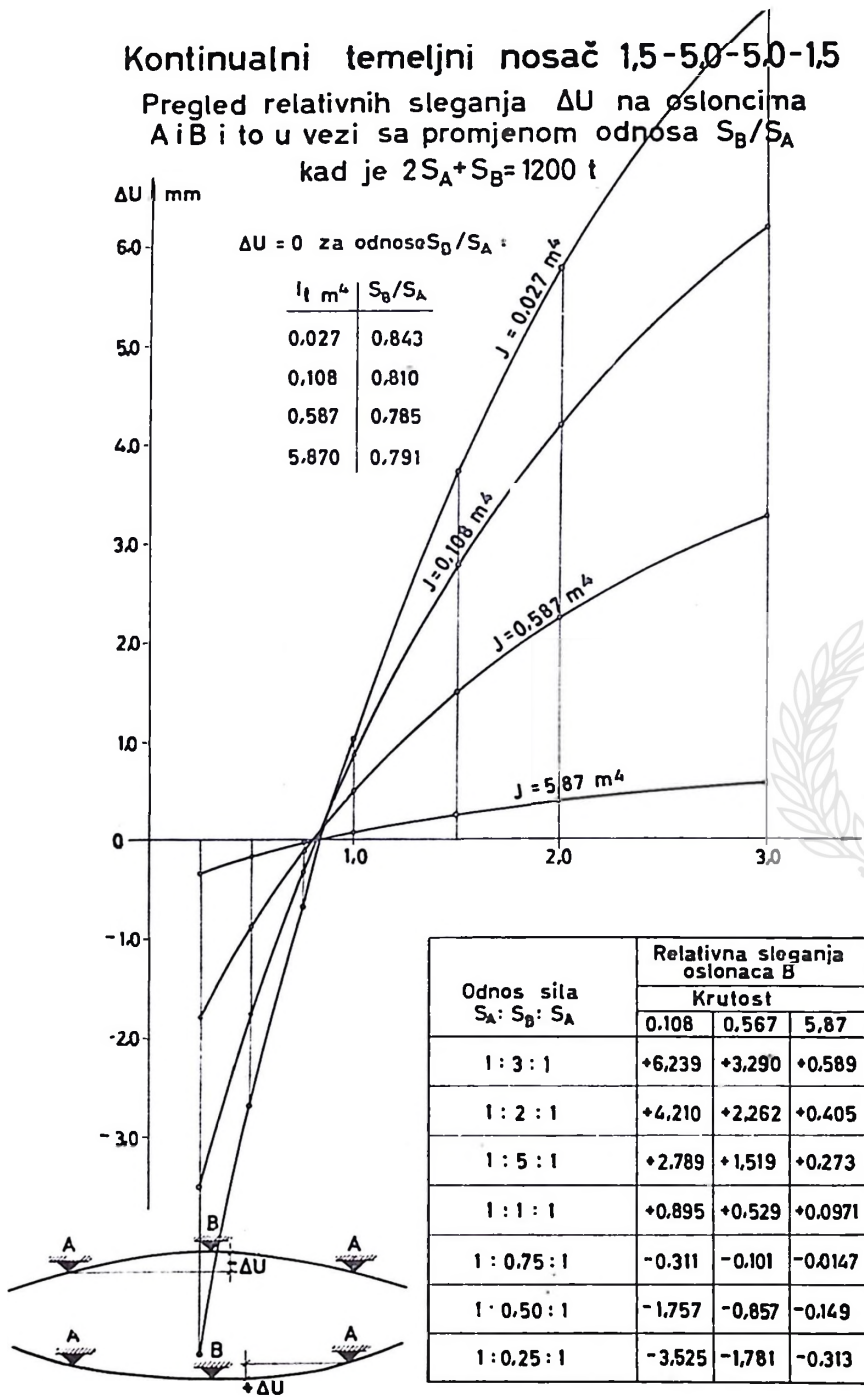
Uticaj transverzalnih sila T_t^o i T_k^o nije dalje tretiran, jer on obično nema velikog značaja za dimenzioniranje ovakvih konstrukcija. Radi poređenja date su na dijagramu 36 i 37 vrednosti momenata M_t^k .

2) UTICAJ PROMENE MODULA DEFORMACIJE TLA, E_s .

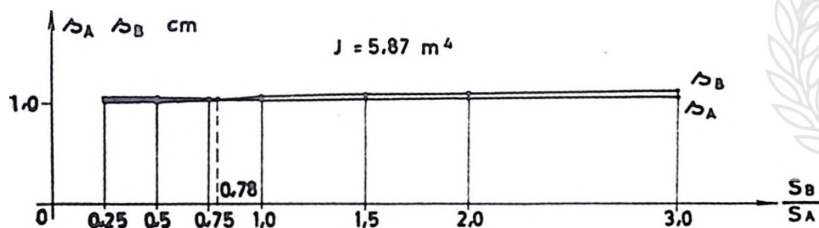
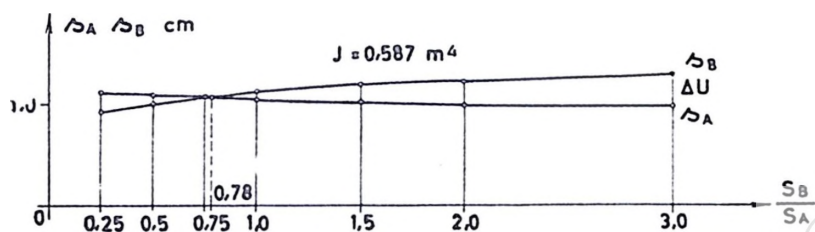
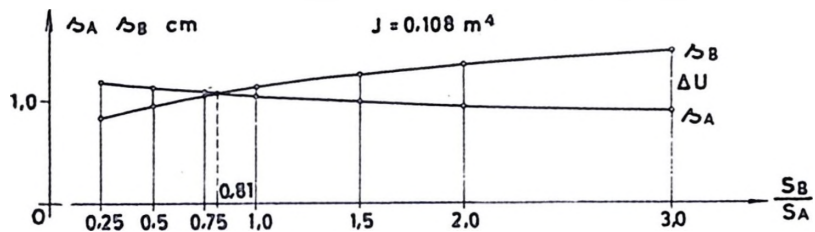
De bi se video uticaj promena modula deformacija tla, izradena je serija primera sa tri veličine modula deformacija, i to $E_s = 40$, $E_s = 200$ i $E_s = 1000$ kg/cm². Krutost je usvojena za sistem S_t sa,

Kontinualni temeljni nosač 1,5-5,0-5,0-1,5

Pregled relativnih sleganja ΔU na osloncima A i B i to u vezi sa promjenom odnosa S_B/S_A kad je $2S_A + S_B = 1200 \text{ t}$



Kontinualni temeljni nosač 1,5-5,0-5,0-1,5
 Pregled relativnih sleganja ΔU na osloncima A i B i to
 u vezi sa promjenom odnosa S_B/S_A kad je $2S_A+S_B=1200\text{ t}$
 Dužina konzola 1,50 m $E_s=1000\text{ kg/cm}^2$



$$\Delta U = \Delta_B - \Delta_A$$

Odnos S_B/S_A	Apsolutne vrijednosti sleganja oslonaca A i B u mm					
	K R U T O S T m^4					
	0.108		0.587		5.87	
	Δ_A	Δ_B	Δ_A	Δ_B	Δ_A	Δ_B
1 : 3 : 1	9,155	15,394	9,846	13,136	10,560	11,148
1 : 2 : 1	9,770	13,980	10,133	13,395	10,612	11,016
1 : 1.5 : 1	10,181	12,970	10,343	11,862	10,649	10,922
1 : 1 : 1	10,728	11,622	10,623	11,152	10,698	10,795
1 : 0.75 : 1	11,077	10,766	10,801	10,700	10,729	10,715
1 : 0.50 : 1	11,495	9,738	11,015	10,158	10,767	10,618
1 : 0.25 : 1	12,006	8,4809	11,276	9,495	10,813	10,500

$$I_t = 0,108 \text{ m}^4$$

i za tu su krutost iradeni svi primeri.

Dobiveni rezultati su prikazani na dijagramima od sl. 40 do. sl. 43.

U dijagramu na sl. 40 data je zavisnost veličine momenata M_t^o za razne vrednosti modula deformacije tla, i to za razne odnose sila $S_B : S_A$, kao i ranije.

Iz tih dijagrama se vidi sledeće:

a) Što je modul E_s veći, to su, — za jedno te isto opterećenje, — vrednosti momenata M_t^o manje. Ako se vrednost modula E_s približava nuli, vrednosti momenata M_t^o stalno rastu, (Ukoliko inače nisu, — u specijalnom slučaju, — jednake nuli).

b) Veličina momenata M_t^o jako zavisi od odnosa spoljnih sila $S_B : S_A$. Postoji, međutim, jedan odnos sila $S_B : S_A$ za koji će te vrednosti momenata biti jednake nuli. U ispitivanom slučaju taj odnos gotovo ne zavisi od promena modula tla. Za promene modula deformacija tla od 40 do 1000 kg/cm² promena najpovoljnijeg odnosa sila $S_B : S_A$ kreću se od vrednosti 0.78 do 0,81.

To se najbolje vidi na dijagramu na sl. 41 u kome je data zavisnost momenata M_t^o od odnosa spoljnih sila $S_B : S_A$, i to za razne vrednosti modula E_s .

I ovde, kao i ranije, vidi se da će za izvestan odnos spoljnih sila biti momenti M_t^o u osloncu B jednaki nuli.

Taj najpovoljniji odnos sila S u ispitivanom slučaju vrlo malo zavisi od promena modula deformacija E_s (vidi sl. 41), tako da se može smatrati, ako smo sa opterećenjem u blizini najpovoljnijeg odnosa sila S , da su — u normalnim slučajevima raspona konzola — momenti M_t^o u sistemu S_t skoro nezavisni od promena modula deformacija tla (vidi tablicu na dijagramu 41). Jedino ako je raspon konzola velik, a relativna krutost sistema I_t mala, promene E_s utiču znatnije na najpovoljniji odnos sila S , (vidi dijagram na sl. 47 i 48).

c) Kad su sleganja oslonaca konstrukcije međusobno jednaka pri $I_k = 0$ i za određeno opterećenje, — momenti M_t^o postaju jednaki nuli.

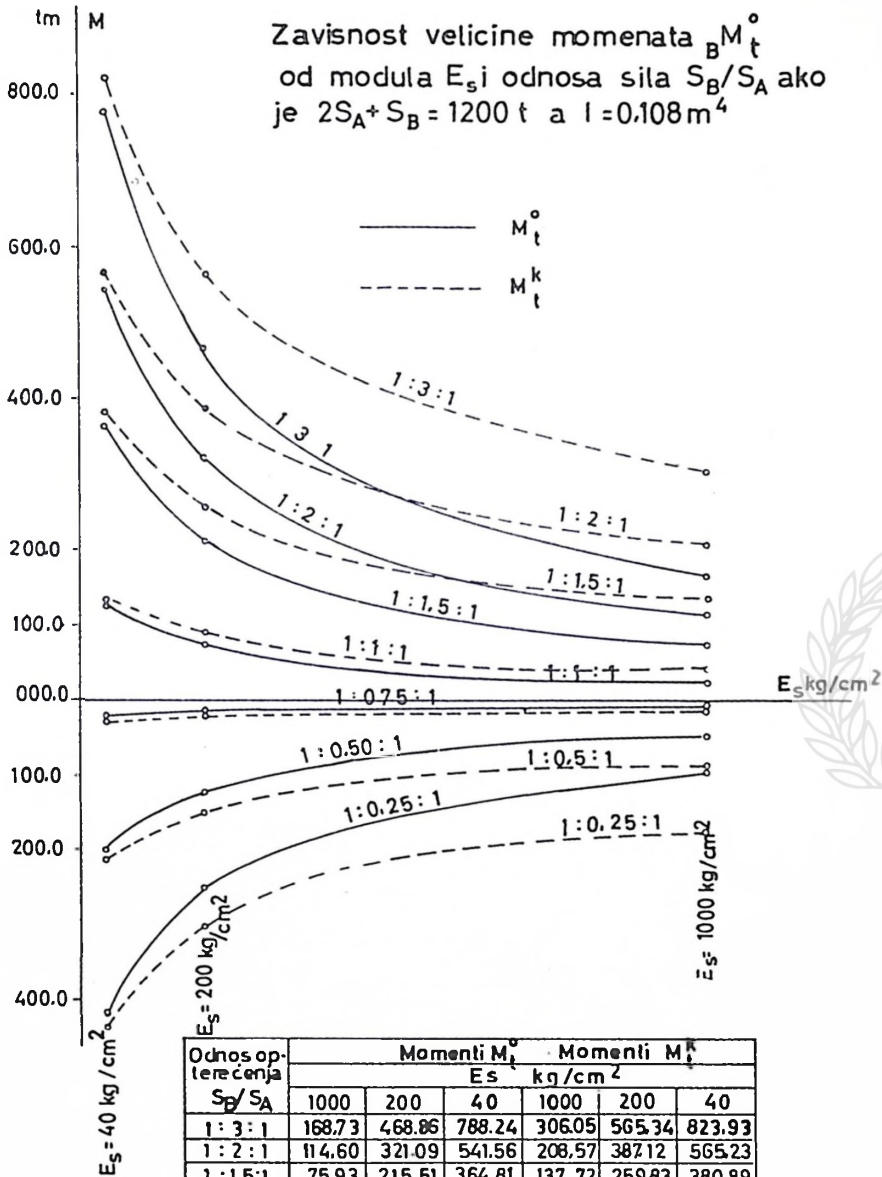
d) U slučaju kad je $I_k = 0$ i kad se menja modul deformacija E_s , promene uticaja usled razlika oslonačkih sila su velike (momenti M_t^o). Međutim, ako I_k teži ka beskonačnosti *menjanjem modula deformacija E_s , ti uticaji se neznatno menjaju* (momenti M_t^o , vidi tablicu I.).

Na dijagramu na sl. 42 data je zavisnost razlika u sleganjima oslonaca ΔU od odnosa $S_B : S_A$ i to za razne vrednosti modula E_s .

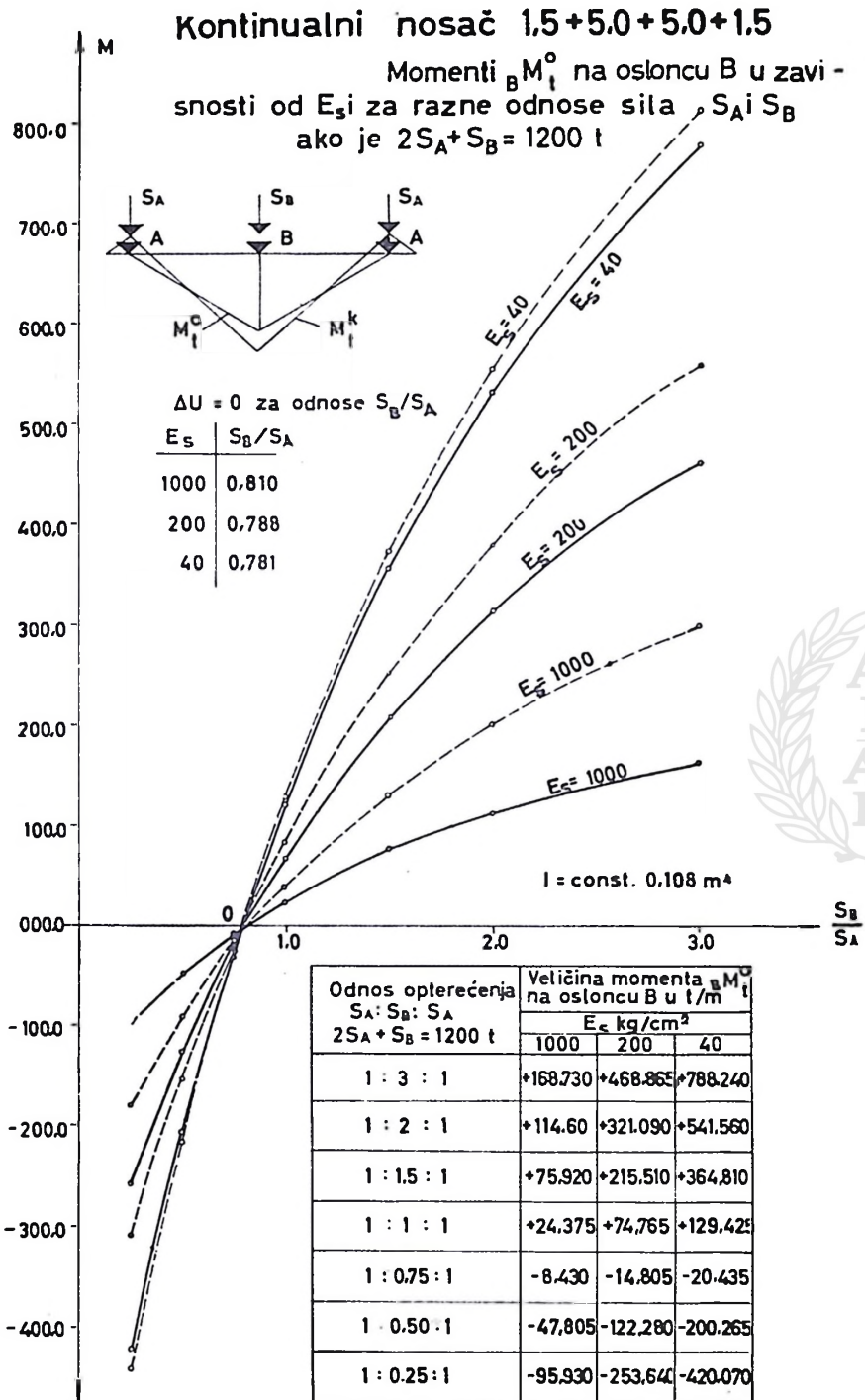
Na dijagramu na sl. 43 su prikazana sleganja pojedinih oslonaca za razne vrednosti E_s .

Uticaj transverzalnih sila T_t^o nije razmatran detaljnije, jer su ti uticaji obično manji i ne igraju znatniju ulogu kod dimenzioniranja ovakvih konstrukcija. Radi poređenja date su na dijagramima 40 i 41 i vrednosti momenta M_t^k .

Kontinualni nosač 1.5 + 5.0 + 5.0 + 1.5



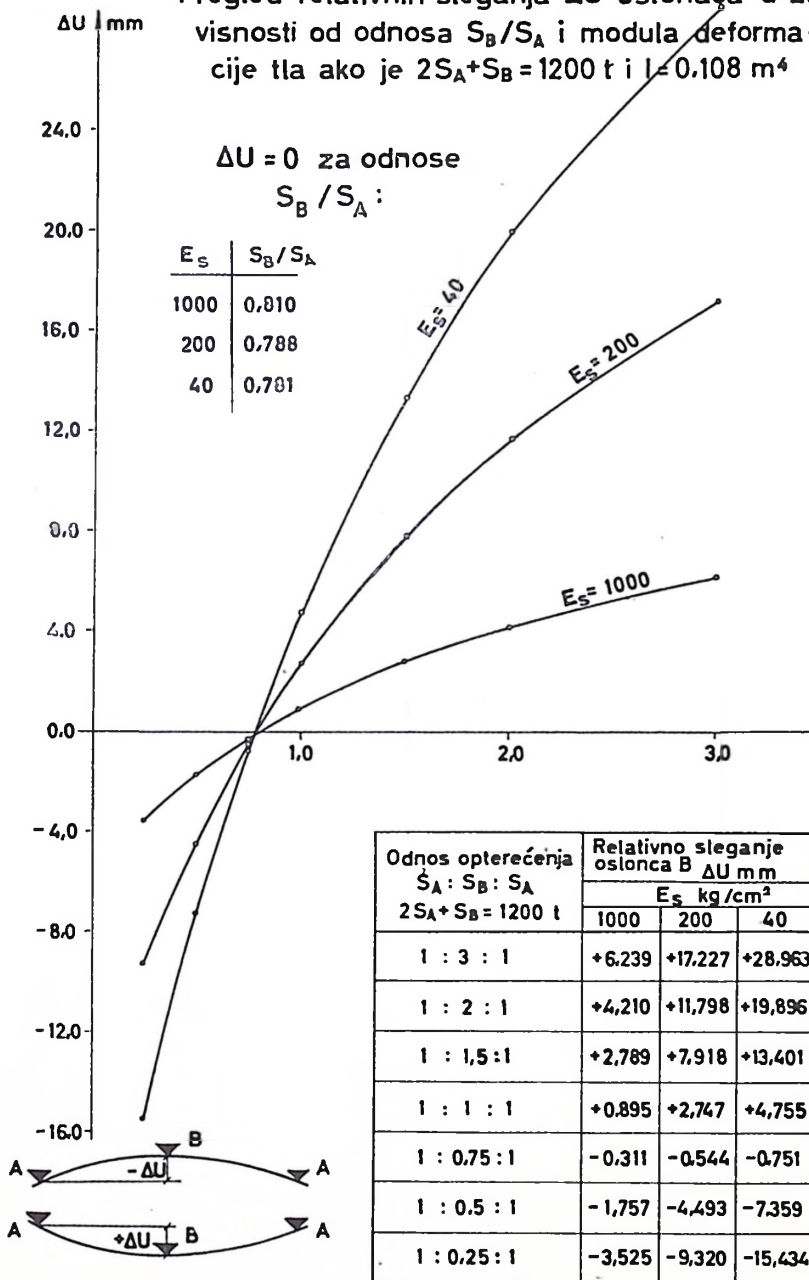
Odnos opterećenja S_B/S_A	Momenti M_t^o - Momenti M_t^k					
	E_s kg/cm ²					
	1000	200	40	1000	200	40
1:3:1	168.73	468.86	788.24	306.05	565.34	823.93
1:2:1	114.60	321.09	541.56	208.57	387.12	565.23
1:1.5:1	75.93	215.51	364.81	137.72	259.83	380.89
1:1:1	24.38	74.77	129.43	44.20	90.11	135.09
1:0.75:1	8.43	14.61	20.44	15.30	17.90	21.33
1:0.50:1	47.81	122.28	200.27	86.73	147.51	209.03
1:0.25:1	95.93	253.64	420.07	174.02	305.92	438.44



Sl. 41

Kontinualni nosač 1,5+5,0+5,0+1,5

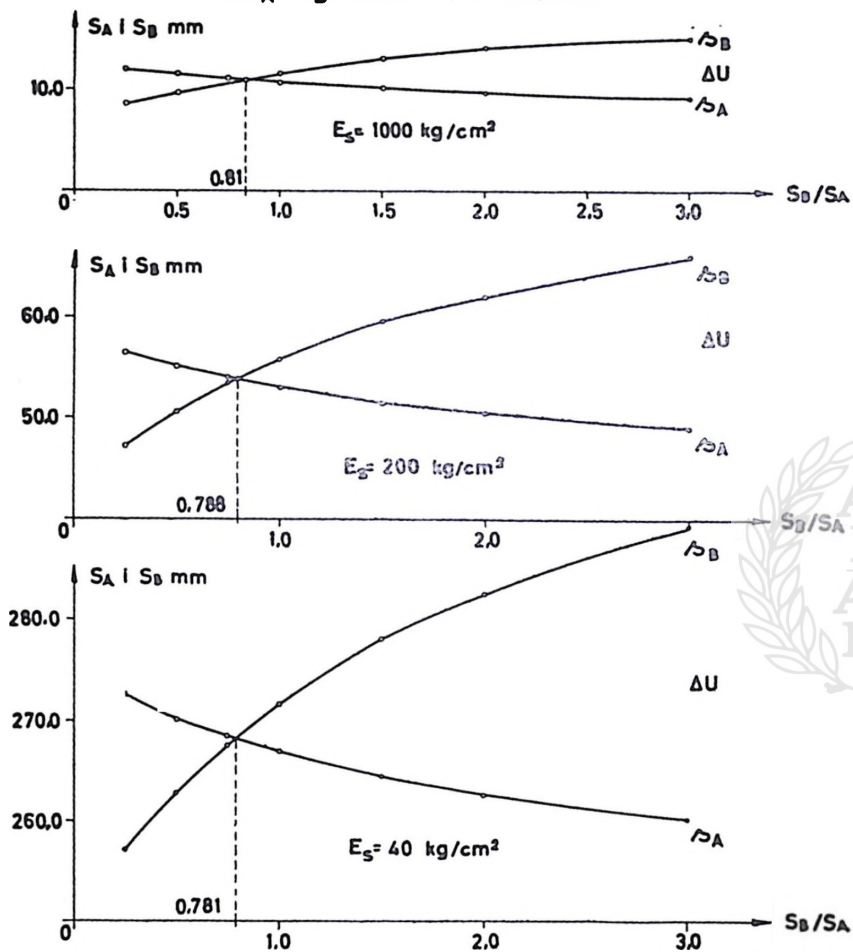
Pregled relativnih sleganja ΔU oslonaca u zavisnosti od odnosa S_B/S_A i modula deformacije tla ako je $2S_A+S_B=1200\text{ t}$ i $I=0,108\text{ m}^4$



Sl. 42

Kontinualni nosač 1,5+5,0+5,0+1,5

Apsolutno sleganje oslonaca sistema S_t u zavisnosti od E_s i odnosa sile S_B/S_A ako je $2S_A + S_B = 1200 \text{ t}$ i $l = 0.108 \text{ m}^4$



Odnos $S_A : S_B : S_A$	Apsolutno sleganje oslonaca $\Delta_i B; \Delta_{Ai} \text{ os mm}$					
	$E_s \text{ kg/cm}^2$					
	1000		200		40	
	Δ_A	Δ_B	Δ_A	Δ_B	Δ_A	Δ_B
1 : 3 : 1	9,155	15,394	49,019	66,242	260,213	289,205
1 : 2 : 1	9,770	13,980	50,554	62,348	262,697	282,593
1 : 0.5 : 1	10,181	12,970	51,650	59,566	264,521	277,928
1 : 1 : 1	10,728	11,623	53,112	55,857	266,952	271,707
1 : 0.75 : 1	11,077	10,766	54,042	53,497	268,499	267,748
1 : 0.50 : 1	11,495	9,738	55,159	50,665	270,356	262,997
1 : 0.25 : 1	10,006	8,489	56,523	47,203	272,625	257,190

3) UTICAJ VELIČINE RASPONA KONZOLA

Radi ilustracije uticaja promena raspona konzola na veličinu i pojavu uticaja usled razlika oslonačkih sila izvršen je proračun sistema S , sa krutosti $I_t = 0,587 \text{ m}^4$ i za razne raspone konzola.

Usvojeni su rasponi konzola od 1,00, 1,50 i 2,50 m.

U dijagramu na sl. 44 se vidi da se odnos $S_B : S_A$ za razne raspone konzola menja, ako se želi da momenti M_i^o u osloncu B budu jednaki nuli. Taj odnos varira od,

0,406 za raspon konzola od 2,50 m
do 1,019 za raspon konzola od 1,00 m.

Iz ovoga se može izvesti zaključak da se podešavanjem raspona konzola može da utiče na veličinu momenata M_i^o .

Na daljim dijagramima na sl. 45 i sl. 46 dati su odnosi i promene veličina ΔU u zavisnosti od odnosa $S_B : S_A$ i raspona konzole kao i promene sleganja s_A i s_B za razne slučajeve. Na dijagramima 47 i 48 dati su uticaji promena I_t , E_s i I_t na promene najpovoljnijeg odnosa S_B/S_A . Iz dijagrama na sl. 48 vidi se da se samo kod konzola sa velikim rasponom i malom relativnom krutosti javljaju znatnije promene u najpovoljnijem odnosu S_B/S_A . U drugim slučajevima, — kod raspona konzola koji se obično u praksi javljaju, — može se gotovo smatrati da je najpovoljniji odnos S_B/S_A nezavisan od promena I_t i E_s .

4) USLOV ZA IŠČEZAVANJE MOMENATA M_i^o I M_k^o U KONSTRUKCIJI

Za određeno opterećenje korisno je da je konstrukcija konstruisana tako da uticaji usled razlika oslonačkih sila postanu jednaki nuli.

Iz dijagrama na slikama 37 i 41 se vidi da, bilo da se menja krutost I_t ili modul E_s , postoji izvestan odnos za pojedine slučajeve gde su ti uticaji jednaki nuli. Takvo se stanje javlja kad su sleganja oslonaca međusobno jednaka. Tada u konstrukciji sa $I_k = 0$ nema momenata $M_{i,k}^o$, a u konstrukciji sa $I_k \rightarrow \infty$ nema momenata $M_{k,i}^o$.

Da bi se dobio uslov pod kojim će svi ovi uticaji biti jednaki nuli, treba poći od jednačine (19), koja glasi,

$$s_{A,1}^g \cdot S_A + s_{A,1}^k \cdot S_B = s_{B,1}^g \cdot S_A + s_{B,1}^k \cdot S_B \cdot \cdot \cdot \cdot (19a)$$

Umesto veličina S' unesene su vrednosti S pošto u slučaju jednakih sleganja oslonaca sile S moraju ostati nepromenjene za slučaj kad je $I_k = 0$.

Deljenjem jednačine (19a) sa S_A i nalaženjem odnosa $S_B : S_A$ dobijamo da je,

$$\frac{S_B}{S_A} = \frac{s_{A,1}^g - s_{B,1}^g}{s_{B,1}^k - s_{A,1}^k} \cdot \cdot \cdot \cdot (25)$$

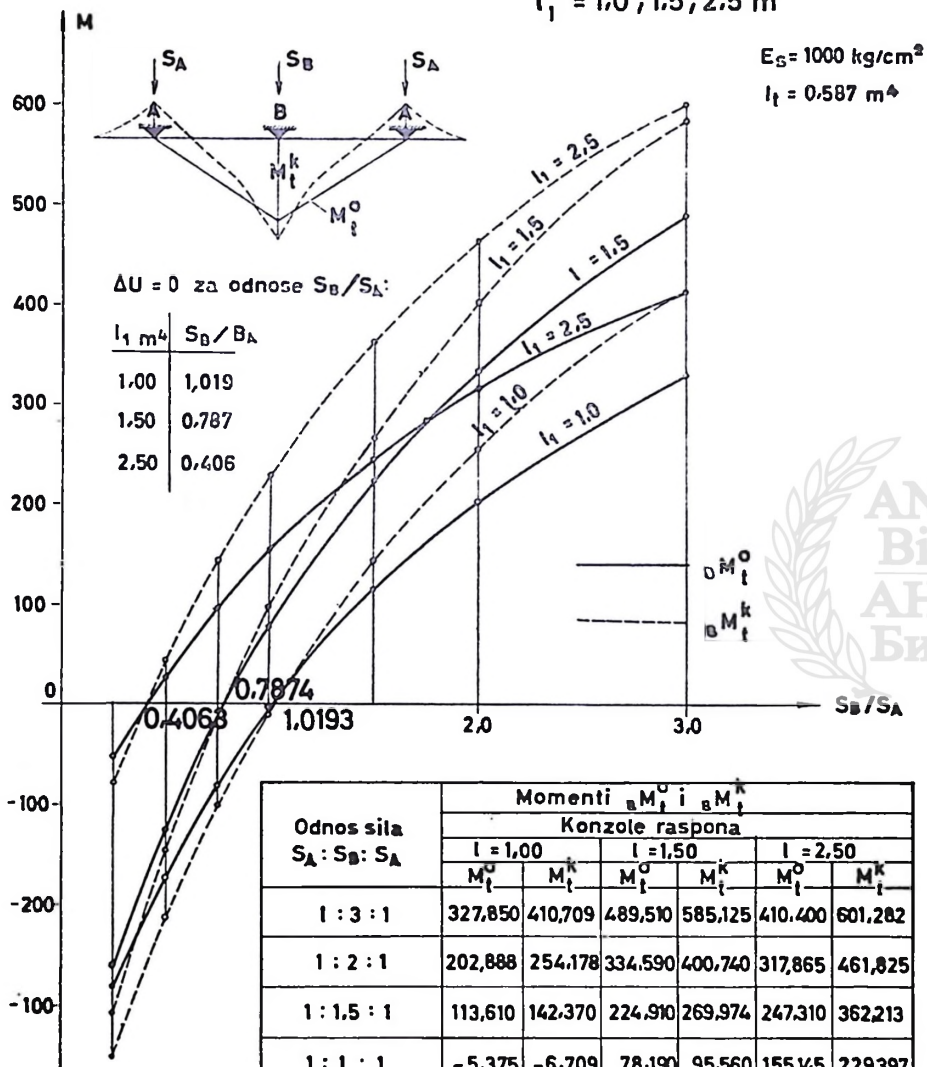
Jednačina (25) predstavlja uslov pri kome moraju biti svi momenti M_i^o jednaki nuli. Iz jednačine (25) se vidi da će ti uticaji biti jednaki nuli ako se odnos sila, $S_B : S_A$, odnosi kao razlika jediničnih sleganja oslonaca za osnovne sisteme, u ovom slučaju za gredu sa prepustima i dvostruku konzolu (vidi sl. 49).

Kontinualni nosač $l_1 + 5,00 + 5,00 + l_1$

Momenti ${}_B M_t^0$ ispod oslonca B.

Momenti ${}_B M_t^k$ sa odnosom
sila S_A/S_B za razne krutosti sistema S_t .

$l_1 = 1,0, 1,5, 2,5$ m



Odnos sila $S_A : S_B : S_A$	Momenti ${}_B M_t^0$ i ${}_B M_t^k$					
	Konzole raspona					
	$l = 1,00$		$l = 1,50$		$l = 2,50$	
	M_t^0	M_t^k	M_t^0	M_t^k	M_t^0	M_t^k
1 : 3 : 1	327,850	410,709	489,510	585,125	410,400	601,282
1 : 2 : 1	202,888	254,178	334,590	400,740	317,865	461,825
1 : 1,5 : 1	113,610	142,370	224,910	269,974	247,310	362,213
1 : 1 : 1	-5,375	-6,709	78,190	95,560	155,145	229,397
1 : 0,75 : 1	-81,115	-101,573	15,040	15,421	99,065	145,007
1 : 0,50 : 1	-171,990	-215,490	126,935	148,811	29,660	43,445
1 : 0,25 : 1	-283,070	-354,553	263,670	311,388	-54,970	-88,520

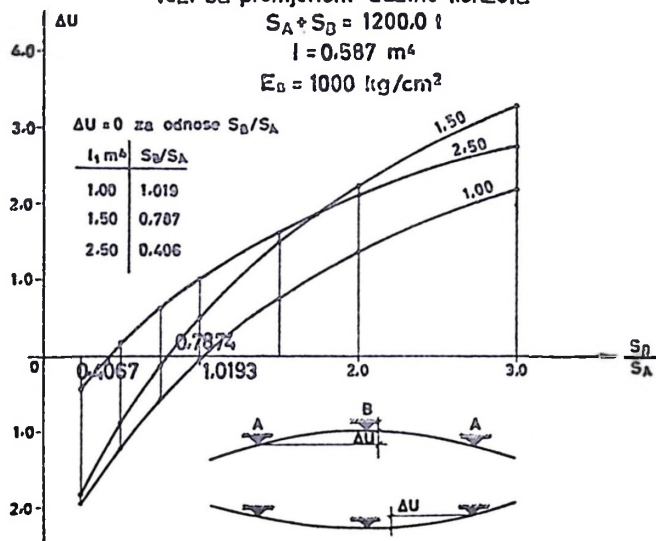
Kontinualni temeljni nosač $l_1 + 5,0 + 5,0 + l_1$

Relativna sleganja oslonaca ΔU u
vozi sa promjenom dužine konzola

$$S_A + S_D = 1200,0 \text{ t}$$

$$I = 0,587 \text{ m}^4$$

$$E_D = 1000 \text{ t/g/cm}^2$$



Odnos sila $S_A : S_B : S_C$	Relativno sleganje oslonaca B ΔU u mm		
	KONZOLE $l_1 =$		
	1,00	1,50	2,00
1 : 3 : 1	+2,216	+3,290	+2,774
1 : 2 : 1	+1,372	+2,762	+2,148
1 : 1,5 : 1	+0,768	+1,519	+1,672
1 : 1 : 1	-0,036	+0,529	+1,049
1 : 0,75 : 1	-0,548	-0,101	+0,670
1 : 0,50 : 1	-1,163	-0,857	-0,201
1 : 0,25 : 1	-1,914	-1,781	-0,372

Sl. 45

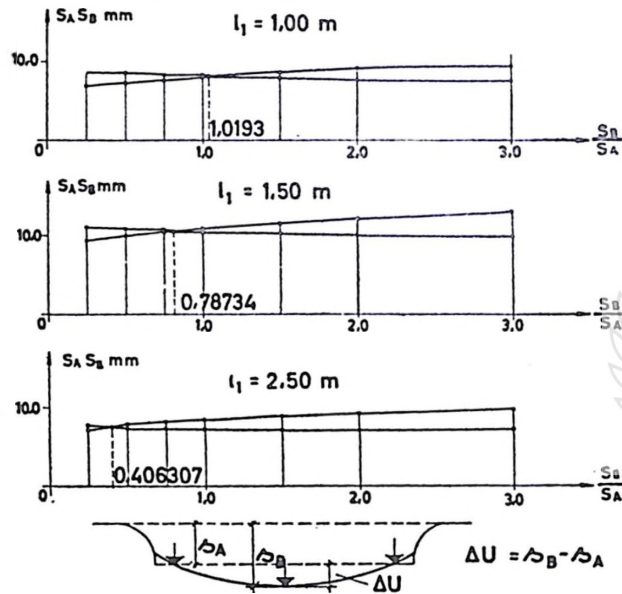


Kontinualni temeljni nosač 1,5 - 5,0 - 5,0 - 1,5

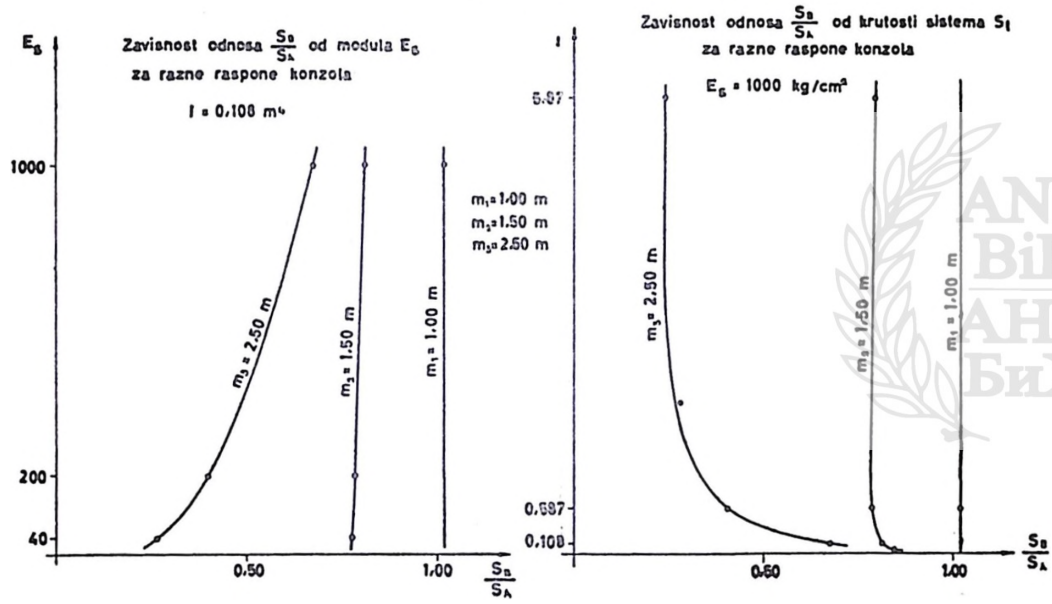
Apsolutna sleganja oslonaca sistema St
u vezi sa odnosom sila S_B i S_A kad

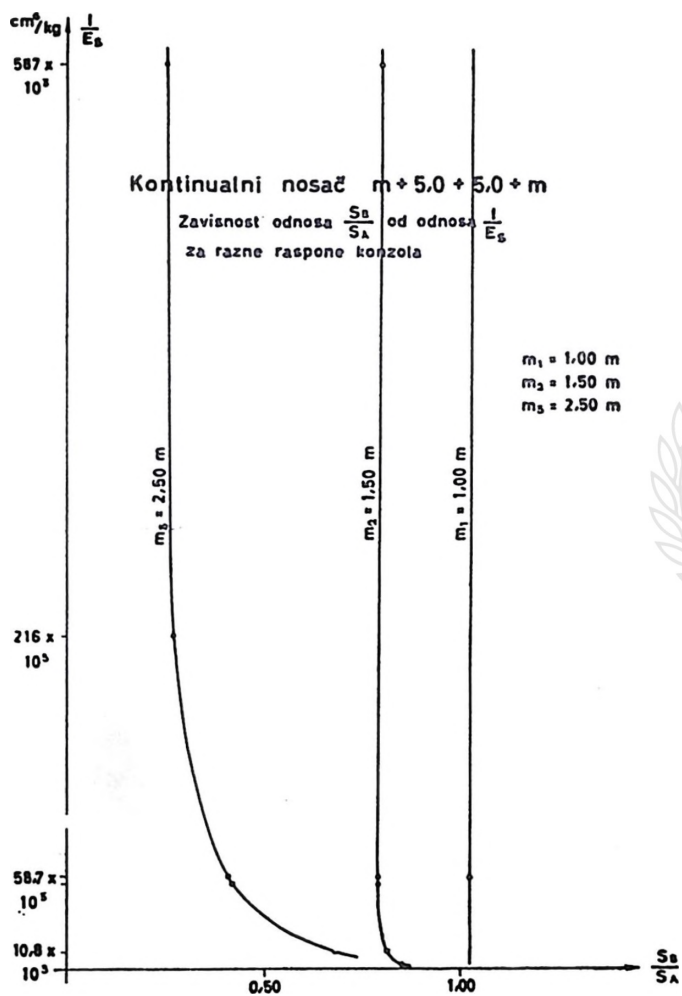
je $2S_A + S_B = 1200$ t

Konzole raznih prepusta l_1 $E_s = 1000$ kg/cm²



Odnos sila $S_A/S_B/S_A$	Apsolutna sleganja oslonaca AiB konzole					
	KONZOLE					
	$l_1 = 1,0$		$l_1 = 1,5$		$l_1 = 2,5$	
	S_A	S_B	S_A	S_B	S_A	S_B
1 : 3 : 1	7,552	9,982	9,846	13,136	7,127	9,901
1 : 2 : 1	7,847	9,218	10,133	12,395	7,235	9,366
1 : 1,5 : 1	8,040	8,808	10,343	11,862	7,311	8,983
1 : 1 : 1	8,307	8,271	10,623	11,152	7,429	8,472
1 : 0,75 : 1	8,484	7,935	10,801	10,700	7,479	8,148
1 : 0,50 : 1	8,691	7,528	11,015	10,158	7,557	7,757
1 : 0,25 : 1	8,943	7,030	11,276	9,495	7,652	7,281

Kontinualni nosač $m \div 5.0 \div 5.0 \div m$ 



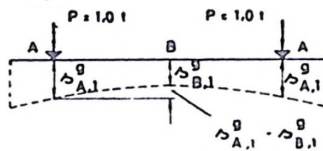
Sl. 48

Iz ovoga takođe sledi i to da *ako se hoće da vidi za koji će odnos opterećenja biti razlike oslonačkih sila jednake nuli, potrebno je samo naći jedinična sleganja oslonaca za osnovne sisteme i iz njihovih razlika, — prema jednačini (25), — dobiće se odnos sila $S_B : S_A$ pri kome će momenti M_i^o biti jednaki nuli.*

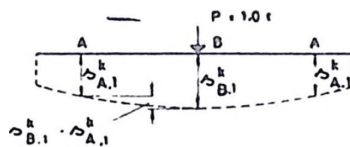
Kontrolom pomoću jednačine (25) dobiveno je za slučaj nosača koji je ispitivan sa konzolama od 1,50 m da odnos $S_B : S_A$ mora da bude (za $I_s = 0,108 \text{ m}^4$ i $E_s = 200 \text{ kg/cm}^2$)

$$S_B : S_A = \frac{0,01444 - 0,01934}{0,00722 - 0,01344} = 0,788$$

Greda sa prepustlima



Dvostruka konzola



Jednačina jednakosti sleganja oslonaca glasi

$$\Delta_{A,1}^g S_A = \Delta_{A,1}^h S_B = \Delta_{B,1}^g S_A = \Delta_{B,1}^h S_B$$

Uslov za jednaka sleganja oslonaca je

$$\frac{S_B}{S_A} = \frac{\Delta_{A,1}^g - \Delta_{B,1}^g}{\Delta_{B,1}^h - \Delta_{A,1}^h}$$

Sl. 49

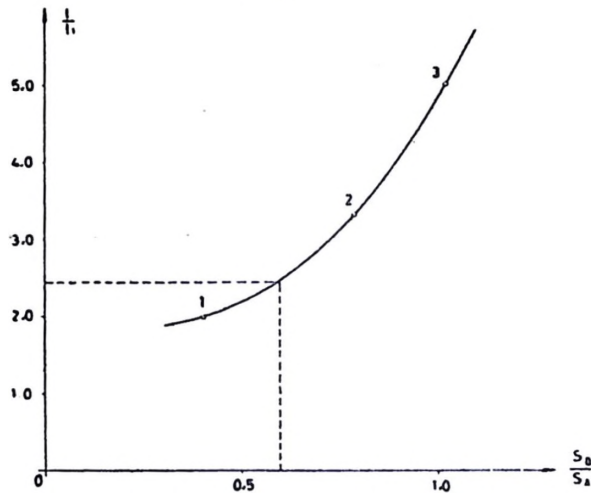
Na isti način dobijene su vrednosti tih odnosa date na dijagramima sl. 35 i 39.

Dijagrami na sl. 37 i 41 ukazuju na činjenicu da oko tačkaka 0 postoje žarišta. U blizini tih tačkaka, — za ispitivani slučaj, — promene krutosti sistema S_i i modula deformacija E_s praktično ne utiču na veličine momenata M_i^o i M_k^o .

Stoga ako je jedna konstrukcija — sa normalnim rasponom konzola ili velikim rasponima konzola, ali sa velikom relativnom krutosti, — projektovana tako da su razlike oslonačkih sila jednake nuli, mogu se praktično menjati i veličine I_1 i E_s po volji; znatnijih promena u naprezanjima i pojava momenata M_t^o i M_k^o neće biti.

Kontinualni nosač na 2 polja

Diagram $\frac{1}{I_1} - \frac{S_B}{S_A}$ za slučaj kad su $B = 6.00 \text{ m}$
 momenti M_t^o i M_k^o jednaki nuli $L = 11.00 - 14.00 \text{ m}$



Uslov da su M_t^o i M_k^o jednaki nuli glasi:

$$\frac{S_B}{S_A} = \frac{a}{A \cdot l} - \frac{b}{B \cdot l} = \frac{g}{A \cdot l} - \frac{g}{B \cdot l}$$

$l = 5.00 \text{ m}$



Za odnos $\frac{S_B}{S_A} = 0.60$ dobijamo iz dijagrama da $\frac{1}{I_1}$

mora biti 2.40 ako se želi da u konstrukciji momenti M_t^o i M_k^o

i transverzalne sile T_t^o i T_k^o budu jednaki nuli

Prepusi konzole mora onda biti 2.40 m za $l = 5.00 \text{ m}$

Sl. 50

Iz odnosa koji su dati na dijagramu sl. 44 dobijen je dijagram na sl. 50, gde su uzeti na apscisi najpovoljniji odnosi $S_B : S_A$, a na ordinati odnosi raspona polja l i raspon konzola l_1 . Prema tome dijagramu, ako je zadan sistem sila spoljnog opterećenja konstrukcije S_B i S_A , možemo, — ako smo sračunali liniju zavisnosti koja je data na dijagramu 48, — odmah dobiti za određeni i zadati odnos spoljnih sila S veličinu raspona konzola za uslov da su momenti M_t^o i M_k^o jednaki nuli.

III. DEO

DISKONTINUALNE TRAKE I UTICAJ KRUTOSTI NA PRORAČUN KONSTRUKCIJA

A. O DISKONTINUALNIM TRAKAMA UOPŠTE

1) OBJAŠNENJE POJMA DISKONTINUALNE TRAKE

Neka je data beskonačna traka položena na elastičan, homogen i izotropan poluprostor. Traka je putem stubova postavljenih na jednakim rastojanjima opterećena jednakim silama P . Širina trake je B , razmak stubova l .

Ako je traka beskonačno duga, onda će se pod gornjim pretpostavkama svi oslonci ispod stubova slegati za jednaku meru te će se dobiti ispod svakog pojedinog polja trake u intervalu dužine l identična raspodela pritisaka na kontaktu sistema S_i i tla.

Ustanovljeno je da se ta raspodela može sa dovoljno tačnosti smatrati sinusoidom (Ref. 6 str. 19) sa većim i manjim visinama talasa u zavisnosti od krutosti trake. Ako se ta traka može da smatra krutom, raspodela pritisaka takve trake će biti *pravoliniska*.

Ako traka nije beskonačna, javljaju se uslovi na krajevima koji menjaju sliku. Svi oslonci se više ne sležu jednako, srednji se sležu više, a krajnji manje. Sistem S_i povijanjem trake biva naprezan na savijanje i razlika u sleganju oslonaca biva sve to veća što je tlo stišljivije.

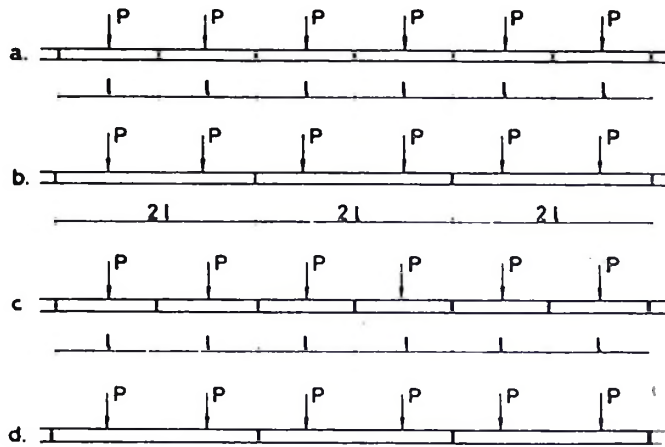
Momenti savijanja M_i^0 usled nejednakog sleganja oslonaca, — kod konstrukcija sa $I_k=0$, — su to veći što je krutost sistema S_i veća za izvestan slučaj opterećenja i pri konstantnom modulu E_i . Osim toga oni se u znatnoj meri menjaju sa promenama spoljnih sila i postaju često po veličini znatni (vidi dijagrame na sl. 33, 37 i 41).

Ti momenti savijanja u sistemu S_i mogu se svesti na nulu, deljenjem razdvajanjem trake razdelnicama. To se može učiniti na razne načine. Kao rezultat dobivamo niz fundamenata samaca poređanih jedan pored drugoga, ili niz greda sa prepustima poređanih opet jedna pored druge, koji mogu biti međusobno povezani zglobovima ili ne. Dobija se *diskontinualna traka*.

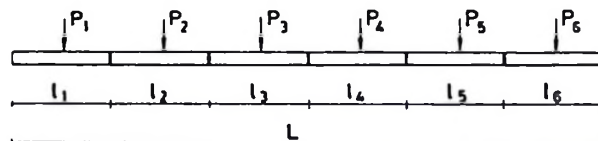
Pritom deoba treba da bude tako izvršena da se u sistemu S_i ne mogu pojaviti momenti savijanja usled nejednakog sleganja pojedinih oslonaca. Pretpostavlja se da je veza između sistema S_i i stubova tako izvedena da se momenti savijanja u stubovima ne mogu pojaviti, ili se mogu zanemariti.

Ako se tako postupi, može se postavljanje razdelnica izvršiti na nekoliko načina:

- postaviti razdelnicu u sredini između svaka dva stuba, pa dobiti niz nezavisno postavljenih i međusobno nevezanih samaca (sl. 51a).
- postaviti razdelnice u sredini između svaka druga dva stuba, pa dobiti niz nezavisno postavljenih greda sa dva prepusta, položenih jedna do druge (sl. 51b),



a - d. Sistem beskonačnih diskontinualnih traka



$$l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = \dots = l_6$$

$$P_1 = P_2 = P_3 = \dots = P_6$$

Širina trake konstantna i jednaka B

e. Konačna diskontinualna traka

Sl. 51

- deljenjem trake kao pod a) i povezivanjem pojedinih članova zglobovima dobivamo traku gusenice sa članovima oslonjenim na jednom osloncu (sl. 51c),
- deljenjem trake kao pod b) i povezivanjem pojedinih članova zglobovima dobivamo traku gusenice sa članovima oslonjenim na dva oslonca (sl. 51d).

2) KAKVE PROMENE U TLU I KONSTRUKCIJI IZAZIVA DISKONTINUALNA TRAKA

Ako posmatramo konstrukciju sa $I_k=0$, deljenjem kontinualne temeljne trake na niz pojedinačnih članova izazivamo promene u liniji raspodele pritisaka ispod pojedinih oteka trake, upoređujući ove pritiske sa onim kod kontinualnih traka.

Sistem S_i je drugačije opterećen, i biće oslobođen od momenata savijanja M_i^0 , koji potiču od nejednakog sleganja oslonaca.

Prosečno opterećenje tla ostaje i u ovom slučaju jednako onom kod kontinualne trake, samo će se sada javiti lokalne promene u pritislima, pregrupisanja pritisaka. Sa promenama raspodele pritisaka odigraće se izvesne promene i u sleganjima.

Postavlja se, prema tome, problem da se ispita kakve će biti raspodele pritisaka ispod diskontinualnih traka i da se u zavisnosti od krutosti pojedinih članova sistema S_i vidi kako treba projektovati i računati diskontinualne trake.

Primena diskontinualnih traka korisna je u slučajevima gde je krutost sistema S_k mala u odnosu na krutost sistema S_i , ili je jednaka nuli, a uslovi opterećenja konstrukcije i osobina tla su takvi da izazivaju znatne razlike u sleganjima oslonaca, tj. znatne momente M_i^0 .

B. PRORAČUN DISKONTINUALNIH TRAKA

Rešavanje diskontinualne trake svodi se na iznalaženje stvarne raspodele pritisaka na tlo i konstrukciju sistema S_i .

Iste osnovne pretpostavke koje su usvojene kod razmatranja kontinualnih traka usvajaju se i ovde (vidi II deo, str. 13).

Pretpostavimo da imamo dugačku traku širine B i dužine L , opterećenu jednakim silama P , koje deluju na pojedinačne i jednake članove diskontinualne trake. Dužina pojedinih članova trake neka je međusobno jednaka. Označimo te dužine sa l_1 do l_6 (vidi sl. 51e).

U ovom slučaju će srednja polja, recimo l_3 i l_4 , imati drugačije raspodele od krajnjih polja l_1 i l_6 , dok će u poljima l_2 i l_5 biti raspodele negde između raspodela u srednjim i krajnjim poljima.

Zbog toga je potrebno posmatrati posebno pojedine grupe članova diskontinualne trake. Pošto uticaj daljih članova na raspodelu jednog posmatranog polja jako brzo opada i smanjuje se na neznatnu meru, to ćemo se u posmatranjima ograničiti samo na 5 do 6 polja, 5 do 6 članova.

Posmatrajmo prvo srednja polja, zatim krajnja i naposletku polja do krajnjih.

Zbog obimnosti materije biće razmatrana samo diskontinualna traka sa nepovezanim samcima jednake dužine, opterećena jednakim silama.

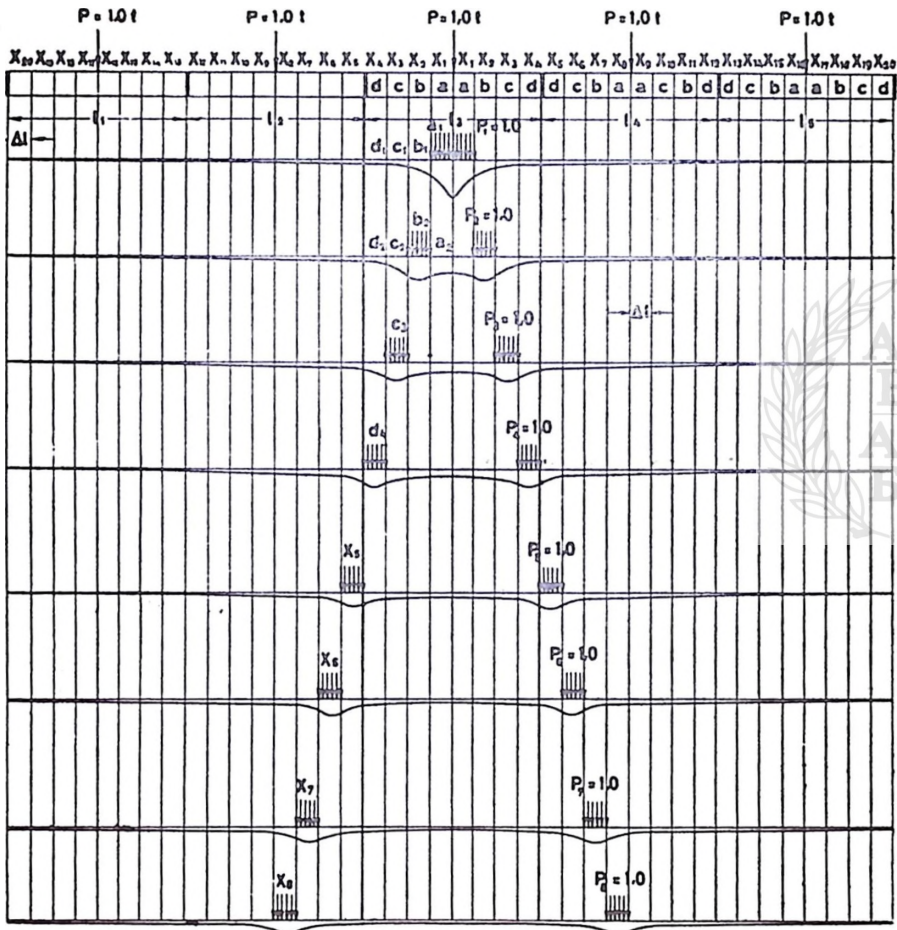


I. SREDNJE POLJE DISKONTINUALNIH TRAKA

Izdvojmo i posmatrajmo deo beskonačne diskontinualne trake nezvanih samaca sa 5 članova (5 samaca), jednake širine B i jednake dužine l . Postupak za rešenje problema je sledeći:

Srednje polje diskontinualne trake samaca

Šema postavljanja jednačina



i t. d.

Sl. 52

1) Za jednako podeljeno opterećenje jedne lamele dužine l i širine B treba naći liniju sleganja tla u pravcu širine lamele do udaljenosti od lamele na dužini 5.1 (vidi sl. 52).

2) Za srednje polje, za razne položaje parova sila $P = 1,0 t$, izvršiti superpoziciju sleganja i naći uticaje svih tih položaja jediničnih sila na lamele ispod srednjeg člina l_3 .

3) Sračunati za parove sila $P = 1 t$ ugibanja nosača u sredinama lamela, pretpostavljajući unapred izvesnu krutost nosača, I_1 .

4) Postaviti jednačine koje će izjednačiti deformacije tla sa deformacijama nosača i koje će u ovom slučaju glasniti:

$$\begin{aligned}\sum_1^n X_n \cdot s_{a,n} - 1000 &= \sum_1^n X_n \cdot \eta_{a,n} \\ \sum_1^n X_n \cdot s_{b,n} - 1000 &= \sum_1^n X_n \cdot \eta_{b,n} \\ \sum_1^n X_n \cdot s_{c,n} - 1000 &= \sum_1^n X_n \cdot \eta_{c,n} \\ \sum_1^n X_n \cdot s_{d,n} - 1000 &= \sum_1^n X_n \cdot \eta_{d,n} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (26)\end{aligned}$$

Dobili smo 4 nehomogene linearne jednačine sa 20 nepoznatih, X_1 do X_{20} . Međutim, nepoznate su međusobno jednake kod pojedinih samaca, jer se pretpostavlja da je diskontinualna traka beskonačna, te će biti,

$$\begin{aligned}X_1 &= X_8 = X_9 = X_{16} = X_{17} \\ X_2 &= X_7 = X_{10} = X_{15} = X_{18} \\ X_3 &= X_6 = X_{11} = X_{14} = X_{19} \\ X_4 &= X_5 = X_{12} = X_{13} = X_{20} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (27)\end{aligned}$$

Zamenom ovih jednačina u jednačine (26) dobiće se onoliko jednačina na koliko je lamela podeljena polovina jednog polja, tj. u ovom slučaju 4 jednačine sa 4 nepoznate veličine X_1 do X_4 , koje kad se srede glase:

$$\begin{aligned}\Sigma X_1 (s_{a,1} + s_{a,8} + s_{a,9} + s_{a,16} + s_{a,17}) + \Sigma X_2 (s_{a,2} + s_{a,7} + s_{a,10} + s_{a,15} + s_{a,18}) + \\ \Sigma X_3 (s_{a,3} + s_{a,6} + s_{a,11} + s_{a,14} + s_{a,19}) + \Sigma X_4 (s_{a,4} + s_{a,5} + s_{a,12} + s_{a,13} + s_{a,20}) - \\ 1000 = X_1 \eta_{a,1} + X_2 \eta_{a,2} + X_3 \eta_{a,3} + X_4 \eta_{a,4}\end{aligned}$$

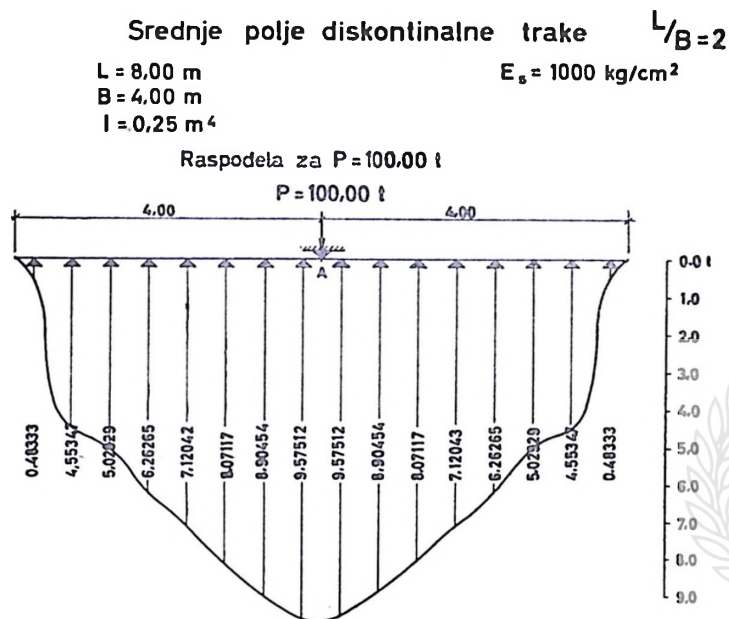
$$\begin{aligned}\Sigma X_1 (s_{b,1} + s_{b,8} + s_{b,9} + s_{b,16} + s_{b,17}) + \Sigma X_2 (s_{b,2} + s_{b,7} + s_{b,10} + s_{b,15} + s_{b,18}) + \\ \Sigma X_3 (s_{b,3} + s_{b,6} + s_{b,11} + s_{b,14} + s_{b,19}) + \Sigma X_4 (s_{b,4} + s_{b,5} + s_{b,12} + s_{b,13} + s_{b,20}) - \\ 1000 = X_1 \eta_{b,1} + X_2 \eta_{b,2} + X_3 \eta_{b,3} + X_4 \eta_{b,4}\end{aligned}$$

.....
.....
.....

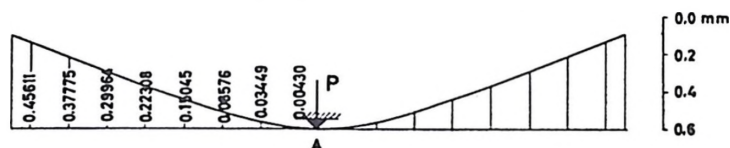
$$\begin{aligned}\Sigma X_1 (s_{d,1} + s_{d,8} + s_{d,9} + s_{d,16} + s_{d,17}) + \Sigma X_2 (s_{d,2} + s_{d,7} + s_{d,10} + s_{d,15} + s_{d,18}) + \\ \Sigma X_3 (s_{d,3} + s_{d,6} + s_{d,11} + s_{d,14} + s_{d,19}) + \Sigma X_4 (s_{d,4} + s_{d,5} + s_{d,12} + s_{d,13} + s_{d,20}) - \\ 1000 = X_1 \eta_{d,1} + X_2 \eta_{d,2} + X_3 \eta_{d,3} + X_4 \eta_{d,4} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (28)\end{aligned}$$

5) Rešenjem ovih jednačina dobijaju se odnosi sila X raspodele za srednje polje diskontinualne trake. Da bi bio zadovoljen uslov da je $P = 2 \cdot \sum_1^4 X$, treba dobijene vrednosti X pomnožiti sa odgovarajućim koeficijentom.

Nekoliko takvih linija raspodele dato je na priloženim dijagramima za razne vrednosti modula deformacija tla (vidi dijagrame na sl. 53-56).



Elastična linija trake i linija
sleganja tla



Razlike u ordinatama elastične linije i sleganja tla su tako male da se javljaju tek u petoj decimali

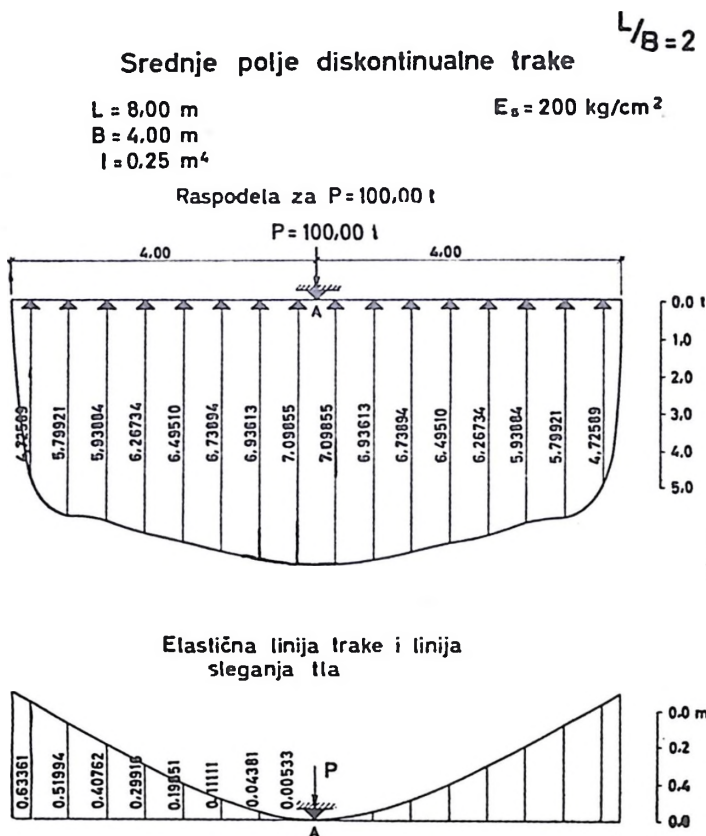
Ukupno sleganje fundamenata

$$\Delta_A = 2,30936 \text{ mm}$$

Sl. 53

Na isti način dobijeno je i nekoliko linija menjajući vrednost I , (vidi sl. 57).

Iz tih dijagrama se može konstatovati da se raspodela pritiska za relativno krut nosač u odnosu na tlo približava pravolinskoj raspodeli, a sa opadanjem krutosti da se smanjuju pritisci na krajevima a povećavaju u sredini. U izvesnom slučaju smanjivanjem relativne krutosti doći će do izdizanja krajeva nosača, kada bi pritisci bili negativni.



Razlike u ordinatama elastične linije i sleganja tla su tako malene da se javljaju tek u petoj decimali

Ukupno sleganje fundamenata

$$\Delta_A = 10,79906 \text{ mm}$$

Sl. 54

Pšoto, saglasno Ref. 6, za krutu beskonačnu traku opterećenu jednakim silama na jednakim rastojanjima, raspodela pritiska mora da bude ravnomerna, to se može odmah konstatovati da će i kod diskontinualne trake jako velike relativne krutosti biti raspodela pritiska ravnomerna. Stoga, momenti savijanja mogu u takvoj diskontinualnoj traci biti u maksimumu jednaki momentima savijanja traka opterećene ravnomernom raspodelom.

II. KRAJNJE POLJE DISKONTINUALNIH TRAKA

Dosada je računata raspodela za srednje polje posmatrajući sistem od 5 polja i uzimajući uticaj od po dva polja sa svake strane posmatranog srednjeg polja S i zamišljajući da se traka i dalje pruža. Raspodelu koja je dobijena na taj način usvojili smo kao raspodelu za srednje polje beskonačne diskontinualne trake, pošto dalja polja gotovo i ne utiču na liniju raspodele pritisaka ispod posmatranog polja nosača.

Srednje polje diskontinualne trake $L/B=2$

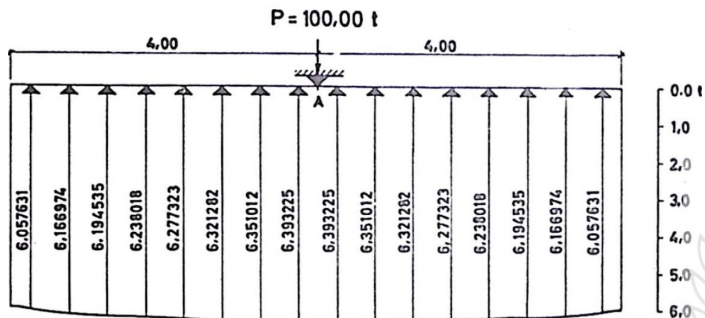
$L = 8,00 \text{ m}$

$E_s = 40 \text{ kg/cm}^2$

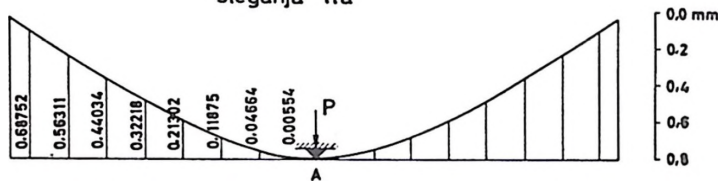
$B = 4,00 \text{ m}$

$I = 0,25 \text{ m}^4$

Raspodela za $P=100,00 \text{ t}$



Elastična linija trake i linija sleganja tla



Razlike u ordinatama elastične linije i sleganja tla su tako malene da se javljaju tek u petoj decimali

Ukupno sleganje fundamenata

$$\Delta_A = 52,89962 \text{ mm}$$

Sl. 55

Na sličan način biće izvršen i proračun kod nalaženja raspodele u poljima SK i K . Raspodele pritisaka u ovim poljima su nesimetrične, a sleganja ovih članova diskontinualne trake su manja.

Ako se želi da ostane na približno istom stepenu tačnosti kao i kod proračuna srednjeg polja, tj. ako zahtevamo da se uslovi poklapanja deformacija nosača i tla računaju i traže na istom broju tačaka i za polja SK i K kao i kod polja S , dobija se sistem sa velikim brojem jednačina, čije rešavanje zahteva mnogo vremena.

Srednje polje diskontinualne trake
za razne vrednosti E_s

$$L/B = 2$$

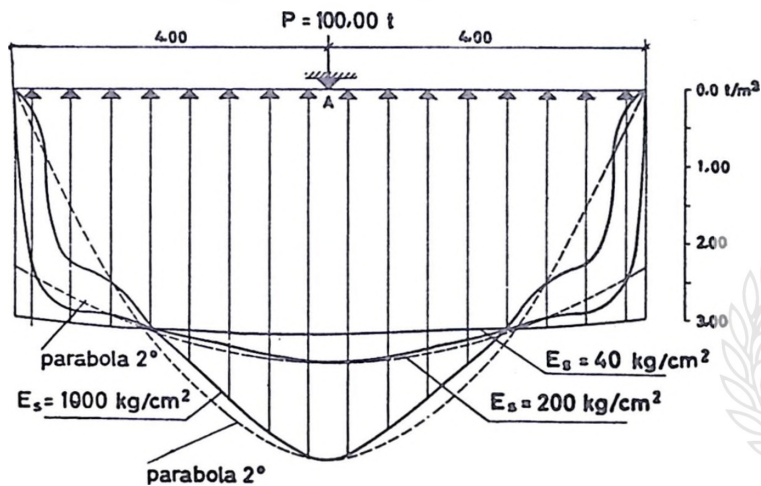
$$L = 8.00 \text{ m}$$

$$B = 4.00 \text{ m}$$

$$I = 0,25 \text{ m}^4$$

$$E_s : 40, 200, 1000 \text{ kg/cm}^2$$

Raspodoba za $P = 100,00 \text{ t}$



Ukupno sleganje fundamenata
 $E_s : 40 \text{ kg/cm}^2 \rightarrow \delta_A = 52,89962 \text{ mm}$
 $E_s : 200 \text{ kg/cm}^2 \rightarrow \delta_A = 10,79906 \text{ mm}$
 $E_s : 1000 \text{ kg/cm}^2 \rightarrow \delta_A = 2,30936 \text{ mm}$

Sl. 56

Međutim, dovoljno tačni rezultati mogu da se dobiju metodom aproksimacije gde se rešavaju sistemi jednačina postavljeni samo za pojedina polja. Pritom se dobija nešto veći broj jednačina koje treba rešiti, ali pošto ih ne rešavamo sve odjednom, to je potrebno znatno manje vremena za njihovo rešavanje.

Srednje polje diskontinualne trake za razne vrednosti I

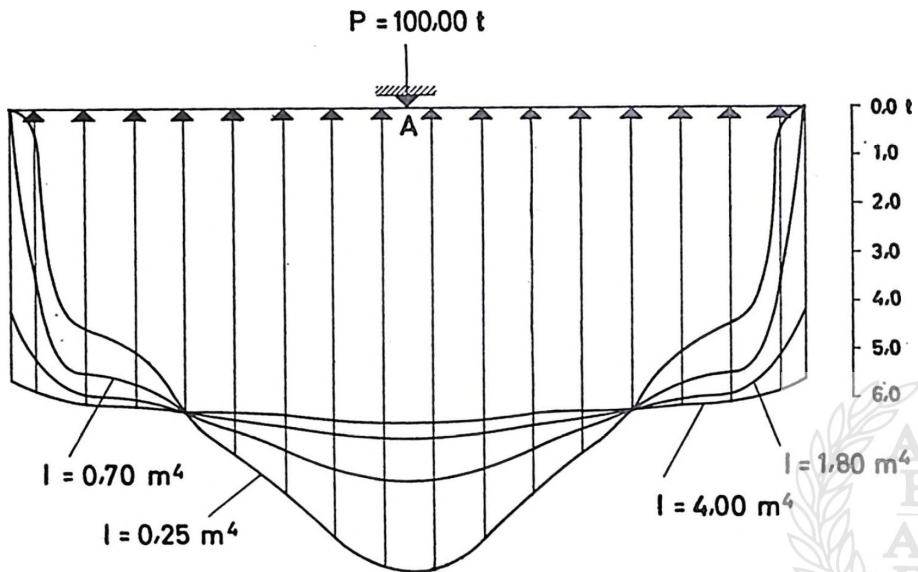
$$L/B=2$$

$$L = 8.00 \text{ m}$$

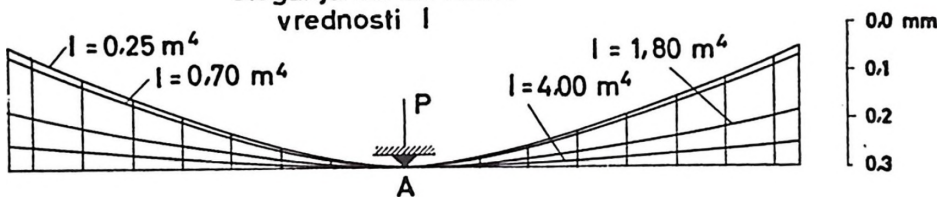
$$B = 4.00 \text{ m} \quad I = 0.25; 0.70; 1.80; 4.00 \text{ m}^4$$

$$E_s = 1000 \text{ kg/cm}^2$$

Raspodele za $P = 100.00 \text{ t}$



Elastične linije trake i linije
sleganja tla za razne
vrednosti I



Ukupno sleganje fundamenata

$$I = 0.25 \text{ m}^4 \quad \omega_A = 2.30936 \text{ mm}$$

$$I = 0.70 \text{ m}^4 \quad \omega_A = 2.19705 \text{ mm}$$

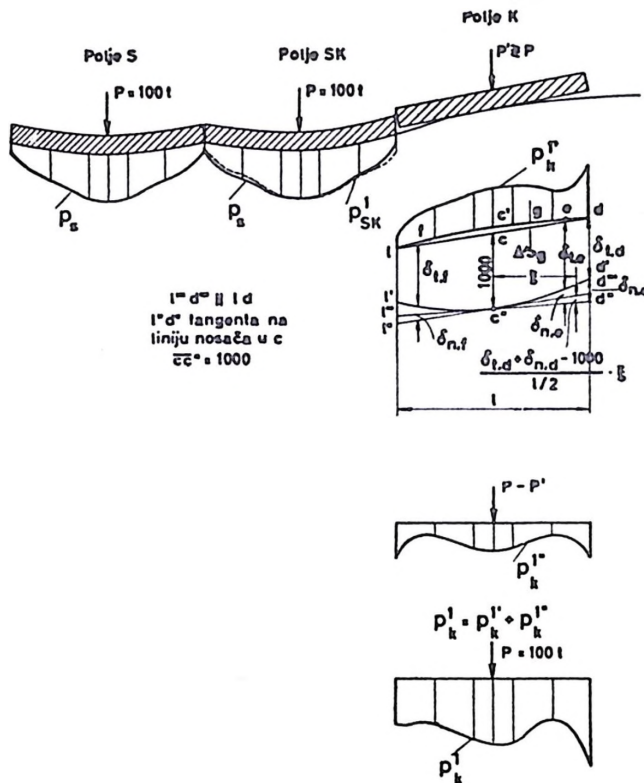
$$I = 1.80 \text{ m}^4 \quad \omega_A = 2.14386 \text{ mm}$$

$$I = 4.00 \text{ m}^4 \quad \omega_A = 2.12257 \text{ mm}$$

Postupak je obavljen na sledeći način:

1) Pretpostavimo da je poznata raspodela pritiska ispod nosača u polju S . Prvu aproksimativnu raspodelu u polju K , p'_k , nalazimo pretpostavljajući da je raspodela u polju SK jednaka raspodeli u polju S (vidi sliku 58).

Krajnje polje diskontinualne trake
Nalaženje raspodele p_k^1



Sl. 58

Pritom, ako je broj lamela u polju K jednak n , onda — kako će se kasnije videti — imamo da rešimo sisteme od n i $n/2$ jednačina da bismo dobili raspodelu p_k^1 .

2) Izvršimo korekciju raspodele p_{sk} u polju SK pretpostavljajući da je u polju S raspodela p_s , a u polju K raspodela p_k^1 . Tom prilikom ćemo morati da rešimo sistem od n jednačina.

3) Izvršimo korekciju raspodele p_k^1 , na taj način što ćemo pretpostaviti da u susednom polju SK imamo dobijenu raspodelu p_{sk} umesto ranije pretpostavljene raspodele p_s , a u ostalim daljim poljima raspodelu p_s . Dobićemo raspodelu p_k^2 . Ovog puta opet treba da rešimo sistem od n jednačina.

Tim postupkom u gotovo svim slučajevima možemo da svedemo zadatak na dovoljnu tačnost, ako krutost pojedinih članova diskontinualne trake nije jako velika. Ako je krutost velika, razlike i odstupanja u procentima su veći te je potrebno ponekad da se još jedanput vrši izravnjanje razlika u poljima SK i K .

Ako saberemo sisteme jednačina za rešavanje pod 1), 2) i 3), dobijamo da je potrebno rešiti $3,5 n$ jednačina u 4 sistema jednačina. Kad bismo, međutim, radili odjedanput sa celim sistemom, imali bismo sistem od $2,5 n$ jednačina. Kako se vidi, jednačina bi bilo manje u ukupnom broju, ali bi njihovo rešavanje trajalo duže. Međutim, treba konstantovati da bi se u tom slučaju dobili tačniji rezultati.

1) NALAŽENJE RASPODELE p_k^1

Raspodelu p_k^1 nalazimo pretpostavljajući da su dva susedna polja opterećena raspodelama p_s . Pritom postupamo na sledeći način:

Pod dejstvom raspodele p_s u dva susedna polja tlo će dobiti u pravcu pružanja trake izvesne deformacije i sleganja i u polju K . (linija $lc'd$, na slici 58).

Ako takvu zakrivljenu površinu tla opteretimo nosačem polja K , na kome deluje neka proizvoljna sila P' , ona će izazvati ispod tačke c izvesno određeno sleganje $c'c''$. Ovo sleganje se sastoji iz poznatog sleganja veličina $cc' = \Delta s$ i veličine cc'' koju usvajamo da je jednaka 1000 jedinica.

Iz uslova poklapanja deformacija tla i nosača može da se napiše sledeća opšta jednačina za desnu ili levu polovinu nosača u polju K (vidi sliku 58)

$$\delta_t + \delta_n - \frac{\delta_{t,d} + \delta_{n,d} - 1000}{l/2} \xi = 1000 - \Delta s \dots \dots (29)$$

Za levu stranu nosača doći će samo umesto veličina $\delta_{t,d}$ i $\delta_{k,d}$ veličine $\delta_{t,e}$ i $\delta_{k,e}$.

Za izvesnu tačku e jednačina poklapanja deformacija će glasiti:

$$\delta_{t,e} + \delta_{n,e} - \frac{\delta_{t,d} + \delta_{n,d} - 1000}{l/2} \xi_e = 1000 - \Delta s_e \dots \dots (30)$$

$$\text{gde je } \delta_{t,e} = \sum s_{e,n} X_n; \quad \delta_{t,d} = \sum s_{d,n} X_n$$

$$\delta_{n,e} = \sum \eta_{e,n} X_n; \quad \delta_{n,d} = \sum \eta_{d,n} X_n \dots \dots (31)$$

Postavljanjem $n-1$ jednačina (30) i njihovim rešenjem, uz uslov da momenti raspodele levo i desno od oslonca krajnjeg polja moraju biti jednaki, dobija se raspodela p_k^1 , koja odgovara izvesnoj sili P' , čija je vrednost proizvoljna.

Raspodela je potpuno određena ako je unapred usvojena vrednost I , i ako je modul deformacija E_s konstantan.

Sa druge strane, moguće je dokazati da je zakon raspodele za jedan temelj samac nepromenljiv ako su I i E_s konstantni, tj. ako je njihov odnos, I/E_s konstantan (Ref. 4).

Pošto jednoj određenoj raspodeli odgovara uvek jedan određen odnos I/E_s , to se može umesto dijagrama $I - \frac{p_c}{p_{pr}}$ konstruisati dijagram $\frac{I}{E_s} - \frac{p_c}{p_{pr}}$. U tom dijagramu svaka tačka na krivoj liniji odgovaraće jednoj određenoj raspodeli pritiska za izvestan odnos i veličinu L/B .

Na dijagramu na sl. 60 je data zavisnost raspodele pritiska jednog elementa diskontinualne beskonačne trake, veličine 4,00. 8,00 m u zavisnosti od odnosa, $\frac{p_c}{p_{pr}}$ i $\frac{I}{E_s}$. Zavisnost linija raspodele pritiska od tih odnosa

data je za 7 sračunatih raspodela, (tačka 1—7). Ako imamo unapred usvojene vrednosti I i E_s , što je gotovo redovno slučaj, možemo, za dati odnos I/E_s , pomoću tog dijagrama odmah dobiti odnos p_c/p_{pr} .

Primer: Za elemenat trake L/B jednako $8,00/4,00=2,00$ koja je oslonjena na tlo sa modulom deformacija $E_s=1.000 \text{ kg/cm}^2$, i koja ima momenat inercije $I=3 \times 10^8 \text{ m}^4$, dobija se da je odnos p_c/p_{pr} jednak 1,055. Ako isti nosač počiva na tlu koje ima $E_s=100 \text{ kg/cm}^2$, onda se dobija da je odnos p_c/p_{pr} jednak 1,46. Ta beskonačna traka će se znači, ponašati na tlu sa $E_s=1.000 \text{ kg/cm}^2$ kao savitljiva, a na tlu sa $E_s=100 \text{ kg/cm}^2$, kao kruta. Isto se to može konstantovati i na dijagramima na sl. 56 i 57.

Linija u dijagramu na sl. 60 određena sa 7 tačaka je u važnosti kad je elemenat beskonačne diskontinualne trake samaca veličine 4,00. 8,00 m. Ako se, međutim, želi da se eventualno koristi taj dijagram u praksi, potrebno je proširiti ga i na druge veličine fundamenta. De Ber je dokazao (Ref. 4) da su pri istom odnosu L/B momenti inercije dva elementa direktno proporcionalni njihovim dužinama na četvrtu potenciju, tj.

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{L_1^4}{L_2^4} \dots \dots \dots (34)$$

Zahvaljujući tom odnosu može da se proširi dijagram na sl. 60 na razne veličine nosača istog odnosa L/B , te da se dobiju odmah — za razne vrednosti I i E_s — odgovarajuće vrednosti odnosa p_c/p_{pr} , za određene dužine elemenata.

Radi provere konstrukcije dijagrama sračunate su vrednosti raspodela za tačke 8 i 9, za elemenat dužine 5,00 i širine 2,50 m. Kako se iz dijagrama vidi, dobijene vrednosti se vrlo dobro poklapaju sa drugim vrednostima dobijenim korišćenjem jednačine (34).

Pošto su raspodele pritiska za nosače sa konstantnim odnosom L/B i konstantnim odnosom p_c/p_{pr} potpuno određene, to se mogu za svaku dobijenu raspodelu sračunati vrednosti napadnih momenata. To je i učinjeno na dijagramu na sl. 59 u kome je data zavisnost momenata savijanja u vezi sa odnosom I/E_s , za razne dužine nosača L . Iz dijagrama se vidi da vrednosti momenata tim više opadaju što je krutost nosača manja.

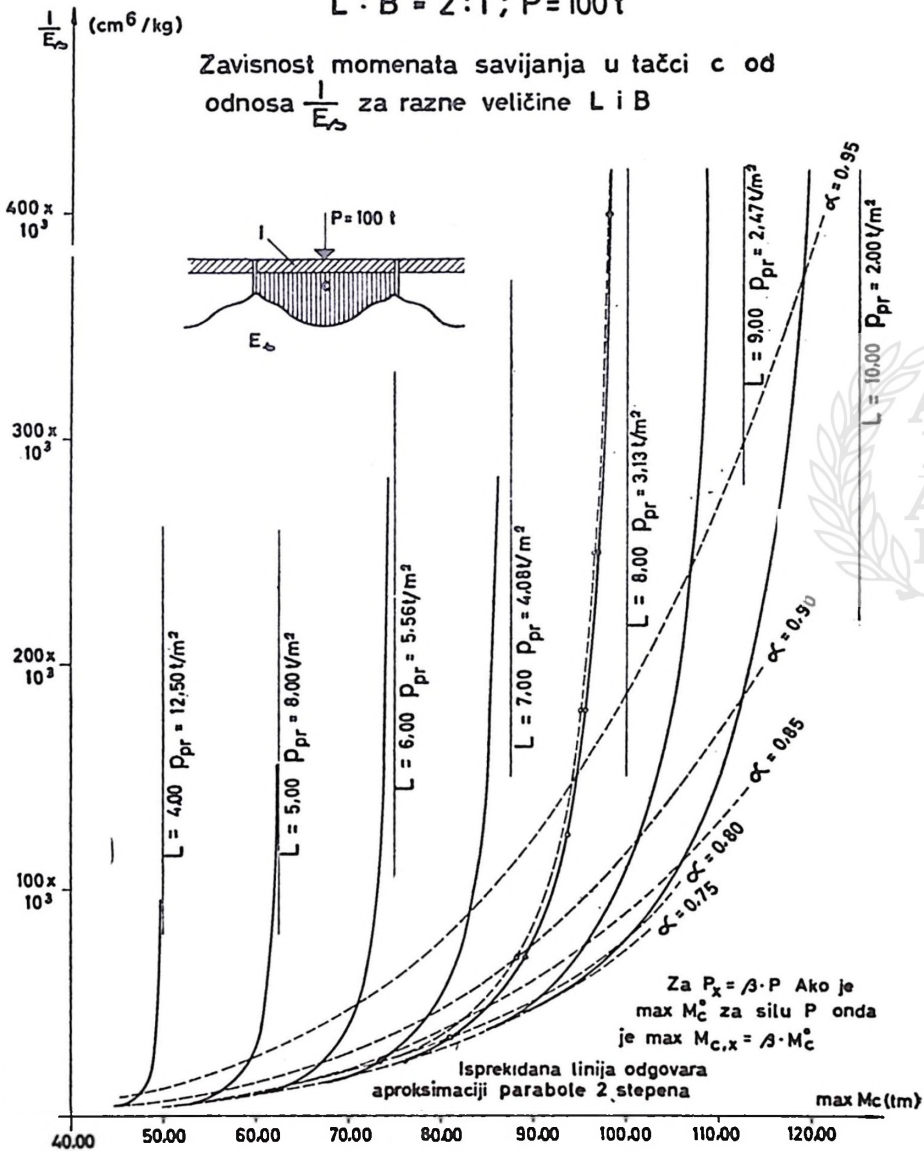
Ako krutost nosača raste, vrednosti momenata se približavaju vrednostima za ravnomerne raspodele, koje su označene punim tankim linijama. Momenti su sračunati za veličinu sila $P=100$ tona. Međutim, ako je sila proizvoljne veličine, onda će biti,

$$p_x = \beta \cdot P, \text{ gde je } \beta \text{ koeficijent. Tada će dalje biti,}$$

$$\max M_{c,x} = \beta \max M_c \dots \dots \dots /35/$$

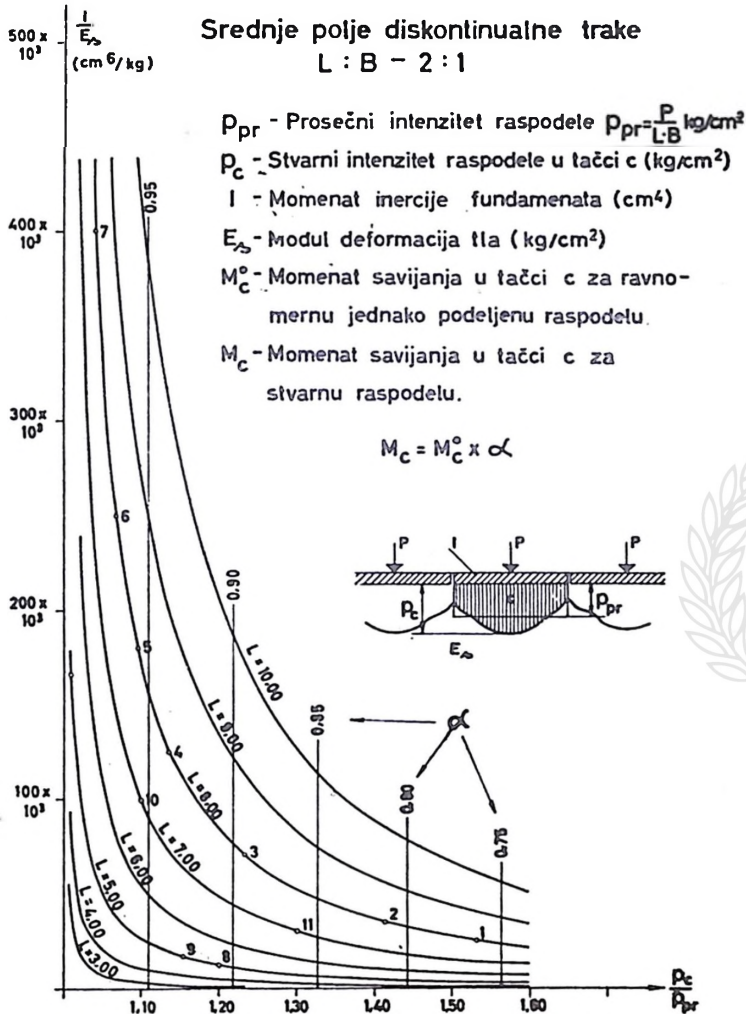
Srednje polje diskontinualne trake

$$L : B = 2 : 1 ; P = 100 \text{ t}$$



Sl. 59

Na taj način može se (u granicama dijagrama 59) za dati odnos L/B za ma kakvu silu i za ma koju vrednost L dobiti vrednost maksimalnog momenta savijanja uzimajući u obzir krutost nosača i modul stišljivosti tla.



Sl. 60

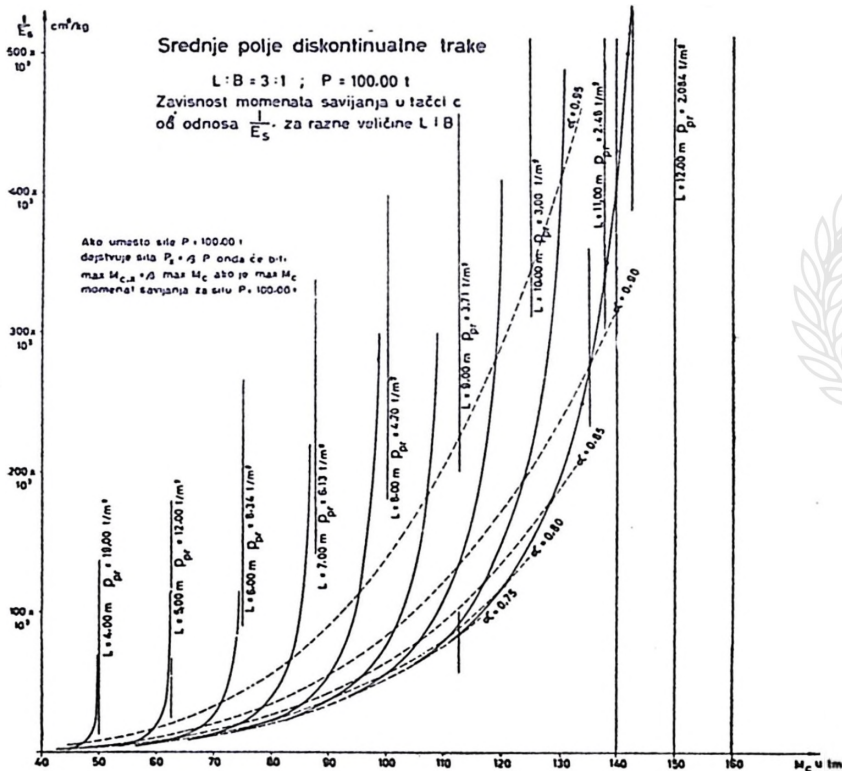
Ako sada na liniji za vrednosti momenata odredimo tačke čije će vrednosti napadnih momenata iznositi 0,95, 0,90, 0,85, 0,80 i 0,75 od vrednosti momenata za ravnomernu raspodelu dobiće se linije koje redukuju momente M_c^o na odgovarajuće vrednosti. Taj koeficijent redukcije označimo sa α . Sa tim koeficijentom treba množiti u datom slučaju vrednosti momenata za ravnomernu raspodelu da bi se dobila stvarna

vrednost momenata savijanja. Ako se te linije prenesu na dijagram sl. 58, dobiće se, što je i prirodno, vertikalne linije, pošto na jednoj vertikali leže sve raspodele pritiska jednog odnosa p_c/p_{pr} .

Koristeći se tim koeficijentom može se napisati da je,

$$M_c = M_c^o \cdot \alpha \dots \dots \dots /36/$$

gde je M_c moment savijanja u tački c usled stvarne raspodele pritiska, M_c^o moment savijanja za ravnomernu raspodelu u istoj tački, α redukcioni koeficijent.

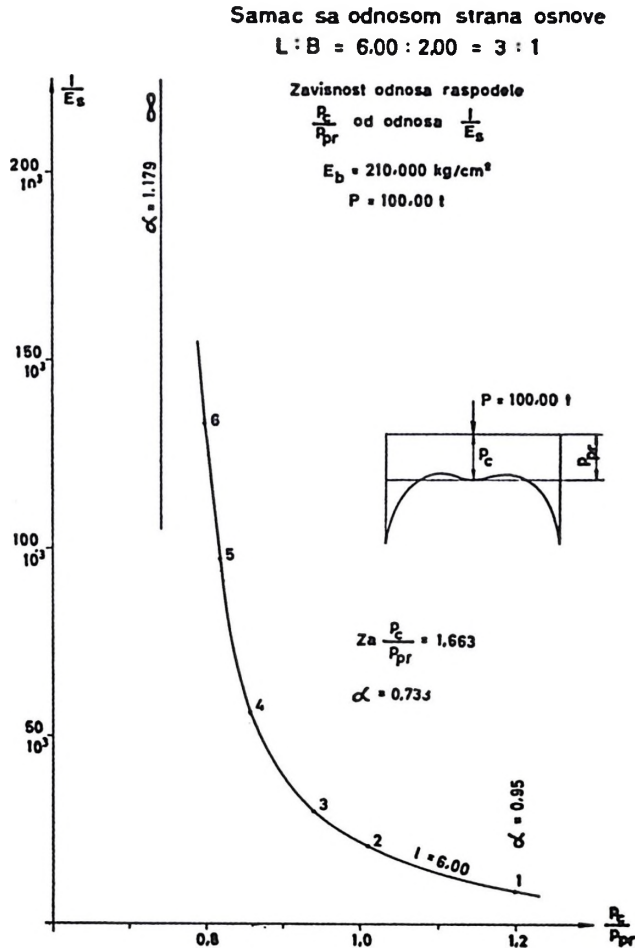


Sl. 61

Da bi se u praksi moglo koristiti ovim rezultatima ispitivanja srednjeg polja diskontinualne trake nezvanih samaca, potrebno je izraditi nekoliko dijagrama sličnih dijagramu sl. 60. Još jedan takav dijagram dat je za odnos $L/B = 3$, sl. 61 i 62.

Kod fundamenata samaca, međutim, α se kreće približno od vrednosti oko 1,20 za krute fundamente do vrednosti oko 0,75 za fundamente koji imaju malu krutost (ova granična vrednost određena je iz uslova da mora na celoj kontaktnoj površini temelja i tla postojati prislan kontakt).

Iz ovog sledi da se kod diskontinualne trake nevezanih samaca mogu da javi samo momenti u maksimalnoj vrednosti koja odgovara ravnomernoj raspodeli, dok kod fundam:nta samaca može raspodela dati i momente koji su za do oko 20% veći od momenata za ravnomernu raspodelu.



Sl. 63

3) APROKSIMACIJA SA PARABOLOM 2 STEPENA

Znatno je lakše operisati u proračunima linijama raspodele koje su određene kao matematičke funkcije. Stoga ćemo pokušati da problem

aproksimiramo sa jednom od jednostavnih matematičkih funkcija. Po prirodi raspodele nameće se odmah ideja da aproksimiramo raspodelu sa parabolom ζ stepena.

Kod nosača koji su dati na dijagramu na sl. 56 zamenimo dobijene raspodele sa parabolama 2 stepena, zadovoljavajući pritom uslov da mora biti,

$$p = \int_{-l/2}^{+l/2} p_x dx \dots \dots \dots /37/$$

gde je $l = L/2$.
Tada je,

$$p = 3 (p_{pr} - p_c) \left(\frac{x}{l}\right)^2 + p_c \dots \dots \dots /38/$$

Za $x = l$ dobija se,

$$p_k = 3 p_{pr} - 2 p_c \dots \dots \dots /39/$$

Ako pri aproksimiranju usvojimo da vrednost p_c i kod parabole 2 stepena bude jednaka toj vrednosti dobijenoj po tačnijoj metodi, možemo iz navedenih jednačina dobiti vrednosti p_k , kao i intenzitete raspodele za sve ostale tačke. Ako za tu raspodelu sračunamo momente savijanja u tački c , moći ćemo da vidimo da li je aproksimacija dobra.

Iz dijagrama na slici 56 vidi se da se parabola drugog stepena na svim mestima ne poklapa dobro sa dobijenim raspodelama po tačnijoj metodi rada. Međutim, to još nije dovoljno da bi smo mogli odbaciti pretpostavljenu raspodelu. Važnije je da li će se rezultati koji su za nas od interesa približiti sa dovoljno tačnosti stvarnim vrednostima.

Poređenje rezultata izvršeno je za niz izrađenih primera i dobijene su uporedne vrednosti za momente savijanja koje su prikazane na tabeli II.

Iz tabele se vidi da su razlike u vrednostima momenata savijanja relativno male. One se kreću do 2,44% u maksimumu. Manje su što je nosač krući. Vrednosti momenata savijanja su uvek nešto manje ako ih računamo po paraboli 2 stepena, prema tome rezultati po aproksimaciji su uvek na strani suprotnoj od sigurnosti.

Pošto su te razlike relativno jako male, to se može usvojiti parabola 2° kao dovoljno tačna aproksimirana kriva za ovaj slučaj.

Da bi se grafički prikazalo kolika se razlika u vrednostima momenata savijanja javlja, data je na dijagramu sl. 59 linija dobijenih vrednosti momenata putem aproksimacije za elemenat trake $4,00 \times 8,00$ m, isprekidanom linijom. Vidimo da se vrednosti vrlo malo razlikuju od vrednosti dobivenih po tačnijoj metodi.

Prema tome, ako nam je poznat za jedan elemenat diskontinualne trake odnos p_c/p_{pr} , možemo, za jednu izvesnu krutost, dobiti sve potrebne vrednosti pomoću sledećih jednačina:

$$p_k = 3 p_{pr} - 2 p_c \dots \dots \dots (39)$$

$$p = 3 (p_{pr} - p_c) \left(\frac{x}{l}\right)^2 + p_c \dots \dots \dots /38/$$

Za transverzalne sile dobija se

$$-\frac{T}{b} = 3(p_{pr} - p_c) \cdot \frac{x^3}{3 \cdot l^2} + p_c \cdot x - p_{pr} \cdot l \cdot \dots \dots \dots |40/$$

Za momente savijanja

$$-\frac{M}{b} = 3(p_{pr} - p_c) \frac{x^4}{12 \cdot l^2} + p_c \frac{x^2}{2} - p_{pr} \cdot l \cdot x + \frac{l^2}{4} \cdot (p_{pr} - p_c) \dots \dots \dots |41/$$

Poređenje vrednosti momenata
dobijenih po tačnijoj metodi i aproksimaciji
sa parabolom 2°

Krutost I m ⁴	p _c p _{pr}	Maksimalni momenti tm		Razlika u %	Primedba	
		Tačnija metoda	Parabola 2°			
E _c = 1000 kg/cm ² ; L/B = 2/1						
∞	1,000	100,00	100,00	0,00	Ode su dati brojevi u zgradama za raspodelu sa parabolom 2° javljaju se već u raspodeli zatezanja. Stoga te razlike nisu merodavne.	
4,00	1,041	90,23	90,00	0,23		
2,50	1,065	96,97	96,50	0,48		
1,00	1,094	95,59	95,25	0,36		
0,70	1,232	89,19	88,25	1,05		
0,25	1,535	76,05	(73,50)	(3,36)		
E _c = 1000 kg/cm ² ; L/B = 3/1						
∞	1,000	150,00	150,00	0,00		
20,00	1,020	140,10	147,90	0,13		
0,00	1,070	144,56	144,00	0,39		
5,00	1,124	141,27	140,60	0,47		
3,50	1,175	137,77	136,00	0,70		
2,50	1,237	133,48	132,20	0,96		
1,80	1,314	128,26	126,30	1,53		
1,20	1,432	120,34	117,40	2,44		
0,70	1,633	107,60	(102,10)	(5,12)		
E _s = 200 kg/cm ² ; L/B = 2/1						
0,25	1,137	93,67	93,20	0,50		
E _s = 40 kg/cm ² ; L/B = 2/1						
0,25	1,020	99,00	99,00	0,00		

Tab. 2

Za momenat savijanja u sredini nosača

$$M_c = -\frac{b \cdot l^2}{4} (3p_{pr} - p_c) \dots \dots \dots (42)$$

Za strelu povijanja

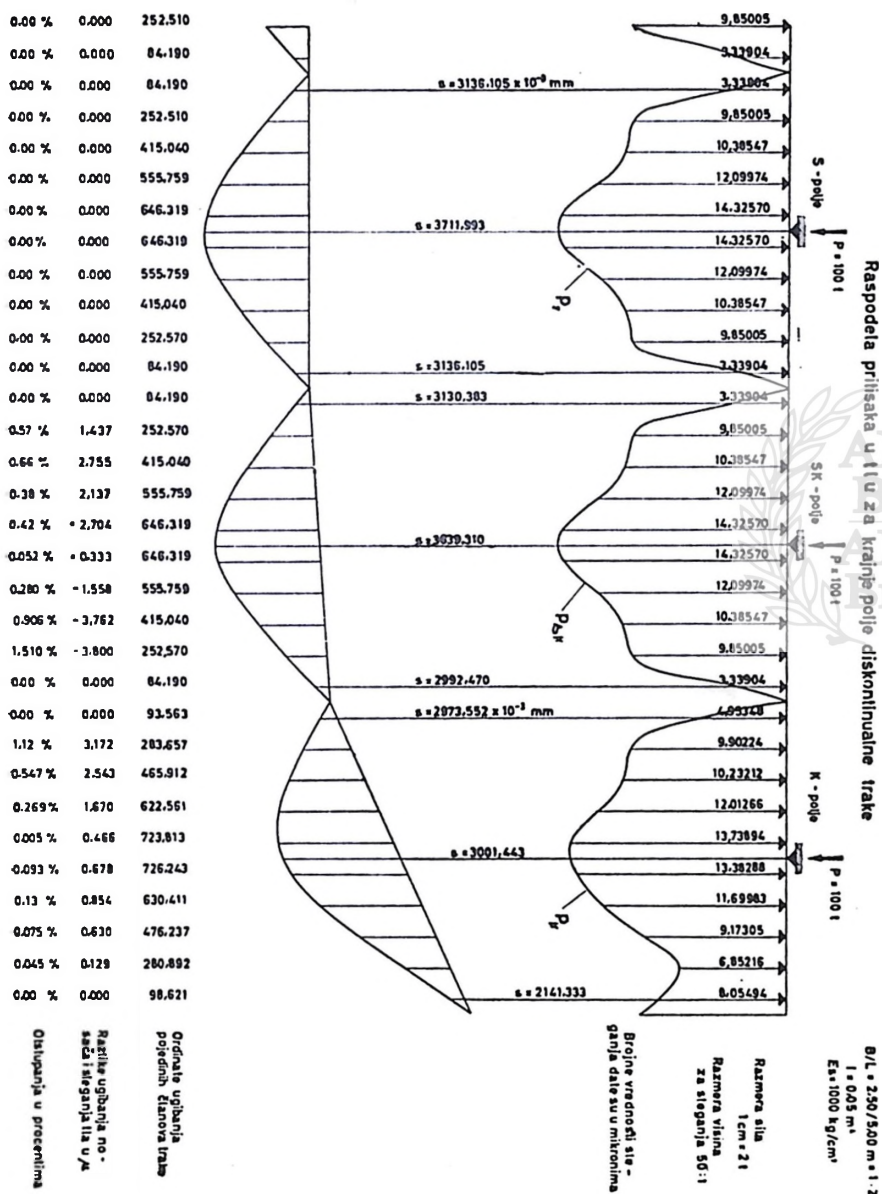
$$f = \frac{b \cdot l^4}{EJ} \cdot \left(\frac{2b}{120} p_{pr} - \frac{11}{120} p_c \right) \dots \dots \dots (43)$$

U obrascima je sa l označena dužina L/2, a sa f strela ugibanja nosača za x = l.



D. UTICAJ KRUTOSTI KOD KRAJNJEG POLJA DISKONTINUALNIH TRAKA

Da bi mogao da se vidi uticaj krutosti kod krajnjeg polja, izvršeno je ispitivanje jednog nosača na ranije opisan način.



Nosač je usvojen dimenzija $L : B = 5,00 : 2,50 = 2 : 1$; sa modulom deformacija tla 1.000 kg/cm^2 , modulom elastičnosti temeljnog nosača 210.000 kg/cm^2 . Krutost nosača uzeta je sa tri vrednosti i to:

$$\begin{aligned} I_1 &= 0,050 \text{ m}^4 \\ I_2 &= 0,125 \text{ m}^4 \\ I_3 &= 0,500 \text{ m}^4 \end{aligned}$$

Na prikazanim dijagramima (sl. 64, 65 i 66), gde su date linije raspodele pritiska, date su takođe i elastične linije temeljnih nosača, odnosno linije ugibanja tla sa veličinama sleganja pojedinih polja, kao i sa odstupanjima koja su izražena u procentima. Da bi se mogla što bolje videti razlika u raspodelama, prikazane su raspodele i dati i ostali podaci ne samo za krajnje polje nego zajedno sa poljem do krajnjeg (polja SK) i srednjim poljem (polje S).

Ostupanja su kod nekih polja nešto veća (krajnje polje za krutost $0,500 \text{ m}^4$) pošto su kod nosača sa većom krutosti ordinate elastičnih linija znatno manje te se pri proračunu sa istim brojem decimala javlja kod krutih nosača veća razlika u procentima.

Ako uporedimo sva tri dijagrama za tri razne krutosti, može se konstatovati sledeće:

1) Raspodele pritiska u krajnjim poljima su nesimetrične i znatno se razlikuju od raspodela u srednjim poljima. Ipak kod manjih krutosti krajnjeg polja te razlike su nešto slabije izražene.

2) Temelji krajnjeg polja vrše pri sleganju izvesno obrtanje oko horizontalne ose. Ova obrtanja su takvog reda veličine da je preporučljivo da se temelji krajnjih polja — naročito kod stišljivog tla — uvek vežu sa stubovima pomoću zglobova.

3) Pri jednakom opterećenju pojedinih polja krajnja polja se znatno manje sležu od srednjih. Ta razlika je to veća što je temelj krući.

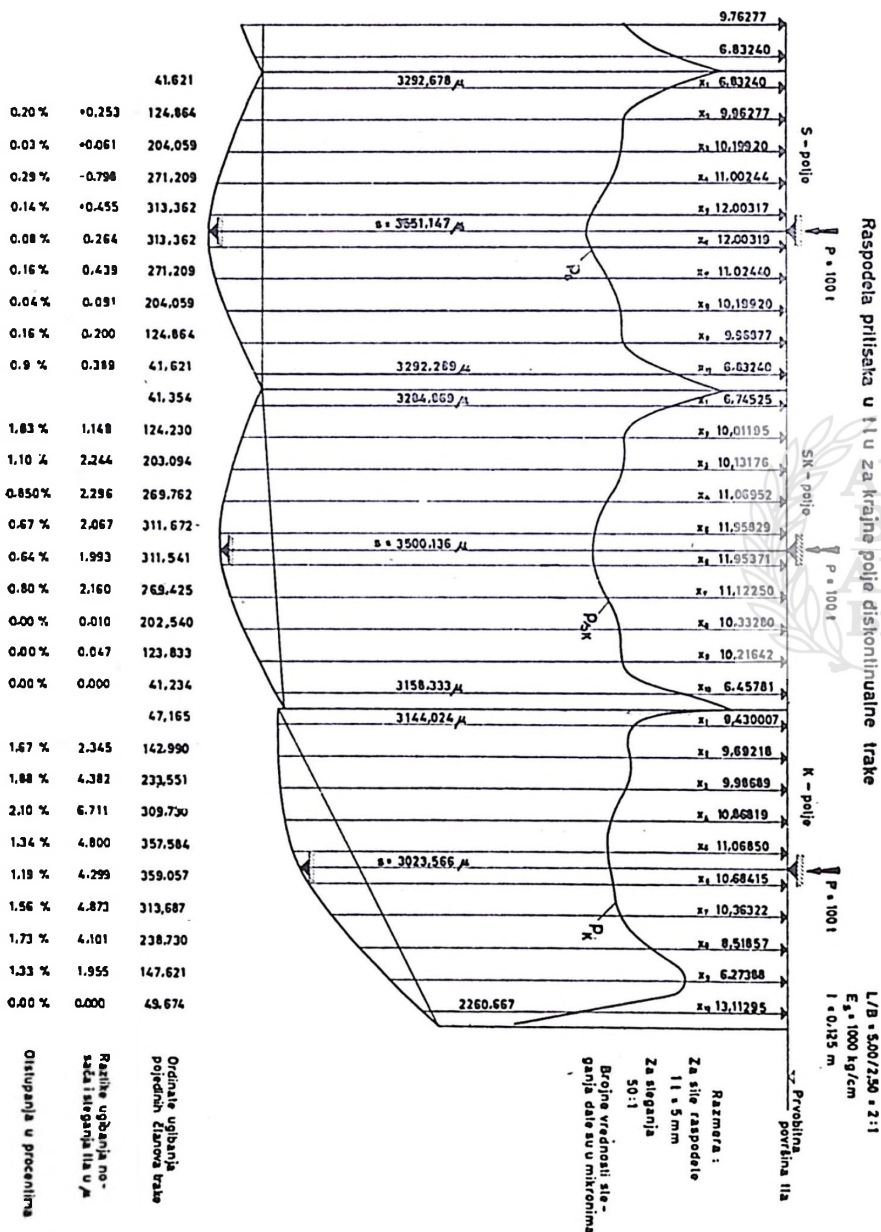
4) U vezi sa konstatacijom pod (t. 3) vidi se da će momenti M_k^o takođe ovde biti nešto manji što je krutost pojedinih temeljnih nosača manja. Ovi uticaji, međutim, kad $I_k \rightarrow \infty$, nisu jednaki nuli kod diskontinualnih traka, nego ako želimo da ih svedemo na nulu, moramo krajnje temelje u odnosu na srednja polja tako konstruisati da njihova sleganja povećamo.

5) U pogledu momenata savijanja pojedinih nosača, ako poredimo njihove vrednosti kod K-polja sa vrednostima dobijenim kod S-polja, i to za razne krutosti, imaćemo sledeće:

Krutost m^4	S-polje tm	K-polje tm	Razlike u procentima %
0,050	49,62	53,71	+ 8,26
0,125	56,78	61,55	+ 8,43
0,500	61,10	67,29	+ 10,14

Iz ovog pregleda se vidi da momenti savijanja rastu sa povećavanjem krutosti kao i da mogu biti i veći od momenata koji se dobijaju pri ravnomernoj raspodeli (vidi sl. 67).

Pri istom opterećenju polja momenti savijanja temeljnog nosača kranjeg polja uvek su veći od momenata savijanja u srednjim poljima. To povećanje iznosi u ispitivanom slučaju oko 10%. Odnosi momenata savijanja u srednjim i krajnjim poljima za ovaj slučaj prikazani su na dijagramu na sl. 67.

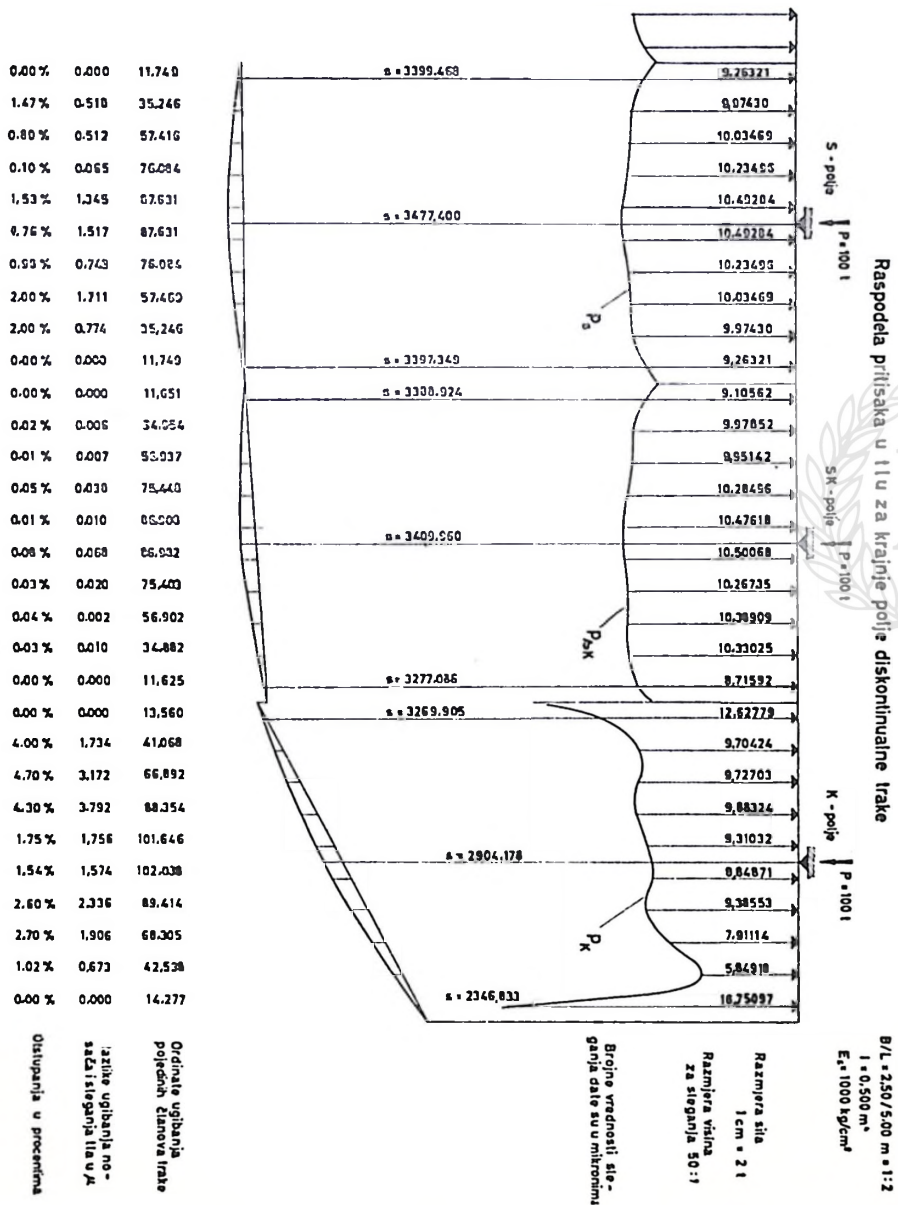


Sl. 65

E. UTICAJ KRUTOSTI U POLJIMA DO KRAJNJIH KOD DISKONTINUALNIH TRAKA

Za polja koja se nalaze do krajnjih, — polja SK —, možemo na osnovu ispitivanja konstatovati sledeće:

1) Raspodele pritisaka su i u ovim poljima nesimetrične, ali su razlike neznatne i raspodele po svom obliku potpuno slične na raspodele



Sl. 66

u srednjim poljima. Razlike su to manje što je manja krutost sistema I_s , tako da je u slučaju na slici 64 praktično dobijena ista raspodela kao i za srednje polje.

2) Pod jednakim opterećenjem razlike sleganja u poljima S i u polju SK su minimalne.

3) Obrtanja nosača SK polja su znatno manja od obrtanja nosača K polja.

4) Pošto su razlike u sleganjima kod ispitivanog slučaja između S polja i SK polja vrlo male, to će i momenti M_k^0 od dejstva SK polja na konstrukciju S_k — za ispitivani slučaj — biti neznatni. Stoga se može smatrati praktično da na veličinu tih momenata u ispitivanom slučaju utiče pretežno K polje, te njega samo i treba odvojeno i tretirati (dijagrami 64 do 66).

Krajnje i srednje polje diskontinualne trake

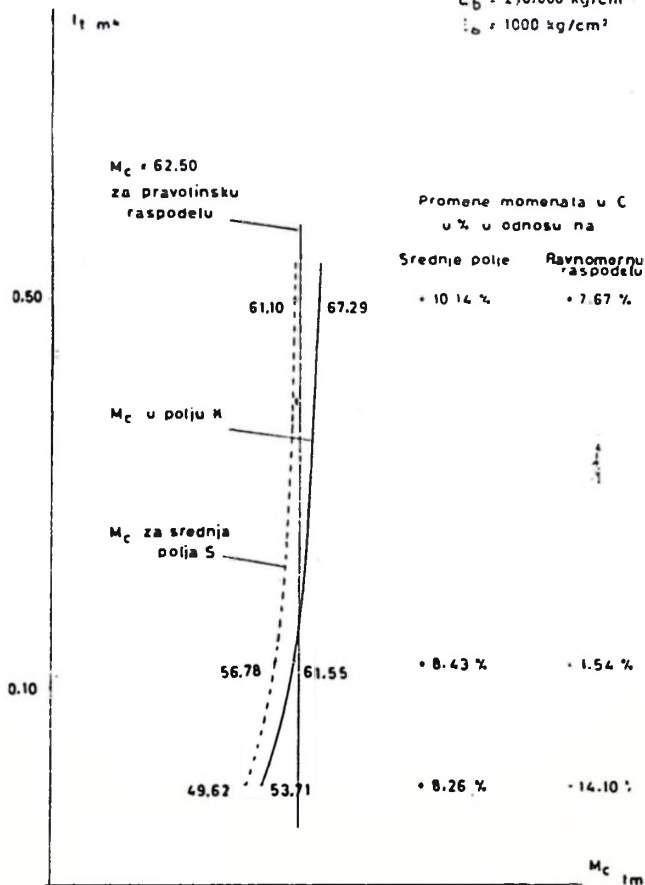
Vrednosti momenata u tački C u za
visnosti od krutosti I_1

$$P = 100.0 \text{ t}$$

$$L/B = 5.00/2.50 = 2:1$$

$$E_b = 210.000 \text{ kg/cm}^2$$

$$I_b = 1000 \text{ kg/cm}^2$$



Sl. 67

5) Momenti savijanja u *SK* polju imaju gotovo jednake veličine momenata dobijenih za *S* polje. Razlike koje su dobijene proračunom iznose:

Krutost m ⁴	<i>S</i> polje tm	<i>SK</i> polje tm	Razlika u procentima %
0,050	49,62	49,62	0,00
0,125	56,78	56,66	- 0,20
0,500	61,10	60,37	- 1,20

Momenti savijanja su kod *SK* polja neznatno manji od onih u *S* poljima. Razlika se povećava što krutost nosača raste.

I ovde kao i u *S* poljima momenti savijanja ne mogu dobiti veće vrednosti od onih koje se dobijaju pod pretpostavkom ravnomerne raspodele. Pošto čak razlika raste sa krutosti, to oni neće nikada moći ni da dostignu vrednosti za ravnomernu raspodelu.

Na osnovu svega toga mogu se *SK* polja tretirati potpuno identično kao *S* polja.



IV. DEO

POREĐENJE KONTINUALNIH I DISKONTINUALNIH TRAKA

Za poredenje kontinualnih i diskontinualnih traka potrebno je posmatrati problem na dva načina i to:

a) šta se dobija diskontinuitetom posmatrajući samo jedno polje diskontinualne i jedno polje kontinualne trake.

b) šta se dobija ubacivanjem diskontinuiteta kad se posmatraju obe trake kao celina.

Ako poredimo samo pojedinačna polja, javljaju se razlike u raspodelama, a u vezi sa njima i razlike u momentnim površinama koje treba pokrivati. Te razlike — u ekonomskom pogledu — nisu velike i ispitivanja pokazuju da su nekada (ako se za upoređenje ekonomičnosti uzmu momentne površine) racionalnije kontinualne a nekada i diskontinualne trake u zavisnosti od veličina I_i i E_s , kao i od opterećenja. Osim toga diskontinualne trake je moguće primeniti u užem intervalu promena krutosti I_r , pošto kod njih dolazi sa opadanjem I_r vrlo brzo do izdizanja krajeva. Stoga prednost diskontinualnih traka u ovom slučaju može da bude često vrlo mala te se ne može da opravda njihova primena.

Ako se, međutim, posmatraju kontinualne i diskontinualne trake u celini, dolazi se do toga da će sleganja ispod pojedinih oslonaca biti različita, te će se pojaviti razlike u oslonačkim silama i uticaji usled tih razlika. Ove razlike zavise najviše od načina opterećenja trake, zatim od veličine E_s , kao i od oblika i krutosti sistema S_i . Usled tih razlika u sleganjima oslonaca i pojave razlika u oslonačkim silama, mogu da se jave u sistemu S_i znatno veći momenti savijanja u kontinualnim trakama, koji mogu biti i desetinu puta veći od momenata savijanja kontinualnih traka kod kojih su sleganja oslonaca međusobno jednaka.

Analogija koja odgovara ovome i koja govori u prilog diskontinuiteta je ova: Kao što izbegavamo kontinuitete kod sistema S_k kad su sleganja ispod pojedinih oslonaca nejednaka, tako isto treba izbegavati i kontinuitet u sistemu S_i , kad se očekuje da će sleganja ispod pojedinih oslonaca tog sistema biti različita.

Ranije je napomenuto da se obrazovanjem diskontinuiteta u sistem S_i mogu kod izvesnih sistema konstrukcija da izbegnu u potpunosti pojave momenata M_i^o . Međutim, veličine momenata M_k^o u sistemu S_k se mnogo

ne menjaju obrazovanjem diskontinuiteta u sistem S_1 . Iz toga sledi da *diskontinualne trake treba primeniti samo u onim konstrukcijama kod kojih krutost sistema S_k igra podređenu ulogu u odnosu na krutost sistema S_1 , ($I_k < I_1$).*

Kolika je prednost diskontinualne trake, zavisi od više činilaca. U prvom redu od načina opterećenja sistema S_1 , zatim od veličine modula deformacija tla, krutosti sistema S_1 i njegovog oblika. Što je sistem S_1 nepovoljnije opterećen, to je veća prednost diskontinualnih traka; što je manji modul deformacija tla, to je primena diskontinualnih traka kod određenih konstrukcija opravdanija.

Ne treba, međutim, zaboraviti da u izvesnim slučajevima, čak i kad je tlo jako stišljivo, može da se primeni kontinualna traka. To su slučajevi kad su male promene u načinu opterećenja konstrukcije i kad je sistem S_1 tako konstruisan, za to opterećenje, da su razlike oslonačkih sila male.

Ako su, međutim, promene u načinu opterećenja sistema S_1 velike, uvek će kod pomenutih konstrukcija biti opravdana primena diskontinualnih traka. U tim slučajevima kontinualne trake ponekad zahtevaju armaturu sa obe strane, i odozgo i odozdo, dok je kod diskontinualnih traka potrebna uvek samo donja armatura.

Da bismo jasnije prikazali mogućnost primene diskontinualnih traka analiziraćemo pojedine slučajeve:

SLUČAJ I.

Ovaj slučaj karakterisan je malim krutostima oba sistema i krutostima koji su veličine istog reda.

Možemo da razlikujemo nekoliko podslučaja.

a) Krutosti kod oba sistema su tako male da su i pored malog modula deformacija tla i pored nepovoljnog opterećenja konstrukcije ipak momenti koji se javljaju usled nejednakih sleganja oslonaca relativno mali. U tim slučajevima obično nije potrebno u sistemu S_1 izvoditi razdelnice.

b) Krutosti oba sistema su podjednake, ali po apsolutnoj veličini takve da se javljaju znatni momenti usled nejednakog sleganja oslonaca, (napr. modul deformacija tla mali i način opterećenja konstrukcije nepovoljan).

U tim slučajevima potrebno je uvesti diskontinuitet u jedan ili u oba sistema.

c) Naposljetku, ako je krutost sistema S_1 veća od krutosti sistema S_k , u tom slučaju, kod nepovoljnih uslova tla i opterećenja, potpuno je neracionalno ostaviti kontinuitet u sistemu S_1 . Isto vredi i za slučaj kad je $I_k = 0$.

Iz prednjeg izlaganja može da se izvede zaključak da, ukoliko je I_k malo u odnosu na I_1 ili je $I_k = 0$, a tlo ima mali modul deformacija i opterećenje konstrukcije je takvo da izaziva nejednaka sleganja oslonaca u većoj mjeri, treba u cilju ekonomičnosti bezuslovno preći kod sistema S_1 na diskontinuitet.

Primer: Protočna brana fundirana na stišljivom tlu. Prelazi od brane na pribrežni teren izrađeni pomoću visokih nasipa. Konceptcija sa kontinualnim sistemom S_1 gotovo uvek je pogrešna, jer sleganja u ovim slučajevima na



pojednim osloncima mogu biti jako različita. S jedne strane zbog visokih nasipa a sa druge strane zbog malog opterećenja srednjeg dela konstrukcije. U tim slučajevima je obično krutost sistema S_k osetno manja od krutosti sistema S_l , a često se prelazi u sistemu S_k i na statički određenu konstrukciju. U takvim slučajevima treba umetnuti zglobove u sistem S_l ili ga jednostavno preseći razdelnicama.

SLUČAJ II.

Sistem S_k je jako krut, a sistem S_l ima malu krutost. Zbog velike krutosti sistema S_k , sistem S_l ne može da dobije nikakve momente M_l^0 .

Prema tome, sistem S_l treba predvideti kao kontinualni, samo ga treba konstruisati sa manjom krutosti, nastojeći još da podešavanjem oblika sistema S_l smanjimo momente M_k^0 .

Prelazom na diskontinuitet u sistemu S_l momenti M_k^0 u konstrukciji S_k uglavnom ostaju veličine istog reda. Ako usvojimo diskontinualnu traku, treba je tako konstruisati da je njezina krutost što manja, a pojedini fundamenti eventualno da su konstruisani sa većim specifičnim opterećenjem, tako da sleganja fundamenta u pojedinim trakama budu što bolje izjednačena.

SLUČAJ III.

Sistem S_k male krutosti, sistem S_l jako krut.

Kad se predviđa ovakav način konstruisanja sistema S_k , onda se obično žele da izbegnu nejednaka sleganja i njihov štetni uticaj na sistem S_k . U tom slučaju diskontinuitet je neopravdan. Ukoliko ne postoji ta opasnost za sistem S_k , treba sistem S_l usvojiti kao diskontinualan, jer se onda oslobađamo u njemu momenata M_l^0 .

Međutim, u ovom slučaju *kod jako dugačkih objekata delimo konstrukcije na više delova razdelnicama, što ustvari nije ništa drugo nego prelaz na diskontinualnu traku.*

SLUČAJ IV.

Ovde primena diskontinualne trake dolazi u obzir samo kod dugačkih objekata gde se diskontinuitet ostvaruje — kao i kod slučaja III — samo na mestima razdelnica.

V. DEO

ZAKLJUČCI

Kod konstrukcija koje se sastoje od kontinualnog gornjeg sistema S_k i kontinualnog sistema temelja S_t , povezanih međusobno stubovima tako da se može zanemariti uticaj ukleštenja stubova u ma koji od sistema, krutost i kontinuitet oba sistema igraju znatnu ulogu, ako je takva konstrukcija oslonjena na tlo koje se može smatrati homogenim i izotropnim.

Posmatrajući gornji sistem konstrukcije S_k sistem temelja S_t i tlo kao celinu, javljaju se razlike u oslonačkim silama sistema S_t , pri proračunu konstrukcija odozgo na dole i odozdo na gore; one izazivaju promene u naprezanjima konstrukcije i savijaju bilo sistem S_k (momenti M_k^o) bilo sistem S_t (momenti M_t^o), zavisno od odnosa krutosti sistema S_k i S_t .

Prema apsolutnoj krutosti pojedinih sistema konstrukcija i njihovom međusobnom odnosu mogu se konstrukcije podeliti na 4 vrste od kojih svaka zahteva naročiti način tretiranja pri proračunu.

Uticaji usled razlika u oslonačkim silama sistema S_t mogu biti znatni. Oni u konstrukciji zavise uglavnom od načina opterećenja konstrukcije, zatim od odnosa krutosti pojedinih sistema, stišljivosti tla i oblika sistema S_t . Tih uticaja, međutim, možemo se često osloboditi, čime dobijamo ekonomičniju i bolju konstrukciju.

Razmatrajući posebno zavisnost tih uticaja od pojedinih parametara, dolazi se do sledećih zaključaka:

1) Kod konstrukcija kod kojih postoji krutost samo u sistemu S_t (krutost sistema S_k jednaka nuli), razlike oslonačkih sila se prenose samo na sistem S_t i one izazivaju savijanja tog sistema momentima M_t^o .

Momenti M_t^o , za usvojeni oblik i način opterećenja konstrukcije, znatno se menjaju i jako rastu — do izvesne vrednosti — sa krutošću sistema S_t , a opadaju sa povećanjem modula deformacija tla. Stoga kod ovakvih konstrukcija kad su nepovoljno opterećene treba konstruisati sistem S_t sa što manjom krutosti. To naročito treba uraditi onda kad je takva konstrukcija oslonjena na tlo velike stišljivosti.

Za usvojeni oblik sistema S_t postoji jedan odnos sila spoljnog opterećenja, — najpovoljniji način opterećenja konstrukcije, — pri kome će razlike oslonačkih sila, a sa njima i vrednosti momenata M_t^o , biti jednake nuli.

Ako je sistem S_i opterećen približno silama koje odgovaraju najpovoljnijem odnosu spoljnih sila, uticaji usled promena modula deformacija tla i krutosti sistema S_i su vrlo mali. Ti uticaji su tada takvi da se mogu zanemariti. U tim slučajevima se može smatrati da su veličine razlika oslonačkih sila, — a sa njima i vrednosti momenata M_i^o , — praktično ne menjaju ako menjamo vrednosti modula deformacija tla i krutost sistema S_i u granicama u kojima te vrednosti mogu da variraju kod tla i sistema S_i .

Podešavanjem raspona konzola na sistemu S_i mogu se u mnogim slučajevima, u zavisnosti od zadanog opterećenja, vrednosti momenata M_i^o svesti na nulu. Ili, za jedno određeno opterećenje sistema S_i moguće je u mnogim slučajevima postaviti i naći uslove, — odnosno odrediti raspone konzola, — pri kojima će biti momenti M_i^o jednaki nuli.

2) Kod konstrukcija kod kojih krutost sistema S_k teži ka beskonačnoj, razlike oslonačkih sila se prenose na sistem S_k i izazivaju u njemu momente savijanja M_k^o .

Vrednosti momenata M_k^o , za usvojeni oblik sistema S_i , menjaju se zavisno od promena krutosti sistema S_i i modula deformacije tla. Te promene nisu znatne i vrednosti momenata M_k^o ostaju veličine istog reda bez obzira kako se praktično menjaju krutost sistema S_i i modul deformacija tla. Ti uticaji u ispitivanim granicama rastu neznatno sa krutosti sistema S_i i opadaju neznatno sa porastom modula deformacija tla.

Međutim, na veličinu momenata M_k^o može se u mnogim slučajevima znatno uticati promenama raspona konzola sistema S_i , tražeći da se za dato opterećenje konstrukcije sistem S_i konstruiše tako da razlike oslonačkih sila, a sa njima i momenti M_k^o , postanu jednaki nuli.

3) Za konstrukcije kod kojih su krutosti u oba sistema konačne uticaji usled razlika oslonačkih sila prenose se na oba sistema. Nalaženje stvarne raspodele pritisaka za takav sistem konstrukcije moguće je izvršiti pomoću metode razlaganja kontinualnog sistema na osnovne.

Podešavanjem oblika sistema S_i moguće je i u ovim konstrukcijama u mnogim slučajevima eliminisati uticaje usled razlika u oslonačkim silama.

4) Konstrukcije kod kojih je krutost sistema S_i znatno veća od krutosti sistema S_k , ili kod kojih je krutost sistema S_k jednaka nuli, mogu se osloboditi uticaja od razlika oslonačkih sila, a sa njima i momenata savijanja M_i^o , uvođenjem diskontinuiteta u sistem S_i . Diskontinuitet se može postići na razne načine, deleći kontinualnu traku na slobodne ili povezane samce ili grede sa preputima.

Ispitivanjem diskontinualnih traka slobodnih samaca opterećenih jednakim silama na jednakom rastojanju, ustanovljeno je:

a) Linija raspodele pritisaka ispod srednjeg polja diskontinualnih traka može se zameniti parabolom drugog stepena.

b) Maksimalne vrednosti momenata savijanja u srednjem polju diskontinualne trake uvek su manje od momenata koji se dobijaju sa ravnomernom raspodelom. U krajnjem slučaju kod diskontinualnih traka koje su potpuno krute, te se vrednosti potpuno izjednačuju, jer je tada i kod srednjeg polja diskontinualne trake raspodela ravnomerna.

c) Raspodele pritisaka u krajnjim poljima nesimetrične su, a maksimalne vrednosti momenata savijanja su manje ili veće od onih koje se dobijaju za ravnomernu raspodelu. Za jednu ispitivanu traku sa raznim vrednostima krutosti momenti savijanja su veći u krajnjim poljima za oko 10 % od vrednosti dobijenih za srednja polja.

d) Raspodele u poljima do krajnjih takođe su nesimetrične, ali je nesimetričnost jako slabo izražena. Linije raspodele su u tim poljima vrlo slične raspodelama u srednjim poljima, te se polja do krajnjih mogu tretirati kao srednja polja.

5) Primena diskontinualnih traka je opravdana i racionalna u slučajevima kad su krutosti sistema S_r znatno veće od krutosti sistema S_k i kad je sistem S_r nepovoljno opterećen, te se zbog toga dobijaju velike vrednosti momenata M_r^0 .

Pri poređenju kontinualnih i diskontinualnih traka ne treba se rukovoditi rezultatima poređenja pojedinih polja, jer tada prednost diskontinualnih traka ne dolazi do izražaja. Kolika je prednost diskontinualnih traka, može se ustanoviti tek onda kada se posmatra celokupna traka i to u vezi sa pojavama momenata M_r^0 .



D. Krsmanović, INFLUENCE DE LA RIGIDITE, DE LA CONTINUITE ET DE LA DISCONTINUITE SUR LE CALCUL DES CONSTRUCTIONS APPUYEES SUR UN SOL ELASTIQUE

R é s u m é

Dans les constructions faites avec des matériaux élastiques et appuyées sur un semi-espace, la rigidité de la constructions et la compressibilité du semi-espace jouent un rôle important, parce que les tassements de la surface du semi-espace — pour chaque manière de chargement de la construction — sont différents.

Cette étude traite des constructions continues avec un moment constant d'inertie (avec rigidité constante sur toute la longueur de la construction), et l'on peut nettement diviser ces constructions en deux systèmes, c. à d. en deux parties: la superstructure et l'infrastructure, dans quelle circonstance les deux constructions sont liées entre elles par un système de piliers et appuyées sur le semiespace caractérisé d'un module de déformation constant.

En tenant compte de la rigidité de chaque partie de la construction, et en observant les deux parties de la construction et le semi-espace comme un ensemble, ces sortes de constructions observées sont divisées en quatre groupes, en fonction des rapports de rigidité entre chaque partie de la construction, ainsi que de la manière d'en faire le calcul qui est différent pour chaque groupe.

Par des expériences on a constaté l'apparition d'importantes influences du semi-espace sur les grandeurs des tensions de chaque partie de la construction (surtout dans les constructions appuyées sur un semi-espace avec un petit module de déformation), par suite d'un tassement inégal de chacun de leurs appuis. Ces influences du semi-espace peuvent, par contre, être sensiblement réduites ou tout à fait éliminées de la façon suivante:

- a) En accommodant les longueurs des porte-à-faux de l'infrastructure afin de diminuer les différences de tassement sous chaque appuis ou de les éliminer.
- b) En convertissant le système continu de l'infrastructure en système discontinu par l'interposition de joints ou articules entre chaque partie de la construction de fondation

En fonction du changement de la rigidité de chaque système de construction, les influences du semi-espace se transportent soit sur l'un soit sur l'autre système de construction, soit sur les deux. Les grandeurs de ces influences sont montrées dans une suite d'exemples, dans lesquels sont examinées séparément: les influences des changements de la rigidité de chaque système puis les influences des changements des modules de déformation, et en dernier lieu, les influences des changements des longueurs des porte-à-faux sur le système de fondation.

Les bandes discontinues de fondation, ainsi que la justification de leur emploi dans certains cas, sont traitées dans un chapitre spécial. Pour un système de bandes discontinus sont donnés aussi des diagrammes qui permettent un calcul rapide des dimensions des éléments d'une bande discontinue, en fonction de sa rigidité et des module de déformation du semi-espace.

En s'appuyant sur les observations, certaines indications sont données comment on doit traiter d'une façon constructive, des système de construction pareils.

B I B L I O G R A F I J A

1. Biot, M. A. 1937 — Bending of an Infinite Beam on an Elastic Foundation, *J. Applied Mechanics*, Vol. 59 of *Trans. Am. Soc. Mech. Engrs.*, pp A1 – A7.
2. Borowicka, H. 1936 — Influence of Rigidity of a Circular Foundation Slab on the Distribution of Pressures over the Contact Surface. *Proc. Intern. Conf. Soil Mech.* Cambridge, Mass. Vol. 2, pp 144–149.
3. Borowicka, H. 1938 — The Distribution of Pressure Under a Uniformly Loaded Elastic Strip Resting on Elastic – Isotropic Ground. *Second Congr. Intern. Assoc. Bridge and Structural Eng.*, Final Report, VII, 3, Berlin.
4. De Beer, E. E. 1948 — Calcul de poutres reposant sur le sol. Coefficient de raideur K du Sol. *Annales des Travaux Publics de Belgique*, Juin 1948.
5. De Beer, E. E. 1949 — *Grondmechanica*, II. Deel. 1949. Uitgeversmij N. V. Standaard Boekhandel, Gent, Leuven, Antwerpen, Brussel.
6. De Beer, E. E. et Krsmanovitch, D. 1951/52 — Calcul de poutre reposant sur le sol. Cas des charges uniformement reparties, des charges equidistantes et des charges excentrees *Annales des Travaux Publics de Belgique*, Dec. 1951 et Fevr. 1952.
7. De Beer, E. E. 1955 — Le calcul de poutres et plaques appuyees sur le sol. U rukopisu neobjavljeno.
8. Fröhlich, O. K. 1934 — *Druckverteilung im Baugrunde*. Berlin, J. Springer, 1934.
9. Fröhlich, O. K. 1935 — Die Bemessung von Flächen Gründungen aus Eisenbeton und die neuere Baugrundforschung. *Beton und Eisen*, 1935. H. 12.
10. Habel, A. 1938 — Näherungsberechnung des auf dem elastisch-izotropen Halbraum aufliegenden elastischen Balkens. *Der Bauingenieur*, Vol. 19, pp 76 – 80.
11. Hetenyi, M. 1946 — *Beams on Elastic Foundation*, University of Michigan Press, 1946.
12. Kögler, F. 1927 i Scheidig, A. 1929 — *Druckverteilung im Baugrunde*. Bautechnik, 1927, 1929, Berlin.
13. Lewe, Dr. 1923 — Platten rechteckiger Grundrisstellung auf elastisch nachgiebiger Unterlage. *Bauingenieur*, 1923, H. 15.
14. Nemenyi, P. 1928 — Theorie durchlaufender trägerloser Fundamentstreifen auf elastischer Bettung. *Beton und Eisen*, 1928, H. 24.
15. Nemenyi, P. 1931 — Tragwerke auf elastisch nachgiebiger Unterlage *Zeitschrift ang. Math.* 1931, H. 6.
16. Popov, E. P. 1950 — Successive Approximation for Beams on an Elastic Foundation. *Proc. of Amer. Soc. of Civ. Eng.* Vol. 76. Separat broj 18, May, 1950, Structural Division.
17. V. Sanden, K. und Schleicher, F. 1926 — Zur Theorie des Balkens auf elastischer Unterlage. *Beton und Eisen*, 1926, H. 5.
18. Schleicher, F. 1926 — Zur Theorie des Baugrundes, *Bauingenieur*, 1926.
19. Terzaghi, K. 1948 — *Theoretical Soil Mechanics*, London Chapman and Hall, Peto izdanje.
20. Terzaghi, K. 1955 — Evaluation of Coefficients of Subgrade Reaction, *Geotechnique*, 1955, Vol. V.
21. Tschebotarioff, G. 1951 — *Soil Mechanics. Foundations and Earth Structures*. Mc Graw-Hill Company, New-York-London.
22. Wolf, K. 1935 — Ausbreitung der Kraft in der Halbebene und im Halbraum bei anisotropem Material. *Zeitschrift ang. Math.* 1935.

