



Baština Akademije nauka i umjetnosti Bosne i Hercegovine

Sur certaines suites itérées

Bajraktarević, Mahmut

1954.

Akademija nauka i umjetnosti Bosne i Hercegovine

<https://bastina.anubih.ba/items/77cd886a-38f8-4cbd-b998-aab45879b32e>

Preuzeto s Baštine Akademije nauka i umjetnosti Bosne i Hercegovine

<https://bastina.anubih.ba/>

NAUČNO DRUŠTVO NR BOSNE I HERCEGOVINE

DJELA

Knj. IV

ODJELJENJE PRIVREDNO-TEHNIČKIH NAUKA

Knj. 1

MAHMUD BAJRAKTAREVIĆ

SUR CERTAINES SUITES ITÉRÉES

SARAJEVO

1954

NAUČNO DRUŠTVO NR BOSNE I HERCEGOVINE

DJELA

Knj. IV

ODJELJENJE PRIVREDNO-TEHNIČKIH NAUKA

Knj. 1

MAHMUD BAJRAKTAREVIĆ

SUR CERTAINES SUITES ITÉRÉES



SARAJEVO

1954.



SUR CERTAINES SUITES ITÉRÉES

L'objet de ce travail est l'étude des suites définies par $x_n^{(1)}(z, t) = \varepsilon_0 f_{\mu} \{ \varepsilon_1 f_{\mu+1} [\dots (\varepsilon_n f_{\mu+n}(t)) \dots] \}$ ($n=0, 1, 2, \dots$) où $\{f_\nu(t)\}$ ($\nu=0, 1, 2, \dots$) est une suite de fonctions réelles d'une variable réelle t et particulièrement des suites $\{x_n^{(1)}(z, t)\}$, $f_\nu(t)$ étant des fonctions croissantes, $\varepsilon_\nu = \pm 1$ ($\nu=0, 1, 2, \dots$). Plusieurs auteurs¹⁾ ont déjà étudié un cas spécial de ces suites où $f_\nu(t) = \sqrt{2+t}$ ($\nu=0, 1, 2, \dots$) qui a servi de point de départ à ce travail. D'autres cas particuliers ont été étudiés également mais avec des buts tout à fait différents et par des méthodes différentes de celle employée dans ce travail, à savoir les fractions continues réelles d'une part et le développement des fonctions en séries suivant le système des fonctions orthogonales de Rademacher²⁾ d'autre part, ce dernier problème se déduisant de la suite $\{x_n^{(1)}(z, t)\}$ pour $f_\nu(t) = c_\nu + t$ par un changement des fonctions orthogonales de Rademacher η_ν ($\nu=0, 1, 2, \dots$) défini par $\eta_\nu = -\varepsilon_0 \varepsilon_1 \dots \varepsilon_\nu$.

La solution du problème de ce travail est étroitement liée à celle du système d'équations fonctionnelles $f_\mu[g_{\mu+1}(2z)] = g_\mu(z)$ et particulièrement à la solution de l'équation fonctionnelle $f[g(2z)] = g(z)$ qui dans certains cas (p. ex. dans le cas de la monotonie croissante de $f(t)$) se ramène à l'équation fonctionnelle de *Schröder* ou à celle d'*Abel*³⁾.

Dans la première partie de ce travail on étudie en principe les propriétés de la suite $\{x_n^{(1)}(z, t)\}$ lorsque les $f_\nu(t)$ sont croissantes; voici les résultats les plus importants:

1) Paul Wiernsberger, Sur les polynômes réguliers et les radicaux carrés superposés. J. r. und ang. Math., 130 (1905), p. 144—152. C. R. Paris 137 (1903), p. 1233—1234; 138 (1904) p. 1401—1403. — H. Lebesgue, Sur certaines expressions irrationnelles illimitées. Bull. Calcutta Math. Soc. 29, p. 17—28 — G. Polya und G. Szegő, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I, 1925, Aufgaben 183—185, p. 33.

2) Hans Rademacher, Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen. Math. Ann. 87 (1922), p. 130—138. — S. Kaczmarz et H. Steinhaus, Le système orthogonal de M. Rademacher, Studia math., 2 (1930), p. 231—247.

3) E. Picard, Leçons sur quelques équations fonctionnelles, Paris, 1928, p. 155.

1) La suite est convergente presque pour toutes les valeurs de z ($0 \leq z \leq 2$);

2) La fonction limite est décroissante;

3) Entre la suite des fonctions limites $\xi_\mu(z, 0)$ et la suite des fonctions $f_\nu(t)$ il existe une correspondance biunivoque.

En outre on prouve l'existence des suites des fonctions $f_\nu(t)$ beaucoup plus générales dont la suite $\{x_\nu^{(\mu)}(z, t)\}$ correspondante est convergente.

On donne ensuite quelques criteriums pour que la fonction limite $\xi(z, 0)$ de la suite $\{x_n(z, 0)\}$ correspondant à $f_\nu(x) = f(x)$ ($\nu = 0, 1, 2, \dots$) soit continue dans l'intervalle fermé $\langle 0, 2 \rangle$ dans le cas où $f(x)$ est continue et strictement croissante. Les résultats obtenus sont appliqués à la suite $\{x_n(z, 0)\}$ correspondant à la fonction $f(x) = a \sqrt[m]{a+x} / \sqrt[m]{2a}$ ($m > 0, a > 0$) qui représente une généralisation du problème déjà cité¹).

Dans la deuxième partie on établit la liaison qui existe entre la fonction limite $\xi(z, 0)$ de la suite $\{x_n^{(\mu)}(z, 0)\}$ correspondant à la suite $f_\nu(t) = f(t)$ ($\nu = 0, 1, 2, \dots$) dans le cas de la continuité et la monotonie stricte de $\xi(z, 0)$ avec les itérées continues de $f(t)$ et on donne la formule qui permet de calculer, dans ce cas, la fonction limite $\xi(z, 0)$ au moyen de l'itérée continue convenable, toutes les itérées continues pouvant toujours être calculées⁴). Cependant, la solution de ce problème se heurte à une grave difficulté, parce que le choix de l'itérée continue convenable, dans le cas où elle existe, parmi une infinité d'autres est en général très difficile.

Les résultats cités ont été déjà l'objet de trois notes⁵), mais ici ils sont exposés sous une forme plus précise et plus générale.

I.

1. Soit $f_\nu(x)$ ($-A_\nu \leq x \leq +A_\nu$; $\nu = 0, 1, 2, \dots$) une suite de fonctions telles que

$$(1) \quad f_\nu(x) \geq 0; \quad f_\nu(x_1) \leq f_\nu(x_2) \quad (x_1 < x_2); \quad f_\nu(A_\nu) \leq A_{\nu+1}^{-1} \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

A_ν étant des constantes positives. A tout nombre $\mu = 0, 1, 2, \dots$ et à tout nombre z du segment $I = \langle 0, 2 \rangle$ représenté dans le système binaire par $z = d_0, d_1 d_2 \dots$, correspond une suite unique

$$(2) \quad x_\nu^{(\mu)}(z, t) = \varepsilon_0 f_\mu \{ \varepsilon_1 f_{\mu+1} [\dots (\varepsilon_\nu f_{\mu+\nu}(t)) \dots] \} \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots; t = 0)$$

⁴) Morgan Ward and F. B. Fuller, The continuous iteration of real functions. Bull. Amer. Math. Soc., 42, 1936, p. 393—396.

⁵) M. Bajraktarević, Sur certaines suites itérées. C. R. Paris, 236 (1953), p. 881—883, 988—989, 1125—1127.

avec

$$(3) \quad \varepsilon_v = \frac{1 - 2d_v}{1 - 2d_{v-1}} \quad (v = 0, 1, 2, \dots; \quad d_{-1} = 0),$$

en admettant que les deux suites (2) qui correspondent au nombre $z = p/2^q$ (p et q entiers, $0 < p < 2^{q+1}$, $q \geq 0$), ne constituent qu'un élément de l'ensemble des suites (2).

On voit facilement que le système d'équations (3) est équivalent au système

$$(4) \quad 2d_v = 1 - \varepsilon_0 \varepsilon_1 \dots \varepsilon_v \quad (v = 0, 1, 2, \dots).$$

La suite (2) a les propriétés suivantes:

A. Pour chaque valeur de $z \in I$ elle a tout au plus deux points d'accumulation $\underline{\xi}_\mu(z, 0)$ et $\bar{\xi}_\mu(z, 0)$, $\underline{\xi}_\mu(z, 0) \leq \bar{\xi}_\mu(z, 0)$.

B. Si z et $\bar{z}$ sont deux points de I et si $\underline{\xi}_\mu(\bar{z}, 0) < \bar{\xi}_\mu(\bar{z}, 0)$, aucun de ses termes ne se trouve dans l'intervalle⁶⁾ [fermé] $\{\underline{\xi}_\mu(\bar{z}, 0), \bar{\xi}_\mu(\bar{z}, 0)\}$ sauf le terme $x_{q-1}^{(\mu)}(z, 0)$ pour $z = \bar{z} = p/2^q$.

C. $\underline{\xi}_\mu(z, 0)$ et $\bar{\xi}_\mu(z, 0)$ sont [strictement] décroissantes:

$$A_{\mu-1} \geq \omega_\mu \geq \bar{\xi}_\mu(z, 0) \geq \underline{\xi}_\mu(z, 0) \geq \bar{\xi}_\mu(\bar{z}, 0) \geq \underline{\xi}_\mu(\bar{z}, 0) \geq -\omega_\mu \geq -A_{\mu-1} \\ (z < \bar{z})$$

$$(5) \quad \omega_\mu = \lim f_\mu \{f_{\mu+1} [\dots (f_{\mu+v}(0)) \dots]\} \quad (v \rightarrow \infty).$$

D. $\underline{\xi}_\mu(z, 0)$ et $\bar{\xi}_\mu(z, 0)$ tendent vers $\bar{\xi}_\mu(\bar{z}, 0)$ si $z \uparrow \bar{z}$ ($0 < \bar{z} \leq 2$) et vers $\underline{\xi}_\mu(\bar{z}, 0)$ pour $z \downarrow \bar{z}$ ($0 \leq \bar{z} < 2$).

$$E. \quad \bar{\xi}_\mu(z, 0) + \underline{\xi}_\mu(2-z, 0) = 0 \quad (0 \leq z \leq 2).$$

F. Pour tout x de l'intervalle $\underline{\xi}_{\mu+1}(z, 0) < x < \bar{\xi}_{\mu+1}(z, 0)$, la fonction $f_\mu(x)$ peut être remplacée par une fonction quelconque sans rien changer à la suite (2).

G. 1) Pour que $\underline{\xi}_\mu(z, 0)$ soit continue dans I {alors $\underline{\xi}_\mu(z, 0) = -\bar{\xi}_\mu(z, 0)$ }, il faut qu'on ait $f_\mu(-A_\mu) = f_\mu(-\omega_{\mu+1}) = 0$ [$f_{\mu+q}(-A_{\mu+q}) = 0 = f_{\mu+q}(-\omega_{\mu+q+1})$ ($q = 0, 1, 2, \dots$)].

2) Pour que $\underline{\xi}_\mu(z, 0)$ soit continue dans I , les $f_v(x)$ étant continues et strictement croissantes, il faut que l'on ait

$$f_{\mu+q}(-A_{\mu+q}) = 0, \quad f_{\mu+q+1}(A_{\mu+q+1}) = A_{\mu+q} \quad (q = 0, 1, 2, \dots).$$

3) [Si $f_v(-A_v) > 0$ ($v = 0, 1, 2, \dots$), les points de discontinuité de $\underline{\xi}_\mu(z, 0)$ et $\bar{\xi}_\mu(z, 0)$ sont partout denses dans I].

4) [S'il existe un seul point $z \in I$ tel que $\underline{\xi}_\mu(z, 0) < \bar{\xi}_\mu(z, 0)$ pour chaque valeur de $\mu > N$, les points de discontinuité de $\underline{\xi}_\mu(z, 0)$ et $\bar{\xi}_\mu(z, 0)$ ($\mu = 0, 1, 2, \dots$) sont partout denses dans I].

⁶⁾ Les remarques qui se rattachent à l'hypothèse de monotonie stricte des $f_v(x)$ sont mises entre les crochets [...].

Démonstration. Pour démontrer ces propriétés nous allons d'abord exposer quelques faits qui sont faciles à démontrer.

a. La fonction $x_{\nu}^{(\mu)}(z, t)$ considérée comme fonction uniquement de t est [strictement] croissante ou [strictement] décroissante sur le segment $\langle -A_{\mu+\nu}, +A_{\mu+\nu} \rangle$ suivant que $\varepsilon_0 \dots \varepsilon_{\nu} = +1$ ou -1 .

Il faut d'abord démontrer que cette fonction est bien définie sur ce segment. En effet, lorsque t parcourt ce segment, la fonction $\varepsilon_{\nu} f_{\mu+\nu}(t)$ varie entre $-A_{\mu+\nu-1}$ et $+A_{\mu+\nu-1}$ de sorte que la fonction $\varepsilon_{\nu-1} f_{\mu+\nu-1}[\varepsilon_{\nu} f_{\mu+\nu}(t)]$ est bien définie elle aussi, ses valeurs se trouvant sur le segment $\langle -A_{\mu+\nu-2}, +A_{\mu+\nu-2} \rangle$. En diminuant l'indice ν toujours d'une unité, on conclut que la fonction $x_{\nu}^{(\mu)}(z, t)$ est vraiment définie sur le segment considéré. En passant de l'indice ν à $\nu+1$, cette fonction change la nature de la monotonie seulement si $\varepsilon_{\nu+1} = -1$ et comme $x_0^{(\mu)}(z, t)$ est [strictement] croissante ou décroissante suivant que ε_0 est égale à $+1$ ou -1 , la propriété citée est démontrée.

b. La suite $x_{\nu}^{(\mu)}(0, 0) = f_{\mu} \{f_{\mu+1} [\dots (f_{\mu+\nu}(0)) \dots]\} (\nu = 0, 1, 2, \dots)$ est [strictement] croissante et converge vers une valeur $\omega_{\mu} \leq A_{\mu-1}$ ($\mu = 1, 2, \dots$), $\omega_0 = A_{-1}$.

c. Si $\varepsilon_{\nu+2} = 1$ ($\nu = 0, 1, 2, \dots$), le terme $x_{\nu+1}^{(\mu)}(z, 0)$ se trouve dans l'intervalle fermé [ouvert] dont les bornes sont $x_{\nu}^{(\mu)}(z, 0)$ et $x_{\nu+2}^{(\mu)}(z, 0)$.

En effet, $f_{\mu+\nu+2}(0) \geq 0$ et

$$f_{\mu+\nu+1}(f_{\mu+\nu+2}(0)) \geq f_{\mu+\nu+1}(0) \geq 0$$

de sorte que $\varepsilon_{\nu+1} f_{\mu+\nu+1}(0)$ se trouve dans l'intervalle fermé [ouvert] dont les bornes sont 0 et $\varepsilon_{\nu+1} f_{\mu+\nu+1}(f_{\mu+\nu+2}(0))$. La fonction $x_{\nu}^{(\mu)}(z, t)$ étant [strictement] monotone, $x_{\nu+1}^{(\mu)}(z, 0) = x_{\nu}^{(\mu)}(z, \varepsilon_{\nu+1} f_{\mu+\nu+1}(0))$ se trouve dans l'intervalle fermé [ouvert] dont les bornes sont $x_{\nu}^{(\mu)}(z, 0)$ et $x_{\nu+2}^{(\mu)}(z, 0)$.

d. Si $\varepsilon_{\nu+2} = -1$, le terme $x_{\nu+2}^{(\mu)}(z, 0)$ se trouve dans l'intervalle fermé [ouvert] dont les bornes sont égales à $x_{\nu}^{(\mu)}(z, 0)$ et $x_{\nu+1}^{(\mu)}(z, 0)$.

La démonstration est analogue à celle de c.

e. $x_{\nu+i}^{(\mu)}(z, 0) \geq x_{\nu}^{(\mu)}(z, 0)$ pour $\varepsilon_0 \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{\nu+1} = +1$,
 $x_{\nu+i}^{(\mu)}(z, 0) \leq x_{\nu}^{(\mu)}(z, 0)$ pour $\varepsilon_0 \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{\nu+1} = -1$,
($i = 0, 1, 2, \dots; \nu = 0, 1, 2, \dots$).

[Si $f_{\nu}(x)$ sont strictement monotones, les inégalités pures y sont seules valables].

En effet, l'argument $t = \varepsilon_{\nu+1} f_{\mu+\nu+1} \{ \dots [\varepsilon_{\nu+i} f_{\mu+\nu+i}(0)] \dots \}$ est constamment ≥ 0 [> 0] ou constamment ≤ 0 [< 0]. La démonstration découle maintenant immédiatement de la monotonie [stricte] de $x_{\nu}^{(\mu)}(z, t)$.

[Le fait que $f_{\mu+\nu+1} \{ \varepsilon_{\nu+2} f_{\mu+\nu+2} [\dots (\varepsilon_{\nu+t} f_{\mu+\nu+t} (0)) \dots] \} > 0$ dans le cas de la monotonie stricte de $f_{\nu}(x)$, se démontre de proche en proche. De l'inégalité $0 < f_{\mu+\nu+t} (0 < A_{\mu+\nu+t-1})$ on conclut l'inégalité $0 < f_{\mu+\nu+t-1} [\varepsilon_{\nu+t} f_{\mu+\nu+t} (0)] < A_{\mu+\nu+t-2}$, etc.].

f. Pour déduire de ces propriétés la nature de (2) il faut distinguer deux cas différents.

Premier cas. Si $z \neq n/2^q$, la suite (2) consiste en deux suites partielles l'une [strictement] croissante, l'autre [strictement] décroissante. Ses termes peuvent être groupés en groupes de la forme (en écrivant, pour plus de simplicité, $x_{\lambda_k}^{(\mu)}$ au lieu de $x_{\lambda_k}^{(\mu)}(z, 0)$):

$$(6) \quad x_{\lambda_k-1}^{(\mu)}, x_{\lambda_k}^{(\mu)}, x_{\lambda_k+1}^{(\mu)}, \dots, x_{\lambda_{k+1}-2}^{(\mu)} \quad (k=0, 1, 2, \dots),$$

λ_k étant définis par

$$(7) \quad \left. \begin{array}{l} \varepsilon_i = -1 \text{ pour } i = \lambda_k \\ \varepsilon_i = +1 \text{ pour } i \neq \lambda_k \end{array} \right\} (i \geq 0; k=0, 1, 2, \dots; \lambda_k < \lambda_{k+1}; \lambda_0 \geq 0)$$

{avec les remarques: 1) si $\lambda_0 > 1$, les groupes (6) sont précédés par le groupe des termes $x_{\lambda_k}^{(\mu)}(z, 0)$ ($\nu=0, 1, 2, \dots, \lambda_0-2$) qui appartient à la première suite partielle; 2) si $\lambda_0=0, \lambda_1 > 1$, le groupe (6) pour $k=0$ commence par le terme $x_{\lambda_0}^{(\mu)}(z, 0)$; 3) si $\lambda_0=0, \lambda_1=1$, il faut mettre $k=1, 2, \dots$ }, de sorte que chaque groupe pour k impair appartient à la première suite partielle et pour chaque k pair à la deuxième suite partielle. Il peut arriver, le cas de la monotonie stricte des $f_{\nu}(x)$ excepté, que pour une valeur de k on a $x_{\lambda_k-2}^{(\mu)} = x_{\lambda_k-1}^{(\mu)}$, mais dans ce cas on a $x_{\lambda_k}^{(\mu)} = x_{\lambda_k-2}^{(\mu)}$ ($\nu \geq \lambda_k$) également, ce qui signifie que $x_{\lambda_k-2}^{(\mu)}$ est la limite de (2).

Deuxième cas. $z = p/2^q$. Le nombre z possède deux formes dans le système binaire que nous désignerons dans la suite par

$$z'' = d_0, d_1 \dots d_{q-1} 0\bar{1} = d_0, d_1 \dots d_{q-1} 0111\dots,$$

$$z' = d_0, d_1 \dots d_{q-1} 1\bar{0} = d_0, d_1 \dots d_{q-1} 1000\dots$$

Les suites correspondantes (3) ont la forme

$$(8) \quad \varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{q-1}, \pm \varepsilon_q, \varepsilon_{q+1} = -1, \varepsilon_{q+i} = +1 \quad (i=2, 3, \dots) \text{ avec } \varepsilon_0 \varepsilon_1 \dots \varepsilon_q = +1$$

et diffèrent seulement par le terme d'indice q , le signe „+“ correspondant à z'' . A chacune de ces suites correspond une suite (2) convergente {parce que, d'après b., on a

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} f_{q+1+\nu} (\dots (f_{\mu+q+i} (0)) \dots) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} x_{\lambda_{\mu+q+1}}^{(\mu+q+1)} (0, 0) = \omega_{\mu+q+1} \leq A_{\mu+q}$$

dont la première est [strictement] décroissante, la seconde [stricte-

ment] croissante, abstraction faite des termes $x_i^{(\mu)}(z, 0)$ ($i < q$). Leurs valeurs limites sont données par

$$(9) \quad \left. \begin{aligned} \bar{\xi}_\mu(z, 0) &= \xi_\mu(z'', 0) = \\ &= x_{q-1}^{(\mu)}(z, \varepsilon_q f_{\mu+q}(-\omega_{\mu+q+1} + 0)) \geq x_{q-1}^{(\mu)}(z, 0) \\ \underline{\xi}_\mu(z, 0) &= \xi_\mu(z', 0) = \\ &= x_{q-1}^{(\mu)}(z, -\varepsilon_q f_{\mu+q}(-\omega_{\mu+q+1} + 0)) \leq x_{q-1}^{(\mu)}(z, 0) \end{aligned} \right\} \varepsilon_0 \dots \varepsilon_q = +1.$$

En supposant que ces deux suites fassent deux suites partielles d'une seule suite consistant uniquement en termes de ces deux suites, $\bar{\xi}_\mu(z, 0)$ et $\underline{\xi}_\mu(z, 0)$ représentent la limite supérieure et la limite inférieure de cette suite, lesquelles sont ses points uniques d'accumulation.

De tout ce qui précède il découle la démonstration de A.

g. La démonstration de B. pour $z = \bar{z}$ découle immédiatement de ce qu'on a dit dans f.

Supposons que $z = d_0, d_1 d_2 \dots < \bar{z} = \bar{d}_0, \bar{d}_1 \bar{d}_2 \dots$. Dans ce cas il existe toujours un entier $n \geq 0$ tel que $d_v = \bar{d}_v$ ($v = 0, 1, \dots, n$), $d_{n+1} = 0, \bar{d}_{n+1} = 1$ de sorte que, d'après (4), $\varepsilon_0 \dots \varepsilon_{n+1} = +1$, ce qui signifie, d'après e., que

$$(10) \quad x_{n+i}^{(\mu)}(z, 0) \geq x_n^{(\mu)}(z, 0) = x_n^{(\mu)}(\bar{z}, 0) \geq x_{n+i}^{(\mu)}(\bar{z}, 0) \quad (i = 1, 2, \dots)$$

c'est-à-dire

$$(10a) \quad x_{n+i}^{(\mu)}(z, 0) \geq [\text{ou } >] \bar{\xi}_\mu(\bar{z}, 0) \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Si les nombres z et $\bar{z}$ (ou un seul) sont de la forme $p/2^q$, il faut mettre $z = z', \bar{z} = z''$.

De la même façon on démontre l'inégalité

$$(10b) \quad x_{n+i}^{(\mu)}(z, 0) \leq [\text{ou } <] \underline{\xi}_\mu(\bar{z}, 0) \quad (i = 1, 2, \dots)$$

dans le cas $z > \bar{z}$ (respectivement $z = z'' > \bar{z} = z'$ si z et $\bar{z}$ ont la forme $p/2^q$). Ainsi, tenant compte des résultats obtenus dans f., B. est complètement démontrée.

h. Pour $i \rightarrow \infty$ on tire de (10a) et (10b)

$$\bar{\xi}_\mu(z, 0) \geq \bar{\xi}_\mu(\bar{z}, 0) \quad (z < \bar{z}), \quad \bar{\xi}_\mu(z, 0) \leq \bar{\xi}_\mu(\bar{z}, 0) \quad (z > \bar{z})$$

d'où, d'après b., découle C. sous l'hypothèse de la monotonie ordinaire des $f_v(x)$.

Pour démontrer C. sous l'hypothèse de la monotonie stricte des $f_v(x)$, il est nécessaire de distinguer deux cas, suivant que parmi les chiffres d_v ($v = n+2, n+3, \dots$)⁷⁾ de z il y en a un égal à 0 ou non.

⁷⁾ La définition de n est donnée dans g.

Premier cas. $d_{n+i}=0$ pour un $i \geq 2$. Alors $\varepsilon_0 \dots \varepsilon_{n+i} = +1$ ce qui signifie, d'après e., (10) et (10a), que

$$x_{n+v}^{(u)}(z, 0) > x_{n+i-1}^{(u)}(z, 0) > x_n^{(u)}(z, 0) = x_n^{(u)}(\bar{z}, 0) \geq \bar{\xi}_\mu(\bar{z}, 0) \\ (\nu=i, i+1, \dots)$$

d'où l'on tire, pour $\nu \rightarrow \infty$, $\bar{\xi}_\mu(z, 0) > \bar{\xi}_\mu(\bar{z}, 0)$.

Au contraire, si $d_{n+i}=1$ ($i=2, 3, \dots$), alors il existe toujours un $j \geq 2$ tel que $\bar{d}_{n+j}=1$ (autrement on aurait $z=\bar{z}$), de sorte qu'on a, d'après e., (10) et 10b),

$$x_{n+v}^{(u)}(\bar{z}, 0) < x_{n+j-1}^{(u)}(\bar{z}, 0) < x_n^{(u)}(\bar{z}, 0) = x_n^{(u)}(z, 0) \leq \bar{\xi}_\mu(z, 0) \\ (\nu=j, j+1, \dots),$$

d'où l'on tire, pour $\nu \rightarrow \infty$, $\bar{\xi}_\mu(\bar{z}, 0) < \bar{\xi}_\mu(z, 0)$.

i. En conservant la signification (7) des λ_k ($k=0, 1, 2, \dots$), les chiffres d'un nombre z quelconque $z=d_0, d_1 d_2 \dots$ du système binaire peuvent être groupés en groupes de la forme

$$d_{\lambda_k-1}, d_{\lambda_k}, d_{\lambda_k+1}, \dots, d_{\lambda_{k+1}-2}$$

avec $d_{\lambda_k-1}=2^{-1} \cdot [1 - (-1)^k]$, $d_{\lambda_k+i}=2^{-1} \cdot [1 + (-1)^k]$ ($i=0, 1, \dots, \lambda_{k+1}-\lambda_k-2$) et $d_i=0$ ($i=0, 1, \dots, \lambda_0-2$ pour $\lambda_0 > 1$) où les groupes pour k pair (impair) correspondent aux groupes des termes de la suite partielle décroissante (croissante) de la suite (2).

Pour chaque nombre $z < \bar{z} = \bar{d}_0, \bar{d}_1 \bar{d}_2 \dots$, $\bar{z}$ étant déterminé, il existe le plus petit nombre n tel que $d_\nu = \bar{d}_\nu$ ($\nu=0, 1, \dots, n$), $d_{n+1}=0, \bar{d}_{n+1}=1$, d_ν ($\nu > n+1$) pouvant être choisis arbitrairement. Alors z est un nombre quelconque du segment $\langle \bar{z}_n, \bar{z}_{n+1} \rangle$ z_ν indiquant les valeurs approchées successives de $\bar{z}$, $\bar{z}_\nu = \bar{d}_0, \bar{d}_1 \dots \bar{d}_\nu$ ($\nu=0, 1, 2, \dots$). Si l'on donne à n successivement les valeurs $N, N+1, N+2, \dots$, le nombre z décrit un certain voisinage gauche du point $\bar{z}$. Le nombre n , d'après sa définition, ne peut prendre que les valeurs $n=\lambda_k+i-1$ ($i=0, 1, \dots, \lambda_{k+1}-\lambda_k-1$; $k=0, 2, 4, \dots$). Pour un tel n , d'ailleurs quelconque, on a $\varepsilon_0 \dots \varepsilon_{n+1} = +1$ (4) (ε_i correspondant au nombre z) et, d'après e., $x_{n+j}^{(u)}(z, 0) \geq x_n^{(u)}(z, 0) = x_n^{(u)}(\bar{z}, 0)$ ($j=0, 1, 2, \dots$) ce qui veut dire que tous les termes $x_{n+j}^{(u)}(z, 0)$ ($j=1, 2, \dots$), d'après f., sont compris entre deux termes successifs d'un même groupe de termes de la suite partielle décroissante de la suite $x_\nu^{(u)}(\bar{z}, 0)$ ($\nu=0, 1, 2, \dots$) (pour $i=1, 2, \dots, \lambda_{k+1}-\lambda_k-1$) ou entre le dernier terme d'un tel groupe et le premier terme du groupe suivant analogue (pour $i=0$). Autrement dit, $x_{n+j}^{(u)}(z, 0)$ ($j=1, 2, \dots$) est toujours compris entre deux termes successifs de la suite partielle décroissante de la suite $x_\nu^{(u)}(\bar{z}, 0)$ ($\nu=0, 1, 2, \dots$). Du fait que cette suite converge en décroissant vers $\bar{\xi}_\mu(\bar{z}, 0)$, on

conclut que pour chaque $\varepsilon > 0$ on peut trouver un nombre $N(\varepsilon)$ tel que

$$0 \leq x_{n+j}^{(\mu)}(z, 0) - \xi_{\mu}(\bar{z}, 0) < \varepsilon \quad (n > N(\varepsilon); j = 1, 2, \dots).$$

Dans tout ce qui précède il était sous-entendu que la limite $\xi_{\mu}(2, 0)$ existait. Mais, il est évident que, si $\xi_{\mu}(2, 0) = -\infty$, on a également $\lim_{z \uparrow 2} \xi_{\mu}(z, 0) = \lim_{z \uparrow 2} \xi_{\mu}(z, 0) = \xi_{\mu}(2, 0) = -\infty$.

Ainsi la première partie de D est démontrée. Comme on peut démontrer la deuxième partie d'une manière analogue, D. est démontrée entièrement. On a aussi $\lim_{z \downarrow 0} \xi_{\mu}(z, 0) = \lim_{z \downarrow 0} \xi_{\mu}(z, 0) = +\infty$ si $\xi_{\mu}(0, 0) = +\infty$.

j. Pour démontrer E. nous allons nous servir du fait suivant: Pour que les deux suites $\{\varepsilon_i\}$ et $\{\bar{\varepsilon}_i\}$ ($i = 1, 2, \dots$) diffèrent seulement par le terme d'indice 0, il faut et il suffit qu'entre les nombres correspondants z et $\bar{z}$ il existe la relation $\bar{z} + z = 2$ avec $z = z''$, $\bar{z} = \bar{z}'$ ou $z = z'$, $\bar{z} = \bar{z}''$ si $z = p/2^q$. Alors pour chaque paire de nombres z et $\bar{z}$ ($z + \bar{z} = 2$, $z \in I$) on a la relation $x_{\nu}^{(\mu)}(z, 0) = x_{\nu}^{(\mu)}(\bar{z}, 0)$ ($\nu = 0, 1, 2, \dots$) d'où, pour $\nu \rightarrow \infty$, E. suit immédiatement.

La propriété F. sera démontrée un peu plus tard (voir p. 14).

k. Soit $\xi_{\mu}(z, 0) - \xi_{\mu}(z, 0) = \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$).

D'après (9), on a $\xi_{\mu}(-\omega_{\mu+1} + 0) = -f_{\mu}[-\omega_{\mu+1} + 0] = -\xi_{\mu}(1, 0)$ d'où l'on tire d'abord $f_{\mu}[-\omega_{\mu+1} + 0] = 0$, puis d'après (1) $f_{\mu}(-\omega_{\mu+1}) = 0$, et ensuite, d'après (1) et b), $f_{\mu}(A_{\mu}) = 0$.

Si les $f_{\nu}(x)$ sont strictement croissantes on a d'après (9) pour $z = p/2^q$

$$x_{q-1}^{(\mu)}[z, \varepsilon_q f_{\mu+q}(-\omega_{\mu+q+1} + 0)] = x_{q-1}^{(\mu)}[z, -\varepsilon_q f_{\mu+q}(-\omega_{\mu+q+1} + 0)]$$

($\varepsilon_0 = \varepsilon_q = 1$)

d'où l'on tire d'abord $f_{\mu+q}(-\omega_{\mu+q+1} + 0) = 0$, puis $f_{\mu+q}(-\omega_{\mu+q+1}) = 0$, et après $f_{\mu+q}(-A_{\mu+q}) = 0$ ($q = 0, 1, 2, \dots$). De ces deux équations on tire l'équation $\omega_{\mu+q+1} = A_{\mu+q}$ ($q = 0, 1, 2, \dots$). G 1) est ainsi démontrée.

La démonstration de G 2) découle de celle de G 1). En effet, la dernière égalité, pouvant être écrite sous la forme $f_{\mu+q+1}(\omega_{\mu+q+2} - 0) = A_{\mu+q}$ grâce à la continuité de $f_{\mu+q+1}(x)$, et tenant compte d'elle même en y mettant $q+1$ à la place de q , devient $f_{\mu+q+1}(A_{\mu+q+1}) = A_{\mu+q}$ ($q = 0, 1, 2, \dots$).

Pour démontrer G 3) il suffit de prouver que $\xi_{\mu}(z, 0) > \xi_{\mu}(z, 0)$ pour chaque $z = p/2^q$. En effet, de l'inégalité $-1_{\nu} \leq -1_{\nu+1}$, tenant compte de toutes les hypothèses faites sur $f_{\nu}(x)$, on tire l'inégalité $0 < f_{\mu+q}(-\omega_{\mu+q+1} + 0)$ laquelle avec (9) donne le résultat.

Soit maintenant $z = d_0, d_1 d_2 \dots$ le point pour lequel, d'après l'hypothèse, $\xi_\mu(z, 0) < \bar{\xi}_\mu(z, 0)$ ($\mu > N$). Soient z_1 et z_2 ($0 \leq z_1 < z_2 \leq 2$) les bornes d'un segment quelconque qui ne contient pas z . On peut toujours choisir les nombres: $k > N$, $\bar{d}_0, \bar{d}_1, \dots, \bar{d}_{k-1}$ tels que $\bar{z} = \zeta + 2^{-k} z = \bar{d}_0, \bar{d}_1 \bar{d}_2 \dots$ ($\zeta = \bar{d}_0, \bar{d}_1 \dots \bar{d}_{k-1}$) soit un point du segment $\langle z_1, z_2 \rangle$.

Le point $\bar{z}$ est un point de discontinuité pour $\xi_\mu(z, 0)$ et $\bar{\xi}_\mu(z, 0)$.

En effet, si $\{\varepsilon_i\}$ et $\{\bar{\varepsilon}_i\}$ désignent les suites (3) correspondant à z et $\bar{z}$ respectivement, on a

$$\begin{aligned} x_{k+i}^{(\mu)}(\bar{z}, 0) &= x_{k-1}^{(\mu)}[\bar{z}, \bar{\varepsilon}_k f_{\mu+k} [\dots (\bar{\varepsilon}_{k+i} f_{\mu+k+i}(0)) \dots]] = \\ x_{k-1}^{(\mu)}[\bar{z}, (-1)^{\bar{d}_{k-1}} \varepsilon_0 f_{\mu+k} [\varepsilon_1 f_{\mu+k+1} (\dots [\varepsilon_i f_{\mu+k+i}(0)] \dots)]] &= \\ x_{k-1}^{(\mu)}[\bar{z}, (-1)^{\bar{d}_{k-1}} x_i^{(\mu+k)}(z, 0)]. \end{aligned}$$

Soit d'abord $\bar{d}_{k-1} = 0$. Alors (4) $\bar{\varepsilon}_0 \dots \bar{\varepsilon}_{k-1} = +1$ et $x_{k-1}^{(\mu)}(\bar{z}, t)$ est strictement croissante par rapport à t . Pour $i \rightarrow \infty$ on a

$$\begin{aligned} \xi_\mu(\bar{z}, 0) &= x_{k-1}^{(\mu)}[\bar{z}, \xi_{\mu+k}(z, 0) - 0] \leq x_{k-1}^{(\mu)}[\bar{z}, \xi_{\mu+k}(z, 0)] < \\ < x_{k-1}^{(\mu)}[\bar{z}, \bar{\xi}_{\mu+k}(z, 0)] \leq x_{k-1}^{(\mu)}[\bar{z}, \bar{\xi}_{\mu+k}(z, 0) + 0] = \bar{\xi}_\mu(\bar{z}, 0). \end{aligned}$$

La démonstration étant la même pour $\bar{d}_{k-1} = 1$ aussi, G. 4) est démontrée.

2. Si $f_v(x)$ ($-A_v \leq x \leq +A_v$) sont des fonctions quelconques, la suite $\{x_v^{(\mu)}(z, t)\}$, μ et t fixes, satisfait aux relations:

$$(11) \quad \begin{aligned} x_{v+1}^{(\mu)}(z, t) &= f_\mu[x_v^{(\mu+1)}(2z, t)] = 0 \\ (0 \leq z \leq 0, \bar{1}; -A_{\mu+v+1} \leq t \leq A_{\mu+v+1}), \end{aligned}$$

$$(12) \quad \begin{aligned} x_v^{(\mu)}(z, t) + x_v^{(\mu)}(2-z, t) &= 0 \quad (0 \leq z \leq 2; -A_{\mu+v} \leq t \leq A_{\mu+v}), \\ (\mu, v = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Conséquence. Si les $f_v(x)$ ($v = 0, 1, 2, \dots$) satisfont à (1), pour $v \rightarrow \infty$, $t = 0$, on a:

$$(13) \quad g_\mu(z) = f_\mu[g_{\mu+1}(2z)] \quad (0 \leq z \leq 0, \bar{1}; \mu = 0, 1, 2, \dots),$$

$$(14) \quad \bar{\xi}_\mu(z, 0) + \xi_\mu(2-z, 0) = 0 \quad (0 \leq z \leq 2; \mu = 0, 1, 2, \dots),$$

où on a mis $g_\mu(t)$ à la place de $\bar{\xi}_\mu(t, 0) + 0$ ou $\xi_\mu(t, 0) - 0$.

Démonstration. Soit $z \in I$ et soit $\{\varepsilon_i\}$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) la suite qui lui correspond. Considérons maintenant la suite $\{\bar{\varepsilon}_i\}$ définie par $\bar{\varepsilon}_i = \varepsilon_{i+1}$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) et déterminons le nombre $\bar{z}$ correspondant. Il est nécessaire de distinguer deux cas suivant que $z \leq 0, \bar{1}$ ou $z \geq 1, \bar{0}$.

Premier cas. $z \leq 0, \bar{1}$ et alors $d_0 = 0$, $\varepsilon_0 = 1$. De l'égalité $\bar{\varepsilon}_0 = \varepsilon_1$ on tire, d'après (4), $\bar{d}_0 = d_1$ et puis, tenant compte des égalités $\bar{\varepsilon}_i = \varepsilon_{i+1}$ ($i = 1, 2, \dots$), on conclut par la méthode de l'induction totale que

$\bar{d}_v = d_{v+1}$ ($v = 1, 2, \dots$), d'où il résulte $\bar{z} = 2z$ ($0 \leq z \leq 1$) de sorte que

$$\begin{aligned} x_{v+1}^{(\mu)}(z, t) &= \varepsilon_0 f_\mu \{ \varepsilon_1 f_{\mu+1} [\dots (\varepsilon_{v+1} f_{\mu+v+1}(t)) \dots] \} = \\ &= f_\mu \{ \varepsilon_0 f_{\mu+1} [\dots (\varepsilon_v f_{\mu+v+1}(t)) \dots] \} = f_\mu [x_v^{(\mu+1)}(2z, t)]. \end{aligned}$$

Deuxième cas. $z \geq 1$, $\bar{0}$ et alors $d_0 = 1$, $\varepsilon_0 = -1$. D'une manière analogue à celle employée dans le premier cas on obtient $\bar{d}_v = 1 - d_{v+1}$ ($v = 0, 1, 2, \dots$) d'où l'on tire facilement la relation $\bar{z} = 2(2 - z)$ de sorte que

$$\begin{aligned} x_{v+1}^{(\mu)}(z, t) &= \varepsilon_0 f_\mu \{ \varepsilon_1 f_{\mu+1} [\dots (\varepsilon_{v+1} f_{\mu+v+1}(t)) \dots] \} = \\ &= -f_\mu \{ \varepsilon_0 f_{\mu+1} [\dots (\varepsilon_v f_{\mu+v+1}(t)) \dots] \} = -f_\mu \{ x_v^{(\mu+1)}[2(2 - z), t] \} \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(11a) \quad \begin{aligned} x_{v+1}^{(\mu)}(z, t) &= -f_\mu \{ x_v^{(\mu+1)}[2(2 - z), t] \} \\ (1, \bar{0} \leq z \leq 2; -A_{\mu+v+1} \leq t \leq A_{\mu+v+1}). \end{aligned}$$

En mettant dans (11a) $\bar{z} = 2 - z$ et puis en y écrivant z au lieu de $\bar{z}$ et tenant compte de (11) on obtient justement (12), après qu'on ait remplacé v par $v - 1$.

La propriété F. du paragraphe 1. découle maintenant immédiatement de l'équation (13) et des propriétés des suites (2) démontrées dans f., g., h. et i. du paragraphe 1.

Maintenant nous pouvons énoncer la réciproque des résultats cités dans 1. laquelle est exprimée par le

Théorème I. Soit $g_\mu(z)$ ($\mu = 0, 1, 2, \dots; 0 \leq z \leq 2$) une suite de fonctions continues du côté gauche (droit), décroissantes telles que: 1° $0 < g_\mu(0) = \omega_\mu \leq +\infty$, $g_\mu(2) = -\omega_\mu$, les ω_μ étant des nombres donnés; 2° $[g_\mu(z) + g_\mu(2 - z)] \rightarrow 0$, $z \uparrow z_1$, $0 < z_1 \leq 2$; 3° $g_{\mu+1}(2z_1) = g_{\mu+1}(2z_2)$ entraîne $g_\mu(z_1) = g_\mu(z_2)$. Alors à chaque suite $\{g_\mu(z)\}$ correspond une suite unique des fonctions $f_\mu(x)$, dont chacune est définie sur l'ensemble E_μ des valeurs de $g_{\mu+1}$ correspondant à la même valeur de μ , et qui ont les propriétés (1) pour chaque $x \in E_\mu$, si bien que la fonction limite $\bar{\xi}_\mu(z, 0)$ [$\underline{\xi}_\mu(z, 0)$] de (2) est égale à $g_\mu(z)$. Sur $C(E_\mu) = (-\infty, +\infty) - E_\mu$, $f_\mu(x)$ peut être définie arbitrairement. Entre la suite des fonctions $f_\mu(x)$ ($x \in E_\mu$) satisfaisant aux conditions (1) et la suite des fonctions g_μ , égales à $\bar{\xi}_\mu$ (ou $\underline{\xi}_\mu$), il existe une correspondance biunivoque sauf peut-être sur un ensemble des valeurs de x de mesure nulle. Cette correspondance a son expression analytique dans le système d'équations fonctionnelles (13).

Démonstration. D'après un théorème dû à M. W. Sierpinski⁸⁾ on conclut qu'à chaque paire de fonctions $g_\mu(z)$, $g_{\mu+1}(z)$ qui

⁸⁾ W. Sierpinski, Sur les fonctions dépendantes, Fundamenta math., 28 (1937), Warszawa, p. 66—67.

remplissent 3° correspond une fonction unique $f_{\mu}(x)$ comme solution de l'équation fonctionnelle (13) définie pour $x \in E_{\mu}$ et laquelle peut être définie arbitrairement sur l'ensemble $C(E_{\mu})$. L'existence de $f_{\mu}(x)$ démontrée, ses propriétés (1) découlent immédiatement de l'équation (13) et des hypothèses faites sur les fonctions $g_{\mu}(z)$ et $g_{\mu+1}(z)$. Les nombres $\omega_{\mu+1}$ jouent le rôle des nombres A_v ($v = 0, 1, 2, \dots$) de sorte qu'on peut écrire $A_v = \omega_{v+1}$ avec $f_v(A_v) = A_{v-1}$ ($v = 1, 2, \dots$). La fonction $f_{\mu}(x)$ ainsi obtenue est continue à droite ou à gauche suivant que $g_{\mu}(z)$, correspondant à la même valeur de l'indice μ , est continue à gauche ou à droite.

Supposons maintenant l'existence simultanée de deux paires différentes des fonctions $g_{\mu}^{(i)}(z)$ et $g_{\mu+1}^{(i)}(z)$ ($i = 1, 2$) qui, par l'équation (13) définissent une même fonction $f_{\mu}(x)$. Pour fixer les idées nous supposons que les $g_{\mu}^{(i)}(z)$ ($\mu = 0, 1, 2, \dots; i = 1, 2$) soient continues à gauche. D'après 1° on a $g_{\mu+1}^{(1)}(2) = g_{\mu+1}^{(2)}(2)$. De (13) on tire $g_{\mu}^{(1)}(1) = g_{\mu}^{(2)}(1)$, puis, d'après 2°, on a $g_{\mu}^{(1)}(1+0) = g_{\mu}^{(2)}(1+0)$ et en général on a les égalités

$$(15) \quad g_{\mu}^{(1)}\left(\frac{v}{2^n} \pm 0\right) = g_{\mu}^{(2)}\left(\frac{v}{2^n} \pm 0\right) \quad (v = 0, 1, \dots, 2^{n+1}; n, \mu = 0, 1, 2, \dots).$$

Comme elles sont vraies pour $n=0$, il suffit de démontrer qu'elles le seront aussi pour $n+1$ si elles sont vraies pour n . En effet, de l'égalité

$$g_{\mu+1}^{(1)}\left(\frac{v}{2^n}\right) = g_{\mu+1}^{(2)}\left(\frac{v}{2^n}\right) \quad (v = 0, 1, 2, \dots, 2^{n+1})$$

et de (13) on tire d'abord

$$g_{\mu}^{(1)}\left(\frac{v}{2^{n+1}}\right) = g_{\mu}^{(2)}\left(\frac{v}{2^{n+1}}\right) \quad (v = 0, 1, \dots, 2^{n+1}),$$

d'où il résulte, d'après 2°,

$$g_{\mu}^{(1)}\left(2 - \frac{v}{2^{n+1}} + 0\right) = g_{\mu}^{(2)}\left(2 - \frac{v}{2^{n+1}} + 0\right)$$

ce qui, en écrivant v à la place de $2^{n+2} - v$, peut être écrit plus brièvement

$$g_{\mu}^{(1)}\left(\frac{v}{2^{n+1}} + 0\right) = g_{\mu}^{(2)}\left(\frac{v}{2^{n+1}} + 0\right) \quad (v = 2^{n+1}, 2^{n+1} + 1, \dots, 2^{n+2}).$$

D'autre part, en partant de l'égalité $g_{\mu+1}^{(1)}\left(\frac{v}{2^n} + 0\right) = g_{\mu+1}^{(2)}\left(\frac{v}{2^n} + 0\right)$ ($v = 0, 1, \dots, 2^{n+1}$), d'après (13), on tire d'abord

$$g_{\mu}^{(1)}\left(\frac{v}{2^{n+1}} + 0\right) = g_{\mu}^{(2)}\left(\frac{v}{2^{n+1}} + 0\right) \quad (v = 0, 1, \dots, 2^{n+1})$$

ce qui donne, d'après 2°, $g_{\mu}^{(1)}\left(2 - \frac{v}{2^{n+1}}\right) = g_{\mu}^{(2)}\left(2 - \frac{v}{2^{n+1}}\right)$ ou plus brièvement

$$g_{\mu}^{(1)}\left(\frac{v}{2^{n+1}}\right) = g_{\mu}^{(2)}\left(\frac{v}{2^{n+1}}\right) \quad (v = 2^{n+1}, 2^{n+1} + 1, \dots, 2^{n+2})$$

en mettant v à la place de $2^{n+2} - v$. Ainsi (15) est démontré. La démonstration est tout à fait analogue si l'on suppose $g_{\mu}^{(i)}(z)$ continues à droite.

Les égalités (15) démontrées, tenant compte de la continuité à gauche (droite) des $g_{\mu}^{(i)}(z)$ ($i=1, 2$), on conclut immédiatement que l'équation $g_{\mu}^{(1)}(z) = g_{\mu}^{(2)}(z)$ doit être vérifiée pour tout $z \in I$ ($\mu=0, 1, 2, \dots$).

Ainsi le théorème I. est démontré, parce que: 1° les fonctions limites $\bar{\xi}_{\mu}(z)$ [$\xi_{\mu}(z)$] satisfont aux équations (13) et 2° les fonctions $f_{\mu}(x)$ ($x \in E_{\mu}$) définies par les fonctions $g_{\mu}(z)$, étant continues à gauche (droite), sont égales aux fonctions $f_{\mu}(x)$ définies par (1) sur l'ensemble E_{μ} sauf peut-être sur l'ensemble de leurs points de discontinuité.

3. Soit $g_{\mu}(z)$ ($\mu=0, 1, 2, \dots; 0 \leq z \leq 2$) une suite de fonction satisfaisant aux conditions: 1° $-A_{\mu-1} \leq g_{\mu}(z) \leq +A_{\mu-1}$; 2° $g_{\mu}(z) + g_{\mu}(2-z) = 0$; 3° $g_{\mu+1}(2z_1) = g_{\mu+1}(2z_2)$ entraîne $g_{\mu}(z_1) = g_{\mu}(z_2)$ ($0 \leq z_1 \leq z_2 \leq 2$); 4° E est l'intersection des ensembles E_{μ} .

Théorème II. Pour que $x_n^{(0)}(z, t)$ ($n=0, 1, 2, \dots; t \in E$) soit convergente pour une valeur de $z \in I$, il faut et il suffit que, pour cette valeur, $g_0(u_n)$ {où u_n désigne une solution quelconque en u de l'équation $g_{n+1}[F_n(u)] = t$ } tende pour chaque u_n vers une même limite $\xi_0(z)$ pour $n \rightarrow \infty$, $\{f_n(x)\}$ étant la suite des fonctions définies par (13) pour toute valeur de $x \in E_n$ et alors $x_n^{(0)}(z, t) \rightarrow \xi_0(z)$ ($n \rightarrow \infty, t \in E$).

Démonstration. D'après l'hypothèse 2°, au moyen des équations (13), en partant de l'équation $g_0(z) = f_0[g_1(2z)]$ ($0 \leq z \leq 0, \bar{1}$) on obtient l'équation

$$(16) \quad x_n^{(0)}\{z, g_{n+1}[F_n(z)]\} = g_0(z) \quad (n=0, 1, 2, \dots; 0 \leq z \leq 2)$$

où

$$F_n(u) = 2^{\mu+1} \{2 - 2^{\lambda_n - \lambda_{n-1}} [2 - \dots - 2^{\lambda_1 - \lambda_0} (2 - 2^{\lambda_0} u) \dots]\} \\ [2^{-n}(\nu-1) \leq u \leq 2^{-n\nu}]^9 \quad 0 \leq F_n(u) \leq 2$$

et où on a posé

- $z = d_0, d_1 d_2 \dots \{2 d_i = 1 + (-1)^k, \lambda_k \leq i < \lambda_{k+1}, k=0, 1, 2, \dots, \lambda_0 \geq 0$ avec $d_i = 0$ ($i=0, 1, \dots, \lambda_0-1$) pour $\lambda_0 > 0$;
- ν est l'entier défini pour chaque n par $2^{-n}(\nu-1) \leq z < 2^{-n\nu}$;
- $\lambda_{k_n} = \text{Max } \lambda_k (\lambda_k \leq n)$;
- $n = \lambda_{k_n} + \mu$ ($\mu=0, 1, \dots, \lambda_{k_n+1} - \lambda_{k_n} - 1$).

Mais tous les nombres de l'intervalle fermé $\langle 2^{-n}(\nu-1), 2^{-n\nu} \rangle$ ont les mêmes chiffres d_i ($i=0, 1, \dots, n$) égaux à ceux du nombre z . Par conséquent, en désignant par u un nombre quelconque de cet intervalle, l'équation (16) peut être écrite sous la forme

$$(17) \quad x_n^{(0)}\{z, g_{n+1}[F_n(u)]\} = g_0(u).$$

⁹⁾ $2^{-n}(\nu-1)$ et $2^{-n\nu}$ dans le système binaire doivent être représentés l'un par la forme de période 0 et l'autre par la forme de période 1.

Si u croît d'une manière continue de $2^{-n}(\nu-1)$ à $2^{-n}\nu$, $F_n(u)^{10)}$ varie aussi d'une manière continue en prenant toutes les valeurs de l'intervalle fermé $\langle 0, 2 \rangle$, de sorte que $g_{n+1}[F_n(u)]$ parcourt toutes les valeurs de l'ensemble E_n . D'après la définition de ν , la suite $\{2^{-n}(\nu-1)\}$ ($n=0, 1, 2, \dots$) est monotone croissante et la suite $\{2^{-n}\nu\}$ ($n=0, 1, 2, \dots$) est monotone décroissante et toutes les deux convergent vers la limite commune z . Soit maintenant t un nombre déterminé ($t \in E$). Alors toute solution u_n de l'équation $g_{n+1}[F_n(u)] = t$ est située dans l'intervalle fermé $\langle 2^{-n}(\nu-1), 2^{-n}\nu \rangle$, de manière que $u_n \rightarrow z$ pour $n \rightarrow \infty$. La démonstration du théorème découle du fait que (17), dans ce cas, prend la forme $x_n^{(0)}(z, t) = g_0(u_n)$.

L'importance du théorème II. consiste en ce qu'elle prouve l'existence d'autres suites $f_\nu(x)$ ($\nu = 0, 1, 2, \dots$) de fonctions plus générales outre celle considérée dans I et II pour lesquelles les suites $\{x_n^{(\mu)}(z, t)\}$ sont convergentes sous les conditions exprimées dans le théorème II.

4. Supposons que:

- (18) 1° $f_\nu(x)$ satisfassent à (1);
2° $\omega < \omega_\nu$ ou $\omega = \omega_\nu = f_\nu(\omega_\nu)$ avec $\omega = \text{borné}$ ω_ν ($\nu = 0, 1, 2, \dots$).

Sous ces hypothèses on peut énoncer le

Théorème III Les points d'accumulation de la suite $\{x_n^{(0)}(z, t)\}$ ($\nu = 0, 1, 2, \dots$; $0 \leq z \leq 2$; $-\omega \leq t \leq +\omega$) se trouvent sur le segment $L = \langle \xi_0(z, 0), \bar{\xi}_0(z, 0) \rangle$. Suivant la valeur de z et de t , tous les termes de cette suite pour $\nu > N(z, t)$ se trouvent: 1° ou bien d'un même côté de $\xi_0(z, 0)$ ou de $\bar{\xi}_0(z, 0)^{11)}$; 2° ou bien sur le segment L ; 3° ou bien au dehors de l'intervalle L ; 4° ou sur un segment $L' \supset L$.

Pour le démontrer il est nécessaire de démontrer d'abord le

Théorème auxiliaire 1. Pour chaque valeur de μ, z, t $\mu = 0, 1, 2, \dots$; $0 \leq z \leq 2$; $-\omega \leq t \leq \omega$) on peut toujours trouver un nombre ζ_μ défini par

$$(19) \quad \zeta_\mu = \zeta_{\mu-1} + 2^{-\mu} \{1 - (-1)^{d_{\mu-1}}(1 - \bar{z})\} \quad (\mu = 1, 2, \dots; \zeta_{\mu-1} = \sum_{\nu=0}^{\mu-1} \frac{d_\nu}{2^\nu})$$

tel que

$$(20) \quad \xi_0(\zeta_\mu, 0) \leq x_{\mu-1}^{(0)}(z, t) \leq \bar{\xi}_0(\zeta_\mu, 0)$$

$\bar{z}$ étant défini par

$$(21) \quad \xi_\mu(\bar{z}, 0) \leq t \leq \bar{\xi}_\mu(\bar{z}, 0).$$

Démonstration du théorème auxiliaire. Soit d'abord $\omega < \omega_\nu$. Il est évident que pour chaque valeur de t telle que $-\omega \leq t \leq +\omega$ et pour chaque valeur de $\mu \geq 0$ on peut toujours trouver un nombre

¹⁰⁾ $F_n(u)$ ($0 \leq u \leq 2$) est une fonction périodique linéaire de période 2^{-n} .

¹¹⁾ $\xi_0(z, 0)$ respectivement $\bar{\xi}_0(z, 0)$ inclus.

$\bar{z} = \bar{d}_0, \bar{d}_1 \bar{d}_2 \dots$ satisfaisant à (21). Désignons par $\{\varepsilon_i\}$, $\{\bar{\varepsilon}_i\}$ et $\{\varepsilon'_i\}$ les suites (3) correspondant respectivement aux nombres

$$z = d_0, d_1 d_2 \dots, \bar{z} \text{ et } \zeta_\mu = d'_0, d'_1 d'_2 \dots$$

On tire de (19)

$$(19a) \quad d'_v = d_v \quad (v=0, 1, \dots, \mu-1), \quad d'_{\mu+i} = [1 - (-1)^{d_{\mu-1}}(1 - 2\bar{d}_i)] \cdot 2^{-1} \quad (i=0, 1, 2, \dots)$$

et puis, d'après (3), $\varepsilon'_v = \varepsilon_v$ ($v=0, 1, \dots, \mu-1$), $\varepsilon'_{\mu+i} = \bar{\varepsilon}_i$ ($i=0, 1, 2, \dots$). Si on remplace t par $x_i^{(\mu)}(\bar{z}, 0)$ dans $x_{\mu-1}^{(0)}(z, t)$ ($\mu=1, 2, \dots$), on obtient la suite

$$(22) \quad x_{\mu-1}^{(0)}(z, x_i^{(\mu)}(\bar{z}, 0)) = x_{\mu+i}^{(0)}(\zeta_\mu, 0) \quad (i=0, 1, 2, \dots).$$

On voit immédiatement, d'après (19), que les ζ_μ ($\mu=1, 2, \dots$) représentent les valeurs approchées de z .

Tenant compte que $x_{\mu-1}^{(0)}(z, t)$ est monotone, on tire de (22), d'après (21), pour $i \rightarrow \infty$, immédiatement (20) en supposant $\bar{z} \neq p/2^q$. Mais (20) est vrai pour $\bar{z} = p/2^q$ aussi. En effet, dans ce cas on a $\bar{z}'' = \bar{d}_0, \bar{d}_1 \dots \bar{d}_{q-1} 0\bar{1}$, $\bar{z}' = \bar{d}_0, \bar{d}_1 \dots \bar{d}_{q-1} 1\bar{0}$ et $\xi_\mu(\bar{z}, 0) = \xi_\mu(\bar{z}', 0) \leq t \leq \xi_\mu(\bar{z}, 0) = \xi_\mu(\bar{z}'', 0)$. ζ_μ ayant, d'après (19), la même forme on a

$$\zeta''_\mu = z_{\mu-1} + 2^{-\mu} \bar{z}'', \quad \zeta'_\mu = z_{\mu-1} + 2^{-\mu} \bar{z}' \quad \text{pour } d_{\mu-1} = 0 \text{ respectivement}$$

$$\zeta''_\mu = z_{\mu-1} + 2^{-\mu} (2 - \bar{z}''), \quad \zeta'_\mu = z_{\mu-1} + 2^{-\mu} (2 - \bar{z}') \quad \text{pour } d_{\mu-1} = 1.$$

Alors pour $d_{\mu-1} = 0$ on a

$$\xi_0(\zeta_\mu, 0) = \xi_0(\zeta'_\mu, 0) = x_{\mu-1}^{(0)}[z, \xi_\mu(\bar{z}', 0) - 0] \leq x_{\mu-1}^{(0)}[z, \xi_\mu(\bar{z}, 0)] \leq x_{\mu-1}^{(0)}(z, t) \leq x_{\mu-1}^{(0)}[z, \xi_\mu(\bar{z}, 0)] \leq x_{\mu-1}^{(0)}[z, \xi_\mu(\bar{z}'', 0) + 0] = \xi_0(\zeta''_\mu, 0) = \xi_0(\zeta_\mu, 0).$$

Pour $d_{\mu-1} = 1$ on obtient un résultat analogue. Ainsi le théorème est démontré pour $\omega < \omega_v$ ($v=0, 1, 2, \dots$). Supposons maintenant $\omega = \omega_v = f_v(\omega_v)$. Dans ce cas les inégalités (20) sont vérifiées pour $|t| < \omega$. Il reste à prouver qu'elles sont vérifiées pour $|t| = \omega$.

Soit, d'abord, $t = \omega$. Dans ce cas $\bar{z} = 0$ et, d'après (19),

$$\zeta_\mu = d_0, d_1 \dots d_{\mu-2} 0\bar{0} \quad \text{pour } d_{\mu-1} = 0 \text{ respectivement}$$

$$\zeta_\mu = d_0, d_1 \dots d_{\mu-2} 1\bar{1} \quad \text{pour } d_{\mu-1} = 1.$$

Considérons d'abord le cas $d_{\mu-1} = 0$. Alors il existe ou il n'existe pas un nombre τ ($2 \leq \tau \leq \mu$) tel que $d_{\mu-\tau} = 1, d_i = 0$ ($\mu - \tau + 1 \leq i \leq \mu - 1$). Supposons que τ existe. Alors

$$\zeta'_\mu = d_0, d_1 \dots d_{\mu-\tau-1} 1\bar{0}; \quad \zeta''_\mu = d_0, d_1 \dots d_{\mu-\tau-1} 0\bar{1}$$

et d'après (9)

$$\xi_0(\zeta'_\mu, 0) = \varepsilon_0 f_0 \{ \dots [\varepsilon_{\mu-\tau-1} f_{\mu-\tau-1} (-\varepsilon_{\mu-\tau} [f_{\mu-\tau}(-\omega) + 0]) \dots],$$

$$\xi_0(\zeta''_\mu, 0) = \varepsilon_0 f_0 \{ \dots [\varepsilon_{\mu-\tau-1} f_{\mu-\tau-1} (\varepsilon_{\mu-\tau} [f_{\mu-\tau}(-\omega) + 0]) \dots],$$

$$\varepsilon_0 \dots \varepsilon_{\mu-\tau} = +1.$$

Si $\varepsilon_{\mu-\tau} = +1$, alors

$$\begin{aligned}\xi_0(\zeta'_\mu, 0) &\leq x_{\mu-\tau-1}^{(0)}[-f_{\mu-\tau}(-\omega)] = x_{\mu-1}^{(0)}(z, \omega) = x_{\mu-1}^{(0)}(z, t), \\ \xi_0(\zeta''_\mu, 0) &\geq x_{\mu-\tau-1}^{(0)}[f_{\mu-\tau}(-\omega)] \geq x_{\mu-\tau-1}^{(0)}[-f_{\mu-\tau}(-\omega)] = x_{\mu-1}^{(0)}(z, t),\end{aligned}$$

d'où on tire (20) pour $t = \omega$.

D'une manière analogue on vérifie (20) pour $t = \omega$ si $\varepsilon_{\mu-\tau} = -1$.

Supposons maintenant que τ n'existe pas. Alors $d_i = 0$, $i = 0, 1, \dots, \mu-1$. Par conséquent

$$\begin{aligned}x_{\mu-1}^{(0)}(z, t) &= x_{\mu-1}^{(0)}(z, \omega) = f_0\{f_1[\dots(f_{\mu-1}(\omega))\dots]\} = \omega = \\ &= \xi_0(0, 0) = \xi_0(\zeta_\mu, 0).\end{aligned}$$

Ainsi (20) est encore vérifié.

Pour $d_{\mu-1} = 1$ on arrive au même résultat en raisonnant d'une manière analogue.

De la même manière on prouve que (20) est vérifié aussi dans le cas où $t = -\omega$.

Ainsi le théorème auxiliaire est entièrement démontré.

Démonstration du théorème III. Pour démontrer ce théorème il reste seulement à étudier le signe de la différence $\Delta_n = \zeta_n - z$. A partir d'une valeur $N(z, t)$ de n les seuls cas possibles sont les suivants: $\Delta_n < 0$, $\Delta_n > 0$, $\Delta_n = 0$, $\Delta_n \leq 0$, $\Delta_n \geq 0$, $\Delta_n \leq 0$, $\Delta_n \geq 0$ chacun des signes " $<$ ", " $>$ ", " $=$ " se présentant pour une infinité de valeurs de n . En effet, chacun de ces cas peut se présenter, comme le prouve le cas où $f_\nu(x) = f(x)$ que nous allons étudier ci-après. La démonstration du théorème découle maintenant du fait que $\zeta_n \rightarrow z$ ($n \rightarrow \infty$) en s'appuyant sur la propriété D. du paragraphe 1.

Soit $f(x)$ une fonction définie sur le segment $-a \leq x \leq +a$ ($a > 0$) satisfaisant aux conditions suivantes:

$$(23) \quad \begin{cases} f(x_1) \leq f(x_2) \quad (x_1 < x_2), \quad f(-a) \geq 0, \quad f(x) \geq x \quad (0 < x < a), \\ f(a) = a, \quad f(\omega) = \omega \quad (0 < \omega \leq a), \end{cases}$$

ω étant le plus petit nombre de cette propriété.

Considérons la suite $x_n(z, t) = \varepsilon_0 f\{\dots[\varepsilon_n f(t)]\dots\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$; $0 \leq z \leq 2$; $-a \leq t \leq +a$), z et t étant deux nombres déterminés. Sous ces conditions on a le

Théorème IV. Si l'on introduit les notations S et $C(S)$ pour l'intervalle $-\omega \leq t < \xi(1, 0)$ et pour son complément par rapport au segment $\langle -a, +a \rangle$, on a:

1. $\lim x_n(z, t) = \xi(z, 0)$, $\overline{\lim} x_n(z, t) = \bar{\xi}(z, 0)$ [$t \in C(S)$] sauf dans le cas où on a simultanément $\omega \leq t \leq a$, $z = p/2^q$ et alors ces valeurs limites se trouvent sur le segment $\langle \xi(z, 0), \bar{\xi}(z, 0) \rangle$.

2. Pour $t \in S$ tous les cas mentionnés dans le théorème III. se présentent effectivement.

Avant de démontrer ce théorème nous allons procéder à la détermination du signe de $\Delta_\mu = \zeta_\mu - z$.

Soit $|t| \leq \omega$. Il est évident que dans ce cas le théorème auxiliaire 1. est applicable avec le nombre $\bar{z}$, défini par (21) et dépendant seulement de t . Pour déterminer le signe de Δ_μ il est nécessaire de s'appuyer sur les faits suivants.

A. Pour qu'on ait $\zeta_\mu = z$ pour une valeur donnée de μ , il faut et il suffit que :

$$1 - 2 d_{\mu+v} = (-1)^{d_{\mu-1}} (1 - 2 \bar{d}_v)$$

($\mu = 0, 1, 2, \dots$ pour $z \neq p/2^q$ et $\mu - 1 \geq q$ pour $z = p/2^q$; $v = 0, 1, 2, \dots$).

La démonstration résulte immédiatement de la deuxième égalité (19 a) en y mettant $d'_{\mu+t} = d_{\mu+t}$.

B'. Pour que l'équation $\zeta_\mu = z \neq p/2^q$, z et $\bar{z}$ étant donnés, soit remplie pour une infinité de valeurs de μ , il faut et il suffit que pour $k > 0$ les nombres z et $\bar{z}$ soient rationnels et de l'une des formes suivantes :

$$\begin{aligned} 1^0 \quad & z = d_0, d_1 \dots d_{\mu-1} \overline{d_\mu d_{\mu+1} \dots d_{\mu+(k-1)}} \\ & \bar{z} = \overline{d_\mu, d_{\mu+1} \dots d_{\mu+(k-1)}} \quad \text{avec } d_{\mu-1} = d_{\mu+(k-1)} = 0; \\ 2^0 \quad & z = d_0, d_1 \dots d_{\mu-1} \overline{d_\mu d_{\mu+1} \dots d_{\mu+(k-1)}} \\ & 2 - \bar{z} = \overline{d_\mu, d_{\mu+1} \dots d_{\mu+(k-1)}} \quad \text{avec } d_{\mu-1} = d_{\mu+(k-1)} = 1; \\ 3^0 \quad & z = d_0, d_1 \dots d_{\mu-1} \overline{d_\mu \dots d_{\mu+(k-1)} (1 - d_\mu) \dots (1 - d_{\mu+(k-1)})} \\ & \bar{z} = \overline{d_\mu, \dots d_{\mu+(k-1)} (1 - d_\mu) \dots (1 - d_{\mu+(k-1)})} \\ & \text{avec } d_{\mu-1} = 0, d_{\mu+(k-1)} = 1; \\ 4^0 \quad & z = d_0, d_1 \dots d_{\mu-1} \overline{d_\mu \dots d_{\mu+(k-1)} (1 - d_\mu) \dots (1 - d_{\mu+(k-1)})} \\ & 2 - \bar{z} = \overline{d_\mu, \dots d_{\mu+(k-1)} (1 - d_\mu) \dots (1 - d_{\mu+(k-1)})} \\ & \text{avec } d_{\mu-1} = 1, d_{\mu+(k-1)} = 0 \end{aligned}$$

le trait au-dessus des chiffres indiquant que ces chiffres forment la période des nombres périodiques z et $\bar{z}$.

B''. Pour qu'on ait $\zeta_\mu = z = p/2^q$ pour une infinité de valeurs de μ , il faut et il suffit qu'on ait simultanément $\bar{z} = 0$, $\mu - 1 > q$.

Si z et $\bar{z}$ satisfont à ces conditions, on a en effet $\zeta_{\mu+mk} = z$ [$m = 0, 1, 2, \dots$; $k > 0$ étant le nombre des chiffres dans la période (les cas 1⁰, 2⁰ et B'') ou dans la demipériode (les cas 3⁰ et 4⁰), μ étant le plus petit n pour lequel $\zeta_n = z$].

La démonstration étant la même dans tous les cas, nous allons la donner seulement pour le cas 4°.

Soit $z \neq p/2^q$, $d_{\mu-1} = 1$, $d_{\mu+k-1} = 0$. Indiquons par μ et $\mu+k$ deux premiers indices pour lesquels on a $\zeta_\mu = \zeta_{\mu+k} = z$. Les conditions nécessaires et suffisantes sont, d'après A.,

$$\begin{aligned} \bar{d}_v + d_{\mu+v} &= 1, \quad \bar{d}_v = d_{\mu+v+k} \quad (v=0, 1, 2, \dots) \\ \text{ou} \quad \bar{d}_v &= d_{\mu+v+k}, \quad d_{\mu+v} + d_{\mu+v+k} = 1 \quad (v=0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

qui sont équivalentes à 4°.

Conséquence. Si z est irrationnel, il ne peut exister plus d'une valeur de n pour laquelle $\zeta_n = z$.

C. Supposons que $\bar{z}$ satisfait aux inégalités $0 \leq \bar{z} < 1$. Alors on a :

1° Si $z \neq p/2^q$, chacune des inégalités $\zeta_\mu < z$, $\zeta_\mu > z$ se présente pour une infinité de valeurs de μ .

En effet, les chiffres de z sont groupés en une infinité de groupes composés seulement des 0 ou des 1 qui se succèdent alternativement. Pour chaque μ qui représente l'indice du premier chiffre d'un groupe des unités on a $z > \zeta_\mu$, parce que, d'après A., le chiffre $d_{\mu-1} = 0$ dans le nombre z est suivi d'une unité, lorsque dans le nombre ζ_μ il est suivi de 0. Au contraire, pour chaque μ qui représente l'indice du premier chiffre d'un groupe des zéros, on a $z < \zeta_\mu$ parce que $d_{\mu-1} = 1$ dans z est suivi par 0 et dans ζ_μ par 1.

2° Pour $z = p/2^q$ il faut distinguer deux cas.

Si $z = z'' = d_0, d_1 \dots d_{q-1} 0\bar{1}$, on a $\zeta_\mu \leq z'' \quad (\mu - 1 \geq q)$.

Si $z = z' = d_0, d_1 \dots d_{q-1} 1\bar{0}$, on a $\zeta_\mu \geq z' \quad (\mu - 1 \geq q)$.

Dans les deux cas l'égalité se présente seulement pour $\bar{z} = 0$, $\mu - 1 > q$.

Nous allons démontrer seulement le premier cas, la démonstration du second cas étant presque la même. Soit $\mu - 1 > q$. Alors le chiffre $d_{\mu-1} = 1$ dans z'' est suivi par les unités lorsque dans ζ_μ il est suivi par les groupes composés d'unités et de zéros qui se succèdent alternativement, le premier groupe étant composé d'unités de sorte qu'on a $\zeta_\mu \leq z''$, l'égalité se présentant seulement pour $\bar{z} = 0$. On a aussi $\zeta_{q+1} < z''$, parce que $d_q = 0$ dans z est suivi par les unités et dans ζ_{q+1} par les zéros.

D. Si $\bar{z} = 1$, chacune des inégalités $\zeta_\mu < z$, $\zeta_\mu > z$ se présente une infinité de fois, lorsque $\zeta_\mu = z$ se présente seulement pour $\mu - 1 = q - 1$, $z = p/2^q$.

En effet, si $z \neq p/2^q$, on a $\zeta_\mu < z$ pour $d_{\mu-1} = 0$, $d_\mu = 1$ et $\zeta_\mu > z$ pour $d_{\mu-1} = 1$, $d_\mu = 0$, l'égalité $\zeta_\mu = z$ ne pouvant jamais se présenter, parce que dans ce cas on aurait $z = p/2^q$.

Si $z = p/2^q$, alors

pour $z = z'' = d_0, d_1 \dots d_{q-1} 0\bar{1}$ on a $\zeta_\mu < z, \mu - 1 \geq q$;

pour $z = z' = d_0, d_1 \dots d_{q-1} 1\bar{0}$ on a $\zeta_\mu > z, \mu - 1 \geq q$.

L'égalité $\zeta_\mu = z$ se présente seulement pour $\mu - 1 = q - 1$.

E. Pour $1 < \bar{z} \leq 2$ tous les cas possibles peuvent se présenter ce qu'on prouve par les exemples suivants:

a) z irrationnel

Ex. 1. $z = 1,0110111011110\dots, \bar{z} = 1,01010\dots,$
 $\zeta_\mu < z$ ($\mu = 1, 2, \dots$).

Ex. 2. $z = 0,1001000100001\dots, \bar{z} = 1,01010\dots,$
 $\zeta_\mu > z$ ($\mu = 1, 2, \dots$).

Ex. 3. $z = 1,0101001010100010101000010101\dots,$
 $\bar{z} = 1,011011101111011111\dots,$
 $\zeta_{\mu+1} < z$ pour chaque μ qui représente l'indice du premier chiffre de chaque groupe 10101, autrement $\zeta_\mu > z$.

b) z rationnel $\neq p/2^q$

Ex. 4. $z = 1,00\overline{1101}; \bar{z} = 1,101\overline{1101}; \zeta_\mu < z.$

Ex. 5. $z = 1,11\overline{0010}; \bar{z} = 1,1\overline{101}; \zeta_\mu > z.$

Ex. 6. $z = 1,0\overline{1001}; \bar{z} = 1,0\overline{01};$
 $\zeta_{6+4k} < z, \zeta_{7+4k} > z, \zeta_{8+4k} > z, \zeta_{9+4k} < z,$
 $(k=0, 1, 2, \dots).$

Ex. 7. $z = 1,000\overline{111}; \bar{z} = 1,0\overline{00};$
 $\zeta_{3+4k} = z$ ($k=0, 1, 2, \dots$), $\zeta_\mu < z$ ($\mu \neq 3+4k$).

Ex. 8. $z = 1,00000\overline{1}; \bar{z} = 1,0\overline{00};$
 $\zeta_{6+4k} = z, \zeta_\mu > z$ ($\mu \neq 6+4k, \mu > 2$).

Ex. 9. $z = 0,010111100\overline{0}; \bar{z} = 1,001011\overline{10};$
 $\zeta_{7+4k} = z, \zeta_{i+8k} < z$ ($i=4, 5, 10$),
 $\zeta_{i+8k} > z$ ($i=6, 8, 9$).

Ex. 10. $z = 1,011\overline{10}; \bar{z} = 1,0; \zeta_\mu = z.$

c) $z = p/2^q$

Ex. 11. $z = z'' = 1,11010\overline{1}; \zeta_\mu < z''$ ($\mu - 1 > q$).

$z = z' = 1,11011\overline{0}; \zeta_\mu > z'$ ($\mu - 1 > q$).

Démonstration du théorème IV. Nous allons considérer d'abord le cas où $|t| \leq \omega$. La démonstration même doit être effectuée tenant

compte de (20), puis de la propriété D. du paragraphe 1. et enfin de l'analyse du signe de Δ_n que nous venons d'achever. Nous allons brièvement exposer les conclusions qu'on peut tirer de cette analyse.

a. $t \in S$, c'est-à-dire $1 < \bar{z} \leq 2$.

Pour z irrationnel on a :

1° $\zeta_n < z$ ($n > N$) et alors $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(z, t) = \bar{\xi}(z, 0)$ (ex. 1.) ou

2° $\zeta_n > z$ ($n > N$) et alors $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(z, t) = \underline{\xi}(z, 0)$ (ex. 2.) ou

3° $\zeta_{n_1} < z$, $\zeta_{n_2} > z$ ($n_1, n_2 > N$) (chacune des relations se présente effectivement une infinité de fois, l'égalité $\zeta_n = z$ ($n > N$) étant exclue) et alors

$\lim x_n(z, t) = \underline{\xi}(z, 0)$, $\overline{\lim} x_n(z, t) = \bar{\xi}(z, 0)$ ($n \rightarrow \infty$) (ex. 3.).

Pour une valeur de $n \leq N$ tout au plus, d'après la conséquence du B. du paragraphe 4., on peut avoir $\underline{\xi}(z, 0) \leq x_n(z, t) \leq \bar{\xi}(z, 0)$.

Pour z rationnel $\neq p/2^q$ on a :

les trois cas cités ci-dessus (ex. 4., 5. et 6.);

4° $\underline{\xi}(z, 0) \leq \lim x_n(z, t) \leq \overline{\lim} x_n(z, t) = \bar{\xi}(z, 0)$, l'inégalité $x_n(z, t) \geq \bar{\xi}(z, 0)$ se présentant pour une infinité de valeurs de n (ex. 7.);

5° $\underline{\xi}(z, 0) = \lim x_n(z, t) \leq \overline{\lim} x_n(z, t) \leq \bar{\xi}(z, 0)$, $x_n(z, t) \leq \underline{\xi}(z, 0)$ pour une infinité de valeurs de n (ex. 8.);

6° $\underline{\xi}(z, 0) = \lim x_n(z, t)$, $\bar{\xi}(z, 0) = \overline{\lim} x_n(z, t)$. Chacune des relations $x_n(z, t) \geq \bar{\xi}(z, 0)$, $x_n(z, t) \leq \underline{\xi}(z, 0)$ est vérifiée pour une infinité de valeurs de n (ex. 9.).

Dans 4°, 5°, 6° les inégalités $\underline{\xi}(z, 0) \leq x_n(z, t) \leq \bar{\xi}(z, 0)$ sont vérifiées pour une infinité de valeurs de n .

7° $\underline{\xi}(z, 0) \leq x_n(z, t) \leq \bar{\xi}(z, 0)$ ($n > N$) (ex. 10.).

Pour $z = p/2^q$ on a (ex. 11.) $z' < \zeta'_n$, $z'' > \zeta''_n$ ($n-1 > q$), ζ'_n et ζ''_n indiquant les nombres ζ_n qui sont obtenus en partant de l'hypothèse $z = z'$ respectivement $z = z''$. On en tire, d'après (20), $x_n(z'', t) \geq \underline{\xi}(z'', 0)$ ($n-1 > q$) ou $x_n(z', t) \leq \bar{\xi}(z', 0)$ d'où $\lim x_n(z'', t) = \underline{\xi}(z'', 0)$ respectivement $\lim x_n(z', t) = \bar{\xi}(z', 0)$. En considérant les suites $x_n(z'', t)$ et $x_n(z', t)$ comme deux suites partielles d'une même suite unique qui consiste en termes de ces deux suites, le résultat obtenu peut être écrit de la manière suivante

$\overline{\lim} x_n(z, t) = \bar{\xi}(z, 0)$, $\lim x_n(z, t) = \underline{\xi}(z, 0)$.

Ainsi la deuxième partie du théorème IV est démontrée.

b. $\underline{\xi}(1; 0) \leq t \leq \bar{\xi}(1; 0)$, c'est-à-dire $\bar{z} = 1$. D'après D. on a toujours $\lim x_n(z, t) = \underline{\xi}(z, 0)$, $\overline{\lim} x_n(z, t) = \bar{\xi}(z, 0)$,

c. $\bar{\xi}(1; 0) < t \leq \omega = \xi(0, 0)$.

Pour z irrationnel on a $\lim x_n(z, t) = \underline{\xi}(z, 0)$, $\overline{\lim} x_n(z, t) = \bar{\xi}(z, 0)$, un seul terme peut se trouver entre $\underline{\xi}(z, 0)$ et $\bar{\xi}(z, 0)$. Pour z rationnel $\neq p/2^q$, les valeurs limites restent les mêmes, une infinité de termes peuvent se trouver entre $\underline{\xi}(z, 0)$ et $\bar{\xi}(z, 0)$. Si $z = p/2^q$, $\bar{z} \neq 0$, une infinité de termes $x_n(z, t)$ se trouvent sur le segment $\langle \underline{\xi}(z, 0), \bar{\xi}(z, 0) \rangle$ et au dehors de ce segment, les valeurs limites restent les mêmes. Pour $\bar{z} = 0$ tous les termes $x_n(z, t)$ ($n-1 > q$) se trouvent entre $\underline{\xi}(z, 0)$ et $\bar{\xi}(z, 0)$ et

$$\underline{\xi}(z, 0) \leq \lim x_n(z, t) \leq \overline{\lim} x_n(z, t) \leq \bar{\xi}(z, 0).$$

Ainsi le théorème IV est démontré pour $\xi(1; 0) \leq t \leq \omega$.

Supposons maintenant $-a \leq t \leq -\omega$. Alors on a $0 \leq f(t) \leq f(0)$, $0 \geq f(t) \geq -f(0)$ de sorte que $\varepsilon_n f(t)$ se trouve toujours dans l'intervalle fermé dont les bornes sont 0 et $\varepsilon_n f(0)$. $x_{n-1}(z, x)$ étant une fonction monotone de x , $x_n(z, t) = x_{n-1}[z, \varepsilon_n f(t)]$ se trouve dans l'intervalle fermé dont les bornes sont $x_{n-1}(z, 0)$ et $x_n(z, 0) = x_{n-1}[z, \varepsilon_n f(0)]$.

(24) $x_n(z, t)$ se trouve sur le segment borné par $x_{n-1}(z, 0)$ et $x_n(z, 0)$.

Deux cas différents se présentent maintenant suivant que $x_n(z, 0)$ est le premier terme ou non d'un groupe de termes de l'une des deux suites partielles monotones dont la suite $x_v(z, 0)$ ($v = 0, 1, 2, \dots$) est composée, c'est-à-dire suivant que l'on a $n = \lambda_k - 1$ ou $n \neq \lambda_k - 1$.

Si $n \neq \lambda_k - 1$, $x_n(z, t)$ se trouve entre deux termes successifs d'un groupe de termes de la suite partielle croissante ou décroissante tous les deux cas se présentant effectivement suivant la valeur de n .

Si $n = \lambda_k - 1$, alors on a $\varepsilon_{n+1} = -1$. Le produit $\varepsilon_0 \dots \varepsilon_n$ peut avoir la valeur $+1$ ou -1 . Supposons-le égal à $+1$. Alors de l'inégalité $t \leq -\omega \leq -f(x) \leq 0$ qui est satisfaite pour chaque x du segment $\langle -\omega, +\omega \rangle$ et de la monotonie croissante de $x_n(z, x)$ par rapport à x il suit $x_n(z, t) \leq x_n(z, -f(x)) \leq x_n(z, 0)$. En y mettant $x = \varepsilon_{n+2} t$ ($\dots (\varepsilon_{n+1} f(0)) \dots$) ($i = 2, 3, \dots$) on obtient $x_n(z, t) \leq x_{n+i}(z, 0) \leq x_n(z, 0)$ ($i = 1, 2, \dots$) respectivement, d'après (24), $x_{n-1}(z, 0) \leq x_n(z, t) \leq x_{n+i}(z, 0)$ ($i = 0, 1, 2, \dots$). Particulièrement pour $i = \lambda_{k+1} - \lambda_k$ on obtient, tenant compte que $n = \lambda_k - 1$, $x_{\lambda_k-2}(z, 0) \leq x_n(z, t) \leq x_{\lambda_{k+1}-1}(z, 0)$ ($\varepsilon_0 \dots \varepsilon_{\lambda_k-1} = +1$). D'une manière analogue on obtient pour $\varepsilon_0 \dots \varepsilon_n = -1$

$$x_{\lambda_k-2}(z, 0) \geq x_n(z, t) \geq x_{\lambda_{k+1}-1}(z, 0) \quad (\varepsilon_0 \dots \varepsilon_{\lambda_k-1} = -1).$$

De ces deux inégalités on tire que, pour $n = \lambda_k - 1$, $x_n(z, t)$ se trouve entre deux groupes successifs de termes d'une même

suite partielle (croissante ou décroissante) de la suite $x_v(z, 0)$ ($v=0, 1, 2, \dots$).

Ainsi le théorème IV. est démontré pour $-a \leq t \leq -\omega$.

Soit maintenant $\omega < t \leq a$. Pour $z \neq p/2^q$ on a

$-a \leq -\frac{0}{f} \left\{ \frac{1}{f} \left[\dots \left(\frac{t}{f}(t) \right) \dots \right] \right\} = t^{(i)} \leq -\omega$ ($i=0, 1, \dots, \lambda_{k+1} - \lambda_k - 1$; $\lambda_k < \lambda_{k+1}$; $k=0, 1, 2, \dots$), de sorte que $x_{\lambda_k+i}(z, t) = x_{\lambda_k-1}(z, t^{(i)}) = \varepsilon_0 f \{ \dots [\varepsilon_{\lambda_k-1} f(t^{(i)})] \}$ se trouve entre $x_{\lambda_k-1}(z, -a)$ et $x_{\lambda_k-1}(z, -\omega)$ parce que $x_{\lambda_k-1}(z, x)$ est monotone par rapport à x . Mais $x_{\lambda_k-1}(z, -a)$ et $x_{\lambda_k-1}(z, -\omega)$ se trouvant, d'après le résultat obtenu dans le cas où $-a \leq t \leq -\omega$, entre

$$x_{\lambda_k-2}(z, 0) \text{ et } x_{\lambda_{k+1}-1}(z, 0),$$

tendent vers la même limite égale à $\underline{\xi}(z, 0)$ ou $\bar{\xi}(z, 0)$ suivant que k est pair ou impair. Par conséquent $x_{\lambda_k+i}(z, t)$ tend vers les mêmes limites ce qui prouve l'exactitude du théorème IV. dans ce cas aussi.

Si $z = p/2^q$, alors deux suites (8) correspondent au nombre z . A ces suites correspondent respectivement les suites:

$$\begin{aligned} x_{q+i}(z'', t) &= \varepsilon_0 f \{ \dots [\varepsilon_{q-1} f(\varepsilon_q f \{ -\frac{1}{f} [\dots (\frac{t}{f}(t)) \dots]) \dots] \}, \\ x_{q+i}(z', t) &= \varepsilon_0 f \{ \dots [\varepsilon_{q-1} f(-\varepsilon_q f \{ -\frac{1}{f} [\dots (\frac{t}{f}(t)) \dots]) \dots] \}, \\ &\quad (i=1, 2, \dots; \varepsilon_0 \dots \varepsilon_q = +1) \end{aligned}$$

dont la première est décroissante, la deuxième croissante. En même temps on a $x_{q+i}(z'', t) \geq x_{q-1}(z, 0) \geq x_{q+i}(z', t)$, d'où l'on tire pour $i \rightarrow \infty$

$$\bar{\xi}(z'', t) = \bar{\xi}(z, t) \geq x_{q-1}(z, 0) \geq \underline{\xi}(z, t) = \underline{\xi}(z', t).$$

De l'inégalité

$$-\frac{1}{f} [\dots (\frac{t}{f}(0)) \dots] > -\frac{1}{f} [\dots (\frac{t}{f}(t)) \dots]$$

on tire $x_{q+i}(z'', 0) \geq x_{q+i}(z'', t) \geq x_{q-1}(z, 0) \geq x_{q+i}(z', t) \geq x_{q+i}(z', 0)$ d'où l'on déduit pour $i \rightarrow \infty$

$$\bar{\xi}(z, 0) \geq \bar{\xi}(z, t) \geq x_{q-1}(z, 0) \geq \underline{\xi}(z, t) \geq \underline{\xi}(z, 0).$$

Ainsi le théorème est démontré entièrement.

5. Si $f_v(x)$ ($-A_v \leq x \leq +A_v$; $v=0, 1, 2, \dots$) sont des fonctions telles que $|f_v(x)| \leq A_{v-1}$ où $0 < A_v \leq A < +\infty$ ($v=-1, 0, 1, 2, \dots$), alors $x_n^{(1)}(z, t)$, considérée comme fonction uniquement de z , a la propriété exprimée par le

Théorème V. Si $z'_{v,n}$, $z''_{v,n}$ ($n=0, 1, 2, \dots$; $v=1, 2, \dots, 2^{n+1}-1$) indiquent les deux formes de $z = v/2^n$ représenté dans le

système binaire, la première de période zéro, la deuxième de période 1, et si $x_n^{(1)}(z, t) \rightarrow \xi_\mu(z, t)$ ($n \rightarrow \infty$), on a

$$(25) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \sum_{v=1}^p x_n^{(1)}(z''_{v,n}, t) = \int_0^z \xi_\mu(z, t) dz \quad (p = [2^n z], 0 \leq z \leq 2),$$

L'intégrale étant prise dans le sens de Riemann ou de Lebesgue suivant que $\xi_\mu(z, t)$ est intégrable dans le sens de Riemann ou non.

Démonstration. Il est évident qu'on a

$$(26) \quad x_n^{(1)}(z, t) = x_n^{(1)}(z'_{v-1,n}, t) = x_n^{(1)}(z''_{v,n}, t) \\ (z'_{v-1,n} \leq z \leq z''_{v,n}; v = 1, 2, \dots, 2^{n+1}),$$

parce que les chiffres d_v ($v = 0, 1, \dots, n$) et les suites $\{\varepsilon_v\}$ ($v = 0, 1, \dots, n$) correspondantes sont les mêmes pour tout nombre z du segment $\langle z'_{v-1,n}, z''_{v,n} \rangle$. $x_n^{(1)}(z, t)$ étant intégrable on a

$$(27) \quad \int_0^z x_n^{(1)}(z, t) dz = (z - \frac{p}{2^n}) x_n^{(1)}(z''_{p+1,n}, t) + \frac{1}{2^n} \sum_{v=1}^p x_n^{(1)}(z''_{v,n}, t) \\ (p = [2^n z], 0 \leq z \leq 2)$$

l'intégrale en question étant égale à la somme algébrique des aires des $p+1$ rectangles qui ont pour leurs hauteurs les nombres $x_n^{(1)}(z''_{v,n}, t)$ ($v = 1, 2, \dots, p+1$) et pour leur base 2^{-n} excepté le dernier dont la base est $z - 2^{-n}p$. Pour $n \rightarrow \infty$ (27) devient (25)¹² parce que le premier terme du second membre de (27) tend vers 0.

Si les $f_v(x)$ satisfont aux conditions (1), on obtient le

Théorème VI. Pour que la fonction limite $\xi_\mu(z, 0)$ de la suite (2) soit continue dans I , il faut et il suffit qu'on puisse trouver, pour chaque $\varepsilon > 0$, un nombre $N(\varepsilon)$ tel que

$$(28) \quad x_n^{(1)}(z''_{v,n}, 0) - x_n^{(1)}(z'_{v,n}, 0) < \varepsilon \quad (n > N(\varepsilon); v = 1, 2, \dots, 2^{n+1} - 1).$$

Démonstration. Dans la deuxième partie de f. du paragraphe 1. nous avons démontré que $x_i^{(1)}(z''_{v,n}, 0)$ ($i \geq n$) est décroissante et $x_i^{(1)}(z'_{v,n}, 0)$ croissante ou plus précisément

$$(29) \quad x_n^{(1)}(z''_{v,n}, 0) \geq x_i^{(1)}(z''_{v,n}, 0) \geq \bar{\xi}_\mu(\frac{v}{2^n}, 0) \geq \xi_\mu(\frac{v}{2^n}, 0) \geq \\ \geq x_i^{(1)}(z'_{v,n}, 0) \geq x_n^{(1)}(z'_{v,n}, 0) \quad (i \geq n).$$

Supposons que $\xi_\mu(z, 0)$ soit continue. Alors, d'après 1B., 1C. et (29), on a pour chaque valeur de n

$$\xi_\mu(\frac{v-1}{2^n}, 0) \geq x_n^{(1)}(z''_{v,n}, 0) \geq x_n^{(1)}(z'_{v,n}, 0) \geq \xi_\mu(\frac{v+1}{2^n}, 0)$$

¹² H. Lebesgue, Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, Paris (1928), p. 125.

et, pour $n > N(\varepsilon)$, $0 \leq \xi_\mu(\frac{\nu-1}{2^n}, 0) - \xi_\mu(\frac{\nu+1}{2^n}, 0) < \varepsilon$. Ces deux inégalités ayant (28) pour conséquence, la nécessité de (28) est démontrée.

D'autre part, d'après 1C. et (29), on a pour chaque z du segment $\langle (\nu-1)/2^n, \nu/2^n \rangle$

$$x_n^{(\mu)}(z''_{\nu-1, n}, 0) \geq \xi_\mu(\frac{\nu-1}{2^n}, 0) \geq \bar{\xi}_\mu(z, 0) \geq \xi_\mu(z, 0) \geq \bar{\xi}_\mu(\frac{\nu}{2^n}, 0) \geq x_n^{(\mu)}(z'_{\nu, n}, 0).$$

Mais, d'après (26) et (28), on a

$$x_n^{(\mu)}(z''_{\nu-1, n}, 0) - x_n^{(\mu)}(z'_{\nu, n}, 0) = \{x_n^{(\mu)}(z''_{\nu-1, n}, 0) - x_n^{(\mu)}(z'_{\nu-1, n}, 0)\} + \{x_n^{(\mu)}(z''_{\nu, n}, 0) - x_n^{(\mu)}(z'_{\nu, n}, 0)\} < 2\varepsilon$$

et à fortiori

$$\bar{\xi}_\mu(z, 0) - \xi_\mu(z, 0) < 2\varepsilon$$

$$(n > N(2\varepsilon); \nu = 1, 2, \dots, 2^{n+1} - 1; (\nu-1)2^{-n} \leq z \leq \nu/2^{-n}).$$

Ainsi on a démontré que $\xi_\mu(z, 0)$ est continue dans l'intervalle $0 < z < 2$. Mais, d'après 1D, elle est toujours continue au point $z=0$ du côté droit et au point $z=2$ du côté gauche. Par conséquent, $\xi_\mu(z, 0)$ est continue dans I , c. q. f. d.

6. Soit $f(x)$ ($-a \leq x \leq +a$, $a > 0$) une fonction continue et strictement croissante telle que $b = f(-a) \geq 0$, $f(x) > x$ ($|x| < a$), $f(a) = a$. Considérons la suite $x_n(z, 0) = \varepsilon_0 f(\dots(\varepsilon_n f(0))\dots)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. En examinant les conditions supplémentaires auxquelles $f(x)$ doit satisfaire pour que la fonction limite correspondante $\underline{\xi}(z) = \underline{\xi}(z, 0)$ soit continue dans I {et alors $\underline{\xi}(z) = \bar{\xi}(z) = \xi(z, 0)$ }, on arrive, en appliquant les résultats du paragraphe 1., aux résultats suivants:

A. Pour que $\underline{\xi}(z)$ soit continue dans I , il faut et il suffit que $x_{n+1}(z, 0) - x_n(z, 0) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$).

B. Si $\underline{\xi}(z)$ est continue, l'équation $t = -f[-f(t)]$ ($-a \leq t \leq 0$) a une solution unique t_0 , t_0 étant la solution unique de $t = -f(t)$.

Si $f(x)$ a une dérivée $f'(x)$ ($-a < x < +a$) et si $f(-a) = 0$, on a:

C. Si $\underline{\xi}(z)$ est continue, on a $f'(t_0) \leq 1$.

D. $\underline{\xi}(z)$ sera continue lorsque $f'(x) \leq q < 1$ ($-a < x < +a$, $q > 0$).

E. Si $f(x)$ est convexe pour $-a \leq x \leq +a$, $\underline{\xi}(z)$ est continue dans I .

Si $f(x)$ est concave, alors $\underline{\xi}(z)$ sera continue:

F. Lorsque

$$(30) \quad f' \left\{ -f \left[f \left(\dots \left[f(0) \right] \dots \right) \right] \right\} \cdot [f'(0)]^n \leq q < 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots);$$

G. Ou, lorsque

$$(31) \quad f'(x) \leq q f'(0) (1 + x/a)^K \quad \{0 < q < 1; -a \leq x \leq -a [1 - f'(a)]; \\ K = -\frac{\log f'(0)}{\log f'(a)}\}.$$

Démonstration. a. A résulte immédiatement de 1f.

b. Supposons que $t = -f[-f(t)]$ ait d'autres solutions différentes de t_0 . Soit $\Phi(t) = -f[-f(t)]$, $\Phi_0(t) = t$, $\Phi_{n+1}(t) = \Phi[\Phi_n(t)]$ ($n=0, 1, 2, \dots$). Indiquons par m et M ($m \neq t_0 \neq M$) la plus petite et la plus grande racine de l'équation $t = \Phi(t)$. Alors on a:

$-a < m < t_0 < M < 0$, $\Phi(t) < t$ ($M < t \leq 0$), $\Phi(t) > t$ ($-a \leq t < m$), $m = -f(M)$, $M = -f(m)$, la fonction $\Phi(t)$ ($-a \leq t \leq 0$) étant continue et strictement croissante. D'après cela on a:

$$1^0 \quad \Phi_{n+1}(0) < \Phi_n(0) \quad (n=0, 1, 2, \dots), \quad \Phi_n(0) \rightarrow M \quad (n \rightarrow \infty);$$

$$2^0 \quad \Phi_{n+1}[-f(0)] > \Phi_n[-f(0)] \quad (n=0, 1, 2, \dots), \quad \Phi_n[-f(0)] \rightarrow m$$

($n \rightarrow \infty$). D'autre part on a $x_{2n}(\frac{4}{3}, 0) \equiv \Phi_n[-f(0)]$ ($n=0, 1, 2, \dots$),

$x_{2n-1}(\frac{4}{3}, 0) \equiv \Phi_n(0)$ ($n=1, 2, \dots$) de sorte que, d'après (1. G. 4⁰),

la suite $\{x_n(\frac{4}{3}, 0)\}$ étant divergente, $\xi(z)$ ne peut pas être continue.

Ainsi B. est démontrée.

c. Si $f'(t_0) > 1$, t_0 n'est pas la solution unique de $t = \Phi(t)$, par conséquent, d'après B., $\xi(z)$ ne peut pas être continue dans I . Ainsi C. est démontrée.

Avant de procéder à la démonstration des autres propriétés, il est nécessaire, pour plus de simplicité,

1⁰ d'introduire la notation

$$(32) \quad \begin{cases} y_i^{(v)}(t) = \varepsilon_i f\{\varepsilon_{i+1} f[\dots(\varepsilon_v f(t))\dots]\} & (i=0, 1, \dots, v), \\ \text{particulièrement: } y_0^{(v)}(t) = x_v(z, t), \quad y_v^{(v)}(t) = \varepsilon_v f(t); \end{cases}$$

2⁰ d'appliquer la formule de la moyenne à la différence

$$x_{v+1}(z, 0) - x_v(z, 0) = x_v[z, \varepsilon_{v+1} f(0)] - x_v(z, 0) = \\ = \varepsilon_{v+1} f(0) \cdot x'_v[z, \xi^{(v)}]$$

où $\xi^{(v)}$ est un nombre entre 0 et $\varepsilon_{v+1} f(0)$ et $x'_v(z, t)$ la dérivée de $x_v(z, t)$ par rapport à t ;

3⁰ d'introduire la notation

$$(33) \quad f_{i,v} = f' [y_i^{(v)}(\xi^{(v)})].$$

d. D'après (32) et (33) on a pour une valeur de $z \in I$

$$(34) \quad x_{v+1}(z, 0) - x_v(z, 0) = \varepsilon_0 \dots \varepsilon_{v+1} f(0) \prod_{i=1}^v f_{i,v} \cdot f'(\xi^{(v)}),$$

de sorte que $|x_{v+1} - x_v| \leq f(0) \cdot q^{v+1} \rightarrow 0$ ($v \rightarrow \infty$). Ainsi D. est démontrée.

e. De la définition de $f(x)$ on tire $f'(x) < 1$ ($-a < x < +a$). Nous allons distinguer deux cas suivant que $\varepsilon_l = -1$ est vérifiée pour un nombre fini ou infini de valeurs de l . Dans le premier cas on a $z = p/2^q$ de sorte que, d'après (9), ω_v étant égal à „a“ et $f(-a) = 0$, on a $\xi(z) = \bar{\xi}(z)$. Dans le second cas il est toujours possible, pour chaque N , de trouver un nombre $n(N)$ tel que pour chaque $v > n(N)$ l'égalité $\varepsilon_l = -1$ soit vérifiée pour au moins N valeurs de $l \leq v$, v étant ainsi choisi, tenant compte de (7), (32), (33), (34) et des propriétés de $f'(x)$, on peut écrire

$$|x_{v+1} - x_v| = f(0) \cdot \prod_{k=0}^N f_{\lambda_k, v} \cdot \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq \lambda_k \leq \lambda_N}}^v f_{l, v} \cdot f'(\xi^{(v)}) < f(0) \cdot [f'(0)]^N \rightarrow 0$$

($N \rightarrow \infty$) de sorte que E. est démontrée aussi.

f. Pour démontrer F. il est nécessaire de prouver d'abord les faits suivants :

1° $\xi(z)$ sera continue dans I , si l'on a pour chaque $z \in I$

$$\prod_{l=\lambda_k}^{\lambda_{k+1}-1} f_{l, v} \leq q < 1, \quad \prod_{l=\lambda_{k_v}}^v f_{l, v} \leq Q$$

$$(v > N; k = 0, 1, \dots, k_v - 1; \lambda_{k_v} = \max_{\lambda_k \leq v} \lambda_k; Q > 0).$$

En effet, $f(x)$ étant concave, on a d'abord $f'(x) < 1$ ($x \geq 0$) de sorte que, tenant compte de (7) et (34), on a

$$\begin{aligned} |x_{v+1} - x_v| &= f(0) \cdot \prod_{l=1}^{\lambda_0-1} f_{l, v} \cdot \prod_{k=0}^{k_v-1} \prod_{l=\lambda_k}^{\lambda_{k+1}-1} f_{l, v} \cdot \prod_{l=\lambda_{k_v}}^v f_{l, v} \cdot f'(\xi^{(v)}) \leq \\ &\leq f(0) \cdot 1 \cdot q^{k_v} \cdot Q \cdot f'(\xi^{(v)}) \rightarrow 0 \quad (v \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Remarque. Si dans (7) $k = 0, 1, \dots, n$ (n fini), le nombre z est de la forme $p/2^q$ et la suite correspondante $x_n(z, 0)$ d'après (9), est convergente, ω_v étant égal à a et $f(-a) = 0$ d'après l'hypothèse.

2° $\xi(z)$ sera continue dans I , si l'on a simultanément

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} f'(t_0) < 1, \\ f_{\lambda_k, v} \cdot [f'(\tau)]^{\lambda_{k+1} - \lambda_k - 1} \leq q < 1, \\ f_{\lambda_{k_v}, v} \cdot [f'(\tau)]^{v - \lambda_{k_v}} \leq Q, \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} (v > N; k = 0, 1, \dots, k_v - 1; \\ t_0 \leq \tau \leq 0). \end{array} \right.$$

La démonstration résulte immédiatement de la propriété précédente tenant compte du fait $f'(t) < f'(\tau) < 1$ ($t > 0$).

Pour démontrer F. il suffit de prouver que les conditions (5) seront remplies, si (30) est remplie.

En effet, de (30) pour $n=0$ on tire $f' [-f(0)] \leq q < 1$ et ensuite, puisque $-f(0) < t_0$, $f'(t_0) \leq q < 1$. D'autre part il est facile de démontrer l'inégalité

$$f_{\lambda_k, v} < f' \left\{ -\overset{0}{f} \left[\overset{1}{f} \left(\dots \left[\overset{n}{f} (0) \right] \dots \right) \right] \right\}, \quad n = \lambda_{k+1} - \lambda_k - 1.$$

D'après cela si (30) est remplie, la deuxième condition (35) même est remplie pour $\tau=0$. Puis, $\xi^{(v)}$ étant $< f(0)$ d'après sa définition, on a

$$f_{\lambda_{kv}, v} < f' \left\{ -\overset{0}{f} \left[\overset{1}{f} \left(\dots \left[\overset{n+1}{f} (0) \right] \dots \right) \right] \right\}, \quad n = v - \lambda_{kv}.$$

Si l'on a maintenant

$$(36) \quad f' \left\{ -\overset{0}{f} \left[\overset{1}{f} \left(\dots \left[\overset{n+1}{f} (0) \right] \dots \right) \right] \right\} \cdot [f'(0)]^n \leq Q \quad (n = v - \lambda_{kv})$$

$Q > 0$ étant un nombre à déterminer. on aura à fortiori $f_{\lambda_{kv}, v} \cdot [f'(0)]^n \leq Q$

$(n = v - \lambda_{kv})$ et c'est justement la troisième condition (35). Mais si l'on remplace dans (30) n par $n+1$, et si l'on divise l'inégalité obtenue par $f'(0)$, on obtient, en y mettant $q/f'(0) = Q$, l'inégalité (36).

Ainsi F. est démontrée.

g. Pour démontrer G. nous nous servirons de la fonction $\varphi(x) = kx + c$, $k = f'(a)$, $c = a(1-k)$. La tangente à la courbe $y = f(x)$ au point (a, a) ayant l'équation $y = \varphi(x)$, on a $f(x) < \varphi(x)$ ($-a \leq x < +a$), $f(a) = \varphi(a)$. Par la méthode de l'induction totale on démontre facilement l'inégalité

$$\overset{0}{f} \left\{ \dots \left[\overset{n}{f} (0) \right] \dots \right\} < a [1 - k^{n+1}] \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

d'où, grâce à la concavité de $f(x)$, on tire

$$f' \left\{ -\overset{0}{f} \left[\dots \left[\overset{n}{f} (0) \right] \dots \right] \right\} < f' [-a (1 - k^{n+1})] \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Si l'on a maintenant

$$(37) \quad f' [-a (1 - k^{n+1})] \cdot [f'(0)]^n \leq q < 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

on aura (30) à fortiori, de sorte que ξ est continue. La condition (37) peut être remplacée par la suivante (qui est plus simple mais moins forte)

$$(38) \quad f' [-a (1 - k^t)] \cdot [f'(0)]^t \leq q \cdot f'(0) \quad (q < 1; t \geq 1)$$

où t désigne une variable continue ($t \geq 1$). En mettant $x = -a(1 - k^t)$, $\kappa = -\log f'(0)/\log f'(a)$, (38) devient (31).

En appliquant ces résultats à la fonction $f(x) = a \sqrt[m]{a+x} / \sqrt[m]{2a}$ ($m > 0$, $a > 0$) on obtient:

1° Pour $0 < m < \frac{1}{2}$, $\underline{\xi}(z)$ et $\overline{\xi}(z)$ ont un nombre dénombrable de points de discontinuité partout denses dans I .

2° Pour $\frac{1}{2} \leq m < 4$, $\underline{\xi}(z)$ et $\overline{\xi}(z)$ sont continues et $\underline{\xi}(z) = \overline{\xi}(z)$.

II

Partant de la fonction limite de la suite

$$(39) \quad x_n(z, 0) = \varepsilon_0 f \{ \dots [\varepsilon_n f(0)] \dots \} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

que nous indiquerons, pour plus de simplicité, par $\xi(z)$, nous allons procéder à l'itération continue de $f(x)$ en modifiant deux théorèmes dus à MM. Morgan Ward et F. B. Fuller⁴).

Soit $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) une fonction continue et strictement croissante telle que

$$(40) \quad f(x) > x, \quad f(x) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow -\infty).$$

Désignons par $f_1(x) = f(x)$, $\dots$, $f_{n+1}(x) = f[f_n(x)]$, $\dots$ ses itérées successives et par $f_{-k}(x)$ ($k = 1, 2, \dots$) leurs fonctions inverses. Nous indiquerons par le nom d'itérée continue de $f(x)$ toute fonction $\Theta_y(x)$ de deux variables x et y telle que

- (i) $\Theta_0(x) = x$, $\Theta_1(x) = f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$);
- (ii) $\Theta_{y+z}(x) = \Theta_y[\Theta_z(x)]$ ($-\infty < x < +\infty$; $y, z, y+z \geq -1$);
- (iii) $\Theta_y(0)$ est continue et strictement croissante pour $-1 \leq y \leq 0$.

Théorème auxiliaire 2. *Toute fonction Θ qui satisfait à (i), (ii) et (iii) est continue et strictement croissante par rapport à x et y . Pour chacune de ces fonctions $\Theta = f_y(x)$ il existe une solution unique $\psi(x)$, continue et strictement croissante, de l'équation fonctionnelle*

$$(41) \quad \psi(x+1) = f[\psi(x)], \quad \psi(0) = 0$$

telle que

$$(42) \quad f_y(x) = \psi[\psi^{-1}(x) + y] \quad (-\infty < x < +\infty, y \geq -1).$$

Démonstration. Supposons que $\Theta = f_y(x)$ soit une fonction particulière satisfaisant aux conditions (i), (ii), (iii). Du fait qu'on a $f_{x+1}(0) = f[f_x(0)] > f_x(0)$ il suit, d'après (iii), que $f_x(0)$ est continue et strictement croissante pour $-1 \leq x < +\infty$.

Ecrivons $\psi(x)$ au lieu de $f_x(0)$. Alors $\psi(x)$ a une seule fonction inverse $\psi^{-1}(x)$ continue et strictement croissante pour $-\infty < x < +\infty$ telle que

$$\psi[\psi^{-1}(x)] = \psi^{-1}[\psi(x)] = x, \quad \psi(0) = \psi^{-1}(0) = 0.$$

D'autre part on a $\psi(x+y) = f_{x+y}(0) = f_y[f_x(0)] = f_y[\psi(x)]$ et $\psi(x+1) = f[\psi(x)]$ d'où il suit que $\psi(x)$ est une solution de (41). On a aussi $f_y(x) = f_y\{\psi[\psi^{-1}(x)]\} = \psi[\psi^{-1}(x) + y]$ et c'est justement (42).

Maintenant il est évident que $f_y(x)$ est continue et strictement croissante par rapport à x et y .

Enfin, la fonction $\psi(x)$ dans (42) est déterminée univoquement par $f_y(x)$. En effet, si y varie de -1 à $+\infty$, x étant constant, $f_y(x)$ croît d'une manière strictement monotone et par conséquent $\psi(x)$ aussi. Il en est de même de $\psi^{-1}(x)$. Si $\psi(0) = 0$, on aura aussi $\psi^{-1}(0) = 0$ de sorte que, d'après (42), en y remplaçant x par 0, y par x , il résulte $\psi(x) = f_x(0)$ ($-1 \leq x < +\infty$).

Ainsi le problème de déterminer toutes les itérées continues de la fonction $f(x)$ est ramené à la solution de l'équation (41).

Théorème auxiliaire 3. $\theta(x)$ étant une fonction de x ($0 \leq x < 1$) continue et strictement croissante de $\theta(0) = 0$ à $\theta(1) = 0$, $= f^*(0)$, toute solution ψ continue et strictement croissante de (41) a la forme

$$(43) \quad \psi(x) = f_{[x]}[\theta(x - [x])],$$

$[x]$ étant le plus grand entier $\leq x$.

Inversement, pour chaque fonction $\theta(x)$ ainsi choisie, l'équation (43) donne une solution continue et strictement croissante de (41).

Démonstration.¹³⁾ D'abord pour toute solution ψ de (41) continue et strictement croissante on a $\psi(x) \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow +\infty$).

En effet, si $\psi(x) \rightarrow L$ (L fini), on aurait $\psi(x) < L$ pour toutes les valeurs finies de x et, d'après (40), $f(L) > L$. $f(x)$ étant continue, il existerait un nombre $\delta > 0$ tel que $f(L - \delta) > L$. En choisissant x_0 tel que $\psi(x) > L - \delta$ ($x \geq x_0$), on obtiendrait $\psi(x+1) = f[\psi(x)] > L$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.

D'autre part on conclut facilement, d'après (41), que

$$\psi(x) \rightarrow -\infty \quad (x \downarrow -1).$$

De tout cela il suit que la fonction $\psi(x)$ a une fonction inverse $\Phi = \Phi(x) = \psi^{-1}(x)$ continue et strictement croissante de -1 à $+\infty$ définie sur toute la droite des x .

Il est facile de démontrer que cette fonction inverse Φ satisfait à l'équation fonctionnelle d'Abel¹⁴⁾

$$(44) \quad \Phi[f(x)] = \Phi(x) + 1, \quad \Phi(0) = 0.$$

Par convention nous écrirons e_n pour $f_n(0)$ ($n = -1, 0, 1, 2, \dots$). Alors on a $e_{-1} = -\infty$, $e_0 = 0$, $e_1 = f(0)$ et, d'après (40), $e_n < e_{n+1}$.

¹³⁾ La démonstration des théorèmes auxiliaires 2. et 3. est au fond celle employée dans ⁴⁾.

¹⁴⁾ Oeuvres complètes de Niels Henrik Abel, T. II., 1881, p. 36—39.

Il est facile de prouver que $e_n \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$). En effet, de l'égalité $f_x(0) = \psi(x)$ et du fait que $\psi(x) \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow +\infty$) on tire immédiatement $e_n \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow +\infty$).

D'après cela il est toujours possible de trouver, pour chaque valeur de x ($-1 < x < +\infty$), un entier k tel que

$$(45) \quad e_k \leq x < e_{k+1}.$$

Supposons que x soit compris dans (45). Alors, tenant compte des propriétés de $f(x)$ et de ses itérées ordinaires, on peut écrire

$$x = f_k(y), \quad y = f_{-k}(x) \quad (0 \leq y < f(0)),$$

où $f_{-k}(x)$ est la fonction inverse de $f_k(x)$, définie dans l'intervalle $e_{k-1} \leq x < +\infty$. Si l'on écrit, ensuite, dans l'intervalle $0 \leq x < f(0)$, $\theta^{-1}(x)$ à la place de $\Phi(x)$, on constate que $\theta^{-1}(0) = 0$ et que $\theta^{-1}(x)$ est une fonction de x continue et strictement croissante avec $\theta^{-1}[f(0) - 0] = \lim_{x \uparrow f(0)} \theta^{-1}(x) = 1$, parce que, d'après (44),

$$\Phi[f(0)] = \Phi(0) + 1 = 1.$$

De plus, on constate que la fonction inverse $\theta(x)$ de la fonction $\theta^{-1}(x)$ ainsi définie, a toutes les propriétés citées dans le théorème auxiliaire 3. On voit d'ailleurs, d'après (44), que

$$\text{ou} \quad \Phi(x) = \Phi[f_k(y)] = \Phi(y) + k = \theta^{-1}(y) + k$$

$$(46) \quad \Phi(x) = \theta^{-1}[f_{-k}(x)] + k$$

d'où l'on conclut, tenant compte de l'inégalité $0 \leq f_{-k}(x) < f(0)$, que $k = [\Phi]$ est le plus grand entier $\leq \Phi$.

Pour déterminer ψ il faut résoudre (46) par rapport à x comme fonction de Φ . On obtient $\Phi - [\Phi] = \theta^{-1}[f_{-[\Phi]}(x)]$, d'où il suit $\theta(\Phi - [\Phi]) = f_{-[\Phi]}(x)$, ensuite $x = f_{[\Phi]}(\theta(\Phi - [\Phi]))$ et enfin

$$\psi(x) = f_{[x]}(\theta(x - [x])).$$

Inversement, si $\psi(x) = f_{[x]}(\theta(x - [x]))$ où θ remplit les conditions du théorème auxiliaire 3., on a

$$\begin{aligned} \psi(x+1) &= f_{[x+1]}(\theta(x+1 - [x+1])) = f_{[x]+1}(\theta(x - [x])) = \\ &= f(f_{[x]}(\theta(x - [x]))) = f(\psi(x)) \end{aligned}$$

et c'est justement l'équation (41).

Maintenant on peut donner le

Théorème VII. Si la fonction limite $\xi(z)$ ($0 \leq z \leq 2$) de la suite (39) est continue et strictement décroissante et si $\xi(z) \rightarrow +\infty$ ($z \downarrow 0$) et $\xi(z) \rightarrow -\infty$ ($z \uparrow 2$), alors:

1° la fonction

$$(47) \quad f_y(x) = \xi[2^{-y} \xi^{-1}(x)] \quad (-\infty < x < +\infty); \quad -1 \leq y < +\infty$$

est une itérée continue de $f(x)$;

2° la fonction

$$(48) \quad \psi(x) = \xi(2^{-x}) \quad (-1 < x < +\infty)$$

est une solution de l'équation (41) ayant la forme (43).

Inversement, si (41) a une solution de la forme (43) qui satisfait à l'équation

$$(49) \quad \psi\left(\frac{1}{\log 2} \log \frac{2^y}{2^{y+1}-1}\right) + \psi(y) = 0, \quad (-1 < y < +\infty)$$

la suite (39) est toujours convergente et sa fonction limite $\xi(z)$ est donnée par

$$(50) \quad \xi(x) = \psi(-\log x \cdot \log^{-1} 2) \quad (0 < x < 2).$$

Démonstration. La fonction $\xi(z)$, étant la fonction limite de la suite (39), satisfait, d'après (13) et (14), aux équations

$$(51) \quad \xi(z) + \xi(2-z) = 0 \quad (0 < z < 2),$$

$$(52) \quad f[\xi(2z)] = \xi(z) \quad (0 < z < 1).$$

Tenant compte des hypothèses faites sur $\xi(z)$ on tire de (52) que la fonction $f(x)$ est continue et strictement croissante pour $-\infty < x < +\infty$ et qu'elle satisfait aux conditions (40). Maintenant, il est facile de démontrer l'équation suivante

$$f_k[\xi(z)] = \xi(z \cdot 2^{-k}) \quad (0 < z < 2; \quad k = -1, 0, 1, 2, \dots).$$

En supposant qu'elle soit satisfaite pour un k , on a $f_{k+1}[\xi(z)] = f\{f_k[\xi(z)]\} = f[\xi(z \cdot 2^{-k})] = \xi(z \cdot 2^{-k-1})$ ($0 < z < 2$) ce qui veut dire qu'elle est satisfaite pour $k+1$ aussi. Comme elle est satisfaite pour $k = -1$ et $k = 0$, elle est satisfaite pour tout nombre entier $k = -1, 0, 1, 2, \dots$. Si on y met x au lieu de $\xi(z)$, on obtient l'équation

$$f_k(x) = \xi[2^{-k} \xi^{-1}(x)] \quad (-\infty < x < +\infty; \quad k = -1, 0, 1, 2, \dots),$$

qui représente les itérées ordinaires de $f(x)$. En y mettant y à la place de k , y pouvant être un nombre quelconque ≥ -1 , on obtient l'équation (47). Il est facile de vérifier que (47) satisfait aux conditions (i), (ii), (iii). En remplaçant, dans (47), x par 0 et y par x , on obtient $f_x(0) = \xi(2^{-x})$, tenant compte que, d'après (51), $\xi(1) = 0$, $\xi^{-1}(0) = 1$. D'après le théorème auxiliaire 2., $f_x(0) = \psi(x)$ est une solution de (41) et, d'après le théorème auxiliaire 3., elle a la forme (43), c. q. f. d.

Démonstration du théorème inverse. D'abord il est évident qu'à chaque solution de (41) ayant la forme (43) et satisfaisant à (49), l'équation (50) fait correspondre une fonction unique $\xi(x)$ continue et strictement décroissante de $+\infty$ à $-\infty$ pendant que x croît de

0 à 2. Pour que cette fonction soit la fonction limite de (39), il faut et il suffit que, d'après le théorème I., les relations (51) et (52) soient remplies. Mais, il est facile de démontrer, qu'il en est ainsi en effet. En écrivant

$$\psi(x) = \psi(-\log^{-1} 2 \cdot \log 2^{-x}) = \xi(2^{-x}) \quad (-1 < x < +\infty)$$

l'équation (41) devient $\xi(2^{-(x+1)}) = f[\xi(2^{-x})]$, qui en y mettant $2^{-x-1} = z$, devient justement (52).

Si l'on met $\psi(y) = \xi(2^{-y})$ dans (49), on obtient $\xi(2-2^{-y}) + \xi(2^{-y}) = 0$, d'où, pour $2^{-y} = t$, il suit (51) pour $-1 < y < +\infty$, $0 < t < 2$. En écrivant x à la place de 2^{-x} (48) devient (50).

Exemple. Soit $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1} = \operatorname{ctg} \left(\frac{1}{2} \operatorname{arcctg} x \right)$. On trouve $f_y(x) = \operatorname{ctg} (2^{-y} \operatorname{arcctg} x)$ et $\xi(x) = \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} x \right)$ ($0 < x < 2$).

LITTÉRATURE :

- 1) Paul Wiernsberger, Sur les polynômes réguliers et les radicaux carrés superposés. J. r. und ang. Math., 130 (1905), p. 144—152. — C. R. Paris, 137 (1903) p. 1233—1234; 138 (1904), p. 1401—1403.
- 2) H. Lebesgue, Sur certaines expressions irrationnelles illimitées. Bull. Calcutta Math. Soc., 29, p. 17—28.
- 3) G. Polya und G. Szegő, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I, 1925, Aufgaben 183, 184, 185, p. 33.
- 4) Hans Rademacher, Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonal-funktionen. Math. Ann. 87 (1922), p. 130—138.
- 5) S. Kaczmarz et H. Steinhaus, Le système orthogonal de M. Rademacher, Studia math., 2 (1930), p. 231—247.
- 6) E. Picard, Leçons sur quelques équations fonctionnelles, Paris, 1928, p. 155.
- 7) Morgan Ward and F. B. Fuller, The continuous iteration of real functions. Bull. Amer. Math. Soc., 42, (1936), p. 393—396.
- 8) W. Sierpinski, Sur les fonctions dépendantes. Fundamenta math. 28 (1937), Warszawa, p. 66—67.
- 9) H. Lebesgue, Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, Paris (1928), p. 125.
10. Oeuvres complètes de Niels Henrik Abel, T. II., 1881, p. 36—39.

