Baština Akademije nauka i umjetnosti Bosne i Hercegovine

Matematičari - akademici

Vuković, Mirjana

2023-07

Akademija nauka i umjetnosti Bosne i Hercegovine

https://bastina.anubih.ba/handle/123456789/777

Preuzeto s Baštine Akademije nauka i umjetnosti Bosne i Hercegovine

https://bastina.anubih.ba/



MATEMATIČARI – AKADEMICI

AKADEMIJA NAUKA I UMJETNOSTI BOSNE I HERCEGOVINE
АКАДЕМИЈА НАУКА И УМЈЕТНОСТИ БОСНЕ И ХЕРЦЕГОВИНЕ
ACADEMY OF SCIENCES AND ARTS OF BOSNIA AND HERZEGOVINA

Special Editions
Volume CCVII

Department of Natural and Mathematical Sciences
Volume 28

MATHEMATICIANS - ACADEMICIANS

Academician Mirjana Vuković

SARAJEVO 2023

10.5644/PI2023.207

AKADEMIJA NAUKA I UMJETNOSTI BOSNE I HERCEGOVINE
АКАДЕМИЈА НАУКА И УМЈЕТНОСТИ БОСНЕ И ХЕРЦЕГОВИНЕ
ACADEMY OF SCIENCES AND ARTS OF BOSNIA AND HERZEGOVINA

Posebna izdanja
Knjiga CCVII

Odjeljenje prirodnih i matematičkih nauka
Knjiga 28

MATEMATIČARI – AKADEMICI

Akademkinja Mirjana Vuković

SARAJEVO, 2023.

MATEMATIČARI – AKADEMICI

Izdavač
Akademija nauka i umjetnosti Bosne i Hercegovine

Za izdavača
Akademik Muris Čičić

Autor
Akademkinja Mirjana Vuković

Urednik
Akademik Dejan Milošević

Recenzenti
Akademik Dejan Milošević
Prof. dr Mirna Džamonja, domaća članica ANUBiH

Lektorica
Prof. dr Milanka Babić

Korektura
Mirjana Vuković

Dizajn korice
Nino Hasanović, dipl. ing.

DTP
Rasim Kovačević, dipl. matematičar

Štampa
Štamparija Fojnica, d.d. Fojnica

Tiraž
150

Sarajevo, 2023.

CEEOL
EBSCO

ISBN 978-9926-410-86-5

CIP zapis dostupan u COBISS sistemu Nacionalne i univerzitetske biblioteke BiH pod ID brojem 55388422

SADRŽAJ

I PREDGOVOR 7

II UVOD ZA KNJIGU MATEMATIČARI – AKADEMICI 9

III O ŽIVOTU I RADU MATEMATIČARA – AKADEMIKA

1. Mahmut Bajraktarević 23
2. Manojlo Maravić 49
3. Branislav Martić 73
4. Veselin Perić 89
5. Fikret Vajzović 121

IV O AUTORKI 143

V LITERATURA 147

anu monografija FINAL PRINT.indd 6 6/16/2023 1:56:52 PM

PREDGOVOR

Ova knjiga bi, kroz priču o našim prvim matematičarima, bila i reminiscencija na studij i moj susret, a zatim rad i vrijeme provedeno s našim matematičarima koji su već bili ili su kasnije postali akademici, vrijeme kada sam učeći od njih, a zatim i radeći sa njima, osjetila radost naučnog istraživanja i zahvalnost da su mi pokazali ljepotu matematike i naučnog stvaralaštva. Za njih se može reći da su bili lučonoše i pioniri matematike u Bosni i Hercegovini, a da je njihovo djelo označilo početak jedne epohe u razvoju matematike i novog – modernijeg načina rada.

Počeću riječima našeg velikog nobelovca *Ive Andrića: Gdje je svjetlost nauke potrebnija, nego u jednoj maloj zemlji ?* i dodati, a gdje je njena luč najsjajnija i najjače sija, nego u hramu nauke – Akademiji nauka.

Najprije obrazovanje, a zatim i nauka su počeli da se intenzivno razvijaju kroz Univerzitet, a poslije *Drugog svjetskog rata* su se otvarali univerziteti u svim bivšim republikama, ukoliko već nisu postojali. Univerzitet u Sarajevu (1949) bio je prvi u SRBiH i peti u Jugoslaviji.

U formiranju visokog obrazovanja, a zatim i Univerziteta u Sarajevu, posebno Filozofskog fakulteta i Katedre za matematiku iz kog je kasnije izrastao Prirodno-matematički fakultet i njegov Odsjek za matematiku, važnu ulogu je odigrala prof. *Vera Šnajder*, koja je okupila postojeće matematičare i poslala mlade matematičare u najjače naučne centre u Evropi da uče. Inače, spomenuću da je kompletna prva postava nastavnika Katedre za matematiku poticala iz čuvene *Beogradske škole matematike Mihaila Petrovića Alasa*, pa tako i većina prvih akademika, sa izuzetkom *V. Perića* i *F. Vajzovića* koji su bili zagrebački đaci *Đure* i *Svetozara Kurepe*. Zalaganje prof. Vere Šnajder za naučni rad u oblasti teorijske matematike privuklo je pažnju i brojnih studenata.

anu monografija FINAL PRINT.indd 7 6/16/2023 1:56:52 PM

Ovom knjigom želim da otrgnem od zaborava svoje drage profesore i učitelje koji su bili prvi matematičari, a postali su i prvi akademici – matematičari. Bili su to akademici *Mahmut Bajraktarević*, *Manojlo Maravić*, *Branislav Martić*, *Fikret Vajzović* i *Veselin Perić*. Ali, u uvodu knjige spomenuću i profesore *Veru Šnajder* (rođ. *Popović*) i *Šefkiju Raljevića*, koji su, takođe, odigrali vrlo značajnu ulogu u formiranju Univerziteta i utemeljenju studija matematike.

Biografije akademika matematičara su obične i jednostavne kao i kod svih stvaralaca. Potrudila sam se da ih oživim, da pored priče o naučnom radu ispričam kratko i ponešto o svakome od njih, uglavnom svoja sjećanja, da prepričam razgovore koje sam vodila sa njima, a bilo ih je, s obzirom da sam bila asistentica akademikâ *Mahmuta Bajraktarevića* i *Fikreta Vajzovića*, ali i prof. *Šefkije Raljevića*, doktorantica akademika *Manojla Maravića* i magistrantica akademika *Veselina Perića*. Od njih petorice nije mi predavao samo akademik *Branislav Martić*.

Rijetki su danas autori koji se povlače u samoću i tišinu smatrajući da njihovo djelo treba da savlada iskušenja vremena dok ne nađe mjesto u vječnosti, ako ga stvarno nađe, jer je matematika kojom su se oni bavili, kao i većina njihovih učenika, apstraktna – teorijska nauka. Ako još ima takvih pregalaca i zanesenjaka, a nadam se da ima, onda je to stoga što je generacija naših učitelja, u koje spadaju i akademici, koji su zauzimli istaknuto i časno mjesto, znala da govori ne samo za svoje vrijeme, nego i za budućnost.

Ovom prilikom želim da se zahvalim svima koji su, na bilo koji način doprinijeli da se ova knjiga pojavi, u prvom redu Federalnom ministarstvu obrazovanja i nauke, Sarajevo koje je finasiralo njeno objavljivanje. Osim toga, posebnu zahvalnost dugujem recenzentima – uvaženim kolegama akademiku *Dejanu Miloševiću* i prof. dr *Mirni Džamonja*, profesorici na *Université Paris I* (Panteon, *Sorbonne*), koja je i članica *Matematičkog Instituta Češke Akademije Nauka* u Pragu, kao i lektorici prof. dr *Milanki Babić*. Među one čiju pomoć smatram posebno dragocjenom spadaju svakako i dipl. ing. *Nino Hasanović* kojem dugujem zahvalnost za dizajn korica knjige i *Rasim Kovačević*, dipl. matematičar koji je zaslužan za uređenje teksta.

U Sarajevu, juni 2023. godine *Mirjana Vuković*

anu monografija FINAL PRINT.indd 8 6/16/2023 1:56:52 PM

UVOD ZA KNJIGU MATEMATIČARI – AKADEMICI

U svijetu postoji pravo čudo – to je Matematika, božanska, kraljevska nauka, čarobni izum ljudi, stvoren na vrhu uma i na vrhu pera. Ova čudesna nauka posjeduje magično svojstvo da predvidi nepredvidivo i da poveže nepovezano. Zadivljuje svojom magičnom i mističnom sposobnošću pogađanja svojstava i pojava. – Akademik Anatolij L. Buhačenko

Cilj ove knjige je bio ne samo da se bolje upoznaju i otrgnu od zaborava bosanskohercegovački matematičari koji su postali prvi članovi Akademije nauka i umjetnosti Bosne i Hercegovine nego i da se, u isto vrijeme, na izvjestan način, kroz priču o njima predstavi i istorija bosanskohercegovačke matematike, jer su prvi akademici bili ujedno i najuspješniji među prvim bosanskohercegovačkim matematičarima, a iza sebe su ostavili svoje radove, svoja djela neprolaznog značaja, na čijim je stranicama ispisana istorija naše matematike.

Ideja da zajedno napišemo knjigu o akademiku *Manojlu Maraviću* potekla je od kolege i prijatelja akademika *Vlatka Dolečeka*: kao student bio je demonstrator prof. Maravića, a ja njegova doktorantica. Prihvatila sam odmah, ali sam rekla da bih, u knjigu, uključila i akademika *Mahmuta Bajraktarevića*, čija sam bila asistentica i kojeg sam naslijedila na Kompleksnoj analizi. Sretna sam, a osjećam i olakšanje, jer sam realizovala naš plan, pa tako naš dogovor nije ostao samo slovo na papiru, tim prije jer *Vlatko* nije više među nama, a posebno i zbog toga što sam u knjigu uključila još tri akademika: *Branislava Martića, Veselina Perića* i *Fikreta Vajzovića*, dakle sve do sada izabrane akademike matematičare, osim sebe.

2010 *Mathematics Subject Classification*: 01-XX, 01Axx, 01A70
Key words and phrases: History and biography, History of mathematics and mathematicians

anu monografija FINAL PRINT.indd 9 6/16/2023 1:56:52 PM

Za društvo u cjelini, a posebno za mlađe generacije, važno je da znaju kako se razvijala matematika i koliko je bila važna uloga prvih matematičara za razvoj matematike kod nas, a s obzirom na to da je matematika fundamentalna nauka – baza skoro svih nauka, koliko je značajnu ulogu imala u razvoju nauka uopšte, pa tako i univerziteta.

Šta bi se još moglo reći o matematici, osim da je matematika i jedna od najstarijih nauka, nauka koja se studirala i na prvim univerzitetima, na kojim se, pored prava i teologije, obavezno izučavala i filozofija, u koju je bila uključena i matematika. Dobro je poznato da su prvi filozofi bili i matematičari, a matematičar *Edvard Vladimirovič Frenkel* (član Američke akademije umjetnosti i nauke – AAAS) ide i korak dalje. U svojoj knjizi *The heart of Hidden Reality* (Basic Books, 2013) kaže da je matematika dio našeg kulturnog naslijeđa, kao što su umjetnost, književnost, muzika – s čim se i ja slažem.

Bio je to period poslije završetka Drugog svjetskog rata, vrijeme kada se ubrzanim tempom i sa puno entuzijazma radilo na obnovi ratom porušenog i izgradnji novog, pravednijeg društva – društva po mjeri čovjeka, vrijeme kada su postavljani temelji i univerzitetâ. Osnivanje Univerziteta u Sarajevu, 2. decembra 1949. godine, predstavljalo je značajan korak u razvoju obrazovanja, nauke i kulture Bosne i Hercegovine. U sastav Univerziteta ušli su Viša pedagoška škola (1946), Medicinski i Pravni fakultet (1947), Poljoprivredno-prehrambeni fakultet (1948) i Tehnički fakultet s građevinskim i arhitektonskim odsjekom (1949), a naredne godine, uredbom Vlade SR BiH od 14. februara 1950. godine, osnovan je i Filozofski fakultet sa dva odsjeka: humanističkim i prirodno-matematičkim.

Prve matematičare u Bosni i Hercegovini, nazvaću *velikanima* u matematici, i pored toga što se ta riječ u nauci ne čuje često. Navikli smo na velikane u umjetnosti, u sportu, ali ne i u nauci, iako se i oni, s obzirom na značaj i ulogu koju ima nauka na razvoj cjelokupnog društva, slobodno mogu nazvati velikanima.

Međutim, nepravedno bi bilo govoriti o razvoju matematike u BiH i bosanskohercegovačkim matematičarima akademicima, a ne spomenuti *Veru Popović Šnajder*. Iako ona nije postala akademik, njena zasluga za razvoj obrazovanja u oblasti matematike, pa tako i same matematike, jedne od najstarijih i najapstraktnijih nauka, kao i njen doprinos razvoju obrazovanja na svim nivoima, uključujući univerzitetsko obrazovanje i sticanje doktoratâ, pa, prema tome, i stvaranje budućih akademika, bili su ogromni.

Inače, o onima koji su učestvovali u „udaranju temelja“ za razvoj matematike kod nas, vrlo malo se zna. U vrijeme kada su oni živjeli, radilo se puno, pričalo se malo, a pisalo još manje i niko, baš niko, nije pričao sam o sebi, niti isticao svoje uspjehe i zasluge.

S obzirom na to da je Vera Popović Šnajder imala vrlo važnu ulogu u obrazovanju i usponu prvih matematičara, pa tako i akademika, najprije ću reći nešto o njoj. Rodila se u građanskoj porodici 4. februara 1904. godine, u Reljevu, nadomak Sarajeva, u porodici u kojoj je već postojala tradicija dobrog obrazovanja.

anu monografija FINAL PRINT.indd 10 6/16/2023 1:56:52 PM

Njen otac dr *Tomo Popović* bio je u to vrijeme profesor i rektor pravoslavne Bogoslovije, a majka *Milica Popović* (rođ. *Čajkanović*) rođena je u uglednoj beogradskoj porodici. Iako je u Beogradu završila Višu djevojačku školu s „odlikom" i „nagradom kraljice Drage", nakon udaje i dolaska u Bosnu, rađa troje djece i posvećuje se njihovom odgoju. Tako najstarija kćerka Vera postaje profesorica matematike, mlađa Nada doktorica, a sin Ljubinko sudija.

Neobičnost djevojčice Vere bila je uočena već od malena. U vrijeme, kada je djevojčicama bilo zabranjeno da se školuju, ona je pokazivala interes za knjige i školu. Tako se poslije osnovne škole ova nadarena djevojčica našla najprije kao „privatni", a zatim „javni" đak u klupama Sarajevske *Velike škole* (kasnije Prva gimnazija), zajedno s dječacima i samo ponekom djevojčicom.



Velika škola, danas Prva gimnazija u Sarajevu, otvorena 1879. u vrijeme Austrougarske monarhije



Kapetan Mišino zdanje u Beogradu, na kom je isprva bio lociran Filozofski fakultet

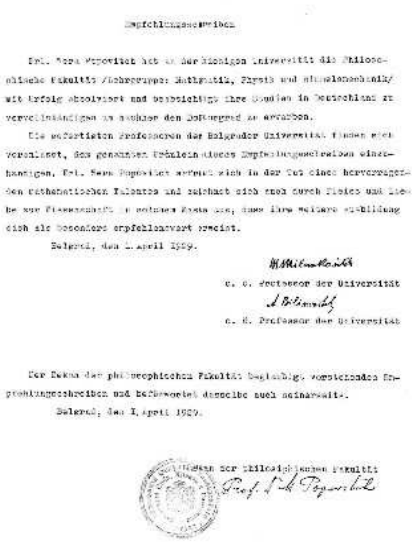
anu monografija FINAL PRINT.indd 11 6/16/2023 1:56:52 PM

Po završetku gimnazije, odlučuje se za težak put za djevojku onog vremena, da studira matematiku, iako je tada bilo neobično da djevojka uopšte želi da ima i gimnazijsko, a kamoli univerzitetsko obrazovanje. Odmah po završetku gimnazije, školske 1922/23. godine, *Vera Popović* se upisuje na studij matematike – grupa: matematika, fizika i nebeska mehanika, na Prirodno-matematičkom odseku Filozofskog fakulteta u Beogradu, koji je u to vrijeme bio smješten u Kapetan Mišinom zdanju, gdje je danas lociran rektorat Beogradskog univerziteta.

Po završetku studija, Vera se ne zaustavlja. Ona želi da i dalje uči i, u želji da što više nauči, poput rijetkih žena u ono vrijeme u svijetu nauke – *Sofije Kovaljevske* i *Marije Sklodowske-Curie*, koje su kasnije postale čuvene naučnice – i ona kreće u svijet. Nakon završetka studija i kratkog angažovanja na Prvoj gimnaziji u Sarajevu, dvoumeći se između *Göttingena* i *Pariza* – dvaju, u to vrijeme, najčuvenijih i najjačih matematičkih centara u Evropi i svijetu, iako je imala preporuku za Njemačku, potpisanu od dvojice velikana *Beogradske škole matematike*: *Milutina Milankovića* i *Antona Bilimoviča*, kao stipendista *Francuske vlade* odlazi u Pariz, na tek otvoreni Institut „Henri Poincaré“, na kojem provodi tri godine.



Vera Popović (*1904-1976*) *na Institutu “Henri Poincaré“, 1929-1931.*



Empfehlungsschreiben

Frl. Vera Popovitch hat an der hiesigen Universität die philosophische Fakultät (Fachgruppe: Mathematik, Physik und Himmelsmechanik) mit Erfolg absolviert und beabsichtigt ihre Studien in Deutschland zu vervollständigen an welchem den Doktorgrad zu erwerben.

Die unterfertigten Professoren der Belgrader Universität finden sich veranlasst, den genannten Schritt durch Empfehlungsschreiben hinzuhangen. Frl. Vera Popovitch verfügt sich in der Tat durch hervorragenden mathematischen Talenten und zeichnet sich noch durch Fleiss und Liebe zur Wissenschaft in seltenem Grade aus, dass ihre weitere Ausbildung dish als besonders empfehlenswert erweist.

Belgrad, den 1. April 1929.

M. Milankovitch
o. ö. Professor der Universität

A. Bilimovitch
o. ö. Professor der Universität

Der Dekan der philosophischen Fakultät bestätigt, vorstehenden Empfehlungsschreiben und Unterschriften derselbe auch anerkannt.

Belgrad, den 1. April 1929.

Dekan der philosophischen Fakultät
Prof. M. Popovitch

Preporuka koju su Veri Popović napisali M. Milanković i A. Bilimović za odlazak u Njemačku

anu monografija FINAL PRINT.indd 12 6/19/2023 8:24:35 AM

Tokom boravka u Parizu, u početku radi u Laboratoriju novoosnovanog Instituta „Henri Poincaré“ i učestvuje u radu naučnog seminara.

Posebno značajno je istaći da je u tom periodu Vera Popović u čuvenom *Kontrandiju* (*Comptes Randus*) – naučnom časopisu Francuske akademije nauka, objavila naučni rad *O proširenju metode Hele Shaw na ciklička kretanja* (1931).

Značaj tog rada je utoliko veći jer je to ujedno bio i prvi naučni rad u oblasti matematike, koji je objavio autor rođen u BiH – u tadašnjoj Austrougarskoj monarhiji [L: 14, 31].[1]



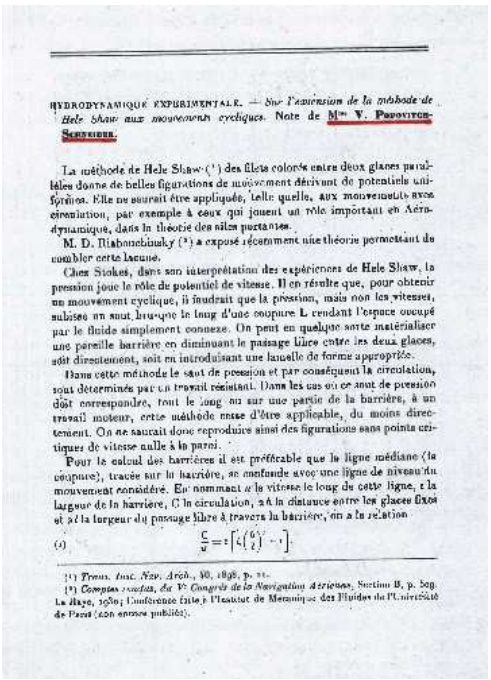
Vera Šnajder – jedina žena naučnica s kolegama ispred Instituta Henri Poincaré 1929. ili 1930. godine.



Institut Henri Poincaré ovako izgleda danas: osnovan je 1928, godine, na inicijativu E. Borela i G. Birkhoffa

1 L je oznaka za literaturu

anu monografija FINAL PRINT.indd 13 6/16/2023 1:56:52 PM



HYDRODYNAMIQUE EXPÉRIMENTALE. — *Sur l'extension de la méthode de Hele Shaw aux mouvements cycliques.* Note de Mme V. Popovitch-Schreiber.

La méthode de Hele Shaw (1) des filets colorés entre deux glaces parallèles donne de belles figurations de mouvement dérivant de potentiels uniformes. Elle ne saurait être appliquée, telle quelle, aux mouvements avec circulation, par exemple à ceux qui jouent un rôle important en Aérodynamique, dans la théorie des ailes portantes.

M. D. Riabouchinsky (2) a exposé récemment une théorie permettant de combler cette lacune.

Chez Stokes, dans son interprétation des expériences de Hele Shaw, la pression joue le rôle de potentiel de vitesse. Il en résulte que, pour obtenir un mouvement cyclique, il faudrait que la pression, mais non les vitesses, subisse un saut brusque le long d'une coupure L rendant l'espace occupé par le fluide simplement connexe. On peut en quelque sorte matérialiser une pareille barrière en diminuant le passage libre entre les deux glaces, soit directement, soit en introduisant une lamelle de forme appropriée.

Dans cette méthode le saut de pression et par conséquent la circulation, sont déterminés par un travail résistant. Dans les cas où ce saut de pression doit correspondre, tout le long ou sur une partie de la barrière, à un travail moteur, cette méthode cesse d'être applicable, du moins directement. On ne saurait donc reproduire ainsi des figurations sans points critiques de vitesse nulle à la paroi.

Pour le calcul des barrières il est préférable que la ligne médiane (la coupure), tracée sur la barrière, se confonde avec une ligne de niveau du mouvement considéré. En nommant u la vitesse le long de cette ligne, ε la largeur de la barrière, C la circulation, 2δ la distance entre les glaces fixes et 2ℓ la largeur du passage libre à travers la barrière, on a la relation

$$\frac{C}{u} = \varepsilon\left[\zeta\left(\frac{\delta}{\ell}\right) + 1\right]. \qquad (1)$$

(1) *Trans. Inst. Nav. Arch.*, 40, 1898, p. 21.

(2) *Comptes rendus, du Ve Congrès de la Navigation Aérienne*, Section B, p. 309. La Haye, 1926; Conférence faite à l'Institut de Mécanique des Fluides de l'Université de Paris (non encore publiée).



(3)

Cette formule correspond au cas où l'on utilise une lamelle équidistante des deux glaces. Si l'on ne laisse qu'un seul passage étroit, pratiqué au milieu de la barrière, le coefficient 4 dans la formule (1) doit être remplacé par l'unité. En première approximation, l'unité figurant entre les crochets peut être omise, le rapport $\frac{\delta}{\ell}$ étant toujours plus grand que l'unité.

On suppose dans la formule (1) que, en tous les points de L la longueur ε de la barrière est suffisamment petite pour que les termes du développement de u en ε, non nuls identiquement, puissent être négligés sauf le premier. Il faut tenir compte de cette restriction dans les applications de la formule (1).

J'ai calculé la forme des barrières correspondant au cas d'un cercle en choisissant la circulation de façon à obtenir un déplacement a des points de vitesse nulle égale à 20°, 30°, 45° au cas d'un arc de cercle dont la corde est parallèle au fond et forme un angle de 10° avec la direction du courant; enfin au cas d'un profil d'aile sustentatrice. Les photographies correspondant à cette dernière et au cas d'un cylindre de révolution ($\alpha = 30°$) sont reproduites dans cette Note. A titre de comparaison, les photographies obtenues avec ces mêmes modèles, mais dépourvus de barrière, sont également reproduites.

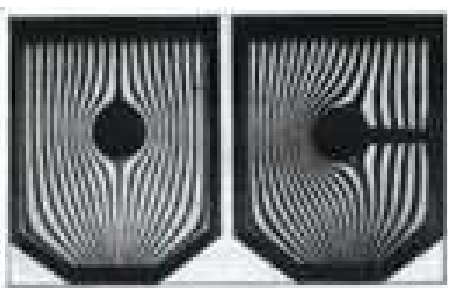
J'ai obtenu ces figurations en plaçant les modèles entre les deux glaces d'un petit appareil Hele Shaw, modifié par Pahl (1). Le rapport $\frac{2\delta}{2\ell}$ était égal à $\frac{7,2}{9,7} = 1,34$.

Bien que les faibles dimensions de l'appareil utilisé aient laissé subsister sensiblement l'intersection des parois, les résultats obtenus semblent néanmoins autoriser à dire que la théorie et l'expérience sont en bon accord.

(1) *Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht*, 11, 1925, p. 129.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 192, p. 1703, séance du 9 juin 1931.)

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
Quai des Grands-Augustins, 55.





Rad Vere Popović: Sur l'existension de la methode de Hele Shaw aux mouvemnts cycliques, C. R. de l'Académie des Sciences, Paris, T. 192 (1931), pp. 1703-1705.

Iako joj je nuđen angažman u Ministarstvu vazduhoplovstva Francuske, ona radije prihvata ponudu za rad, u svojstvu honorarnog saradnika, u Laboratoriju za hidrodinamiku na Sorboni (*Sorbonne, Université Paris* IV), gdje ostaje do septembra 1931.

Za razliku od *Marije Sklodowske* (– *Curie*) koja je svog Pierra našla u Parizu i ostala u Francuskoj, po *Veru Popović* (– *Šnajder*) je njen *Marcel* došao u Pariz. Tako se u Parizu udala za dr *Marcela Šnajdera*, kolegu iz Sarajeva, najmlađeg doktora Zagrebačkog sveučilišta, koji je bio ne samo izuzetno obrazovan i briljantan profesor (filozofije i matematike) nego i harizmatična ličnost. Bio je zaslužan da se u Sarajevu pojavio *Kantov Vječni mir*.

anu monografija FINAL PRINT.indd 14 6/16/2023 1:56:53 PM

Sreća u porodici Šnajder nije trajala dugo. Tamni oblaci fašizma nadvijali su se nad Evropom, tako da su se na udaru našle obje porodice i *Popović* i *Šnajder*. Ustaše odvode Marcela, kao Jevreja i ljevičara u zatvor, odakle je transportovan u ustaški logor na Pagu, gdje je posljednji put viđen, a Veru s majkom i malenom kćerkicom izbacuju iz stana. Poslije toga Marcelu se gubi svaki trag i to za sva vremena. Tako je ideja *Kantovog Vječnog mira*, u koju je Marcel Šnajder toliko vjerovao i zagovarao je, kod nas ostala samo mrtvo slovo na papiru.

Ni loše zdravstveno stanje, ni duboka lična tragedija, ni brojne obaveze i briga o malenoj kćerkici Milici i majci, nisu spriječili Veru Šnajder da se poslije herojskih i tragičnih zbivanja u našoj zemlji i pobjede nad fašizmom, u kojim je i sama bila aktivan sudionik, uključi s puno entuzijazma u borbu za obrazovanje i pravedniji i bolji život. Ona poslije oslobođenja stavlja sve svoje fizičke i umne sposobnosti u službu ratom porušene domovine. U junu 1945. godine je postavljena za direktoricu Druge ženske gimnazije; u martu 1946. postaje jedan od prvih profesora matematike na Višoj pedagoškoj školi u Sarajevu, a u novembru 1947. godine je postavljena za savjetnicu u Ministarstvu prosvjete, gdje je radila na obnavljanju rada školâ i rješavanju kadrovskih problema. U junu 1948. godine vratila se na Višu pedagošku školu.

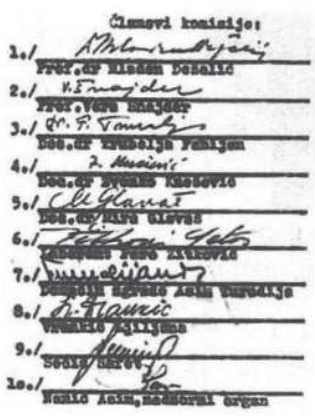


Ipak najznačajniju ulogu imala je 1950. godine, kada je učestvovala u podizanju Univerziteta i osnivanju Filozofskog fakulteta u Sarajevu, a naročito u stvaranju i organizovanju njegove Katedre za matematiku. U martu 1950. godine, potvrđen je njen izbor u zvanje vanrednog profesora, a školske 1950/51. zajedno s docentima *Mahmutom Bajraktarevićem* i *Šefkijom Raljevićem* prvi put organizuje studij matematike u BiH. Školske 1951/52. godine izabrana je za dekana Filozofskog fakulteta i tako ušla u istoriju kao prva žena dekan, i to ne samo u BiH nego i u cijeloj Jugoslaviji.

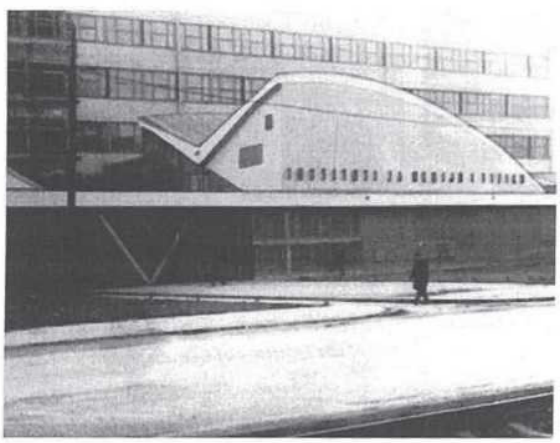
Kao što smo već rekli, bilo je to vrijeme kada su osnivani prvi fakulteti u Sarajevu, kada su udarani temelji Sarajevskom univerzitetu.

Dugi niz godina profesorica Vera Šnajder ostaje na čelu Katedre za matematiku. Bio je to period borbe za formiranje Prirodno-matematičkog fakulteta, u prvom redu vezane za obezbjeđenje fakultetskog prostora. U tome je prof. Šnajder

anu monografija FINAL PRINT.indd 15 6/16/2023 1:56:53 PM



Potpisi članova Komisije za prijem zgrade Instituta na kojem je potpis Vere Šnajder pod brojem 2



Instituti za fiziku i hemiju, a zapravo Prirodno-matematički fakultet s odsjecima za fiziku, hemiju i matematiku

također odigrala značajnu ulogu, o čemu svjedoči njen potpis o primopredaji novosagrađene zgrade Instituta u koju se, pored fizike i hemije, uselila i matematika.

Tako 1960. godine Katedra za matematiku Prirodno-matematičkog odsjeka Filozofskog fakulteta prerasta u Odsjek za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta, u koji je Vera Šnajder ugradila veliki dio svog truda i rada.

Povezujući Odsjek za matematiku s naučnim krugovima u zemlji i inostranstvu i šaljući mlađe kolege na školovanje u inostranstvo, Vera Šnajder je doprinijela razvoju naučnog podmlatka iz matematike na Odsjeku za matematiku i na Univerzitetu. O školovanju mladih u matematičkoj nauci, u to vrijeme, nije niko brinuo tako nesebično kao što je ona. Može se reći da je bila spiritus movens bosansko-hercegovačke matematike i da je snažno doprinijela njenom razvitku.

Neprocjenjiv doprinos razvoju matematike Vera Šnajder dala je šaljući svoje kolege na čuvene univerzitete: *Fikreta Vajzovića* na *Moskovski državni univerzitet* (MGU), poznat kao Lomonosov, *Veselina Perića* u čuvenu *školu algebre Emmy Nöther*, u Göttingen, dok je *Mahmut Bajraktarević*, također njenom zaslugom, otišao na *parišku Sorbonu*, gdje je trebalo da se sama vrati da završi svoj davno započeti doktorat.

Tako su matematičari iz Sarajeva, zahvaljujući prof. Veri Šnajder, otišli da stiču znanje na najznačajnijim evropskim univerzitetima, a Sarajevo je polako, ali sigurno počelo da hvata korak s drugim jugoslovenskim centrima u kojim se matematika počela razvijati puno ranije.

Iako je Veru Šnajder zlokobna sudbina spriječila da postigne uspjeh Marie Curie, u naučnom smislu, ja ću je nazvati našom *Marijom Curie*, s obzirom na to da je dala ogroman doprinos razvoju matematike kod nas i ušla u istoriju, ne samo

anu monografija FINAL PRINT.indd 16 6/16/2023 1:56:53 PM

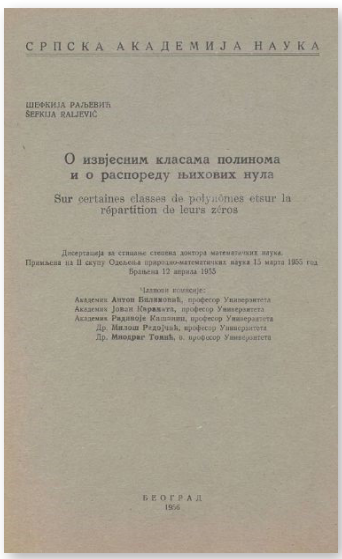


Prof. Šefkija Raljević
Mostar 1909 – Sarajevo 1975.

kao *prva žena s diplomom profesora matematike u BiH* nego i kao žena koja je nošena željom za znanjem otišla u daleki Pariz – prestolnicu nauke, gdje je *objavila svoj prvi naučni rad iz matematike, koji je ujedno bio i prvi naučni rad koji je objavio autor rođen na prostorima BiH* (1931) [L: 14, 31]. Osim toga, *izborom za dekana Filozofskog fakulteta u Sarajevu* (1951/52) *ušla je u istoriju kao prva žena dekan u BiH, ali i kao prva dekanica u Jugoslaviji*. Time je njeno ime velikim slovima ugrađeno u istoriju bosanskohercegovačke matematike i nauke uopšte.

Tamo gdje je stala Vera Šnajder, produžio je njen nešto mlađi kolega *Šefkija Raljević*, vršnjak i kolega sa studija u Beogradu Mahmuta Bajraktarevića, profesora čiji sam takođe bila asistent na *Geometriji Lobačevskog* i *Geometrijskim preslikavanjima*. Njega na doktorat nije slala prof. Vera Šnajder u inostranstvo. Doktorirao je u Beogradu, na Srpskoj akademiji nauka (SAN, 1955) kod svog profesora sa studija, čuvenog *Jovana Karamate*, koji je u to vrijeme bio „najjači“ matematičar na prostorima bivše Jugoslavije i ne samo sljedbenik poznate *Beogradske škole matematike* nego, moglo bi se reći, i jedan od nasljednika Mihaila Petrovića Alasa, njenog utemeljitelja.

Zanimljivo je spomenuti da je Šefkija Raljević u svom radu *Sur une droite et sur un segment caractéristique dans les polygones des zéros des polynômes*, objavljenom u Zborniku radova Matematičkog instituta SAN (1953, 35 (3), 89-94), pokazao da je jedna teorema čuvenog *M. Mardena* nekorektna u svom iskazu. Da nisu vodili brigu oko organizacionih pitanja i problema Fakulteta, uvjerena sam da bi i Vera Šnajder i Šefkija Raljević, čija je misao bila izbrušena blistavom inteligencijom, kao i njihov kolega Mahmut Bajraktarević, postali akademici.



СРПСКА АКАДЕМИЈА НАУКА

ШЕФКИЈА РАЉЕВИЋ
ŠEFKIJA RALJEVIĆ

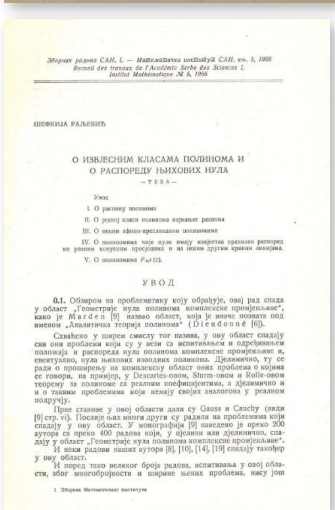
О извјесним класама полинома
и о распореду њихових нула

Sur certaines classes de polynômes etsur la répartition de leurs zéros

Дисертација за стицање степена доктора математичких наука.
Примљена на II скупу Одељења природно-математичких наука 15 марта 1955 год
Брањена 12 априла 1955

Чланови комисије:
Академик Антон Билимовић, професор Универзитета
Академик Јован Карамата, професор Универзитета
Академик Радивоје Кашанин, професор Универзитета
Др. Милош Радојчић, професор Универзитета
Др. Мнодраг Томић, о. професор Универзитета

БЕОГРАД
1956



Зборник радова САН, L — Математички институт САН, кн. 5, 1956
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences L
Institut Mathématique № 5, 1956

ШЕФКИЈА РАЉЕВИЋ

О ИЗВЈЕСНИМ КЛАСАМА ПОЛИНОМА И
О РАСПОРЕДУ ЊИХОВИХ НУЛА
— ТЕЗА —

Увод

I. О распону полинома

II. О једној класи полинома нарочитог распона

III. О неким афино-преслишавим полиномима

IV. О полиномима чије нуле имају извјестан правилан распоред на разним конусним пресјецима и на неким другим кривим линијама.

V. О полиномима $P_n(z)$.

УВОД

0.1. Обзиром на проблематику коју обрађује, овај рад спада у област „Геометрије нула полинома комплексне промјенљиве“, како је Marden [9] назвао област, која је иначе позната под именом „Аналитичка теорија полинома“ (Dieudonné [6]).

Схваћено у ширем смислу тог назива, у ову област спадају сви они проблеми који су у вези са испитивањем и одређивањем положаја и распореда нула полинома комплексне промјенљиве и, евентуално, нула њихових изводних полинома. Дјелимично, ту се ради о проширењу на комплексну област оних проблема о којима се говори, на примјер, у Descartes-овом, Sturm-овом и Rolle-овом теорему за полиноме са реалним коефицијентима, а дјелимично и и о таквим проблемима који немају својих аналогона у реалном подручју.

Прве станове у овој области дали су Gauss и Cauchy (види [9] стр. vi). Послије њих многи други су радили на проблемима који спадају у ову област. У монографији [9] наведено је преко 200 аутора са преко 400 радова који, у цјелини или дјелимично, спадају у област „Геометрије нула полинома комплексне промјенљиве“.

И неки радови наших аутора [8], [10], [14], [19] спадају такођер у ову област.

И поред тако великог броја радова, испитивања у овој области, због многобројности и ширине њених проблема, нису још

1 Зборник Математичког института

Doktorska disertacija (separat)
Šefkije Raljevića, SAN Beograd, 1955,
mentor akademik Jovan Karamata

anu monografija FINAL PRINT.indd 17 6/16/2023 1:56:53 PM



Mahmut Bajraktarević, Vera Šnajder i Šefkija Raljević sa studentima, u vrijeme kada je Katedra za matematiku bila locirana na Baščaršiji.

I na kraju, ma šta rekli o Veri Šnajder, nećemo pretjerati. Šta sve ta žena nije radila ? Bila je velika učiteljica, pokretač i organizator studija za matematiku, borac da taj studij bude što bolji, organizator i jedan od osnivača Prirodno-matematičkog fakulteta. Možemo slobodno reći da je Vera Šnajder, svojim radom i doprinosom, obilježila cijelu jednu epohu.

Kao čovjek i nastavnik bila je veoma stroga prema drugima, ali isto tako i prema sebi. Tražila je znanje, nije voljela površnost i neznanje, niti je imala razumijevanja za nerad i izbjegavanje obaveza. Ne bi se, međutim, moglo reći da je naročito bila sklona pedagogiji i metodici nastave matematike. Njeno čvrsto uvjerenje bilo je da nastavnik matematike prije svega mora biti dobar matematičar.

Ne znam koliko je mogla biti sretna, ali je sigurno da su je poslije tragičnog gubitka supruga, pored kćerke Milice, činili sretnom samo matematika, Odsjek za matematiku, njene kolege i izuzetni studenti, čijim se uspjesima neizmjerno radovala i o kojima se nježno brinula.

Iako se rijetko smiješila, i sada pamtim njen smiješak kada mi je, nakon ispita, upisivala u indeks ocjenu deset, koju je, inače, vrlo rijetko davala.

Jednom me je povela u biblioteku da kaže bibliotekarki da mi dâ *Van der Waerdenovu* knjigu *Moderna algebra*, koja je smatrana prvorazrednim udžbe-

anu monografija FINAL PRINT.indd 18 6/16/2023 1:56:53 PM

nikom koji bi svaki budući algebrista trebalo da proučava. Ta izuzetna knjiga, koju je *Van der Waerden* napisao prema bilješkama sa predavanja svojih čuvenih učitelja *Emmy Nöther* i *Emila Artina*, odisala je *Nötherinom originalnošću* i *Artinovom jasnoćom* kojima je on kao autor dodao svoj izuzetan dar za sintezu.

Vera Šnajder, opčinjena matematikom od malena, u zanosu bi nam na predavanju, govorila: „Djeco, racionalna mehanika nije fizika, to je, djeco, primjenjena matematika."

Za nju je matematika bila sve: i „knjiga prirode je bila ispisana jezikom matematike" (G. Galilej), a i „pojedine naučne discipline su dosezale onoliki stepen naučnosti kolika je bila njihova potreba za jezikom matematike" (I. Kant).

Uvijek ću se sjećati našeg posljednjeg susreta u bolnici, kada mi je nakon moje posjete – za vrijeme mog dolaska za novogodišnje praznike iz Moskve, gdje sam bila na studijskom boravku – opraštajući se od mene, dugo mahala, šaljući mi poljupce. Iako teško bolesna, odbijala je dijalizu koja joj je jedina mogla produžiti život, ali i patnju. Time je, naravno, ubrzala svoj odlazak.

Napustila nas je jednog zimskog februarskog dana, ubrzo poslije moje posjete, tiho i bez vapaja. Zakoračila je u vječnost da se pridruži svom dragom Marcelu.

Ovu knjigu završavam s ljubavlju i s velikim poštovanjem prema mojim dragim profesorima i učiteljima. Bila je velika privilegija i čast biti studentom velikih ljudi i izuzetnih naučnika, koji su ne samo bili prvi matematičari nego i prvi akademici, koji su nas, svoje studente, s velikom ljubavlju uveli u očaravajući svijet matematike. Kao što sam ja ponosna na to što sam bila učenica takvih velikana, uvjerena sam da bi i oni bili ponosni što sam ja, kao prva žena, izabrana u *Odjeljenje prirodnih i matematičkih nauka Akademije nauka i umjetnosti Bosne i Hercegovine* i što sam produžila njihovim putem – tamo gdje su oni stali.

Mirjana Vuković

anu monografija FINAL PRINT.indd 19 6/16/2023 1:56:53 PM

anu monografija FINAL PRINT.indd 20 6/16/2023 1:56:53 PM

O ŽIVOTU I RADU MATEMATIČARA – AKADEMIKA

anu monografija FINAL PRINT.indd 21 6/16/2023 1:56:53 PM

anu monografija FINAL PRINT.indd 22 6/16/2023 1:56:53 PM



Mahmut Bajraktarević

(*Sarajevo 1909 – Bugojono 1985*)

Mahmut Bajraktarević je bio ne samo prvi doktor matematičkih nauka iz BiH, nego je doktorat stekao na čuvenoj pariškoj Sorboni. Naučnim istraživanjima, kojima se bavio u svojim radovima, udario je temelj matematičkoj analizi u BiH. Bio je jedan od malobrojnih matematičara s kojim je počeo razvoj matematičkih nauka kod nas, a po rezultatima koje je postigao, bez sumnje, i jedan od najistaknutijih matematičara u Bosni i Hercegovini kojem je pripadalo veoma istaknuto mjesto i u jugoslovenskoj matematici.

Međutim, što se tiče njegove biografije, koja predstavlja obaveznu sadržinu svakog životopisa, postoje samo nepotpuni i oskudni podaci, nedovoljni da rasvijetle značajnu ličnost kakva je bio akademik Mahmut Bajraktarević. Kao da je smatrao da su za njegovu biografiju dovoljne samo bibliografske jedinice njegovih naučnih radova.

Da bih upotpunila podatke, do kojih sam došla sama, najprije kao studentica, pa dugogodišnja bliska saradnica – asistentica i kolegica prof. Bajraktarevića koja ga je naslijedila na predmetu Kompleksna analiza, a zatim iščitavanjem njegovih referata i dosijea, kako fakultetskih, tako i onih iz Akademije nauka i umjetnosti Bosne i Hercegovine, za pomoć sam se obratila njegovoj kćerki prof. dr *Haši Bajraktarević-Dobran* i tako saznala ono što se u njegovoj službeno zabilježenoj biografiji ne navodi.

Mahmut Bajraktarević je potomak dviju starih sarajevskih porodica: sin *Muhameda – Muharema Bajraktarevića*, koji je nestao u Prvom svjetskom ratu, i

2010 Mathematics Subject Classification: 01A70, 01A65, 26-XX; 39-XX, 40-XX, 45-XX
Key words and phrases: Biographies, Bibliographies, Aproximations and series expansion, Sequences, series and summability, (General) theory of functional equations and inequalities, Iteration theory, Integro-partial differential equations

anu monografija FINAL PRINT.indd 23 6/16/2023 1:56:53 PM



Svršetak šk. 1926/27. godine. Realno odjeljenje IIa razreda, M.Bajraktarević sjedi, 3. zdesna, Sarajevo, 1927.

Haše Bajraktarević, rođene *Porča*. Rođen je 22. decembra 1909. godine u Sarajevu, u kojem je proveo cijeli svoj život, i to u porodičnoj kući u starom dijelu grada. Preminuo je iznenada, 13. aprila 1985. godine u Bugojnu, gdje je boravio kao počasni gost organizatora XXVII takmičenja mladih matematičara – učenika srednjih škola Bosne i Hercegovine.

Njegova majka Haša, udovica, uložila je puno truda da njena preostala dva sina (stariji sin i kćerka su rano umrli) steknu odgovarajuće i što je moguće bolje obrazovanje. Tako se Mahmut, nakon završene osnovne škole, upisao na Prvu mušku gimnaziju, na kojoj je maturirao 1929. godine.

Iste godine se, zahvaljujući opštinskoj stipendiji, upisao na studij matematike na Filozofskom fakultetu u Beogradu, i to izabravši prvu grupu predmeta: matematika, racionalna mehanika s teorijskom fizikom i eksperimentalna fizika. Predavali su mu eminentni stari profesori, kao što su Mihailo Petrović Alas, Milutin Milanković, Anton Bilimovič, kao i mlađi matematičari Tadija Pejović, Miloš Radojčić i fizičar Vjačeslav Žardecki. Dio svoje stipendije i novca koji je zarađivao na instrukcijama slao je svojoj majci i bratu, da bi im pomogao. Diplomirao je 1933. godine.

Nakon povratka u Sarajevo, Mahmut Bajraktarević započinje profesionalnu karijeru radeći, od 1934. do kraja Drugog svjetskog rata, najprije kao suplent, a zatim profesor matematike u Šerijatskoj sudačkoj gimnaziji, da bi potom prešao na Prvu mušku gimnaziju u Sarajevu.

anu monografija FINAL PRINT.indd 24 6/16/2023 1:56:53 PM



Šerijatska sudačka gimnazija, rad arhitekte Karla Paržika (*1887*)

Nakon smrti majke Haše, 1941. godine, Mahmut Bajraktarević se ženi školovanom Mostarkom *Biserom Konjhodžić*. Iako je završila Trgovačku akademiju u Sarajevu, ona nakon udaje prestaje da radi i posvećuje cijeli život svojoj porodici – suprugu Mahmutu i djeci: kćerki *Haši* i sinu *Nedžadu*. Slobodno se može reći da je taj brak bio vrlo uspješan i sretan, budući da su se vrlo dobro slagali i u svakom pogledu nadopunjavali. Njemu, staloženijem i mirnije naravi, temperamentna Hercegovka bila je uvijek podrška, kako u njegovom radu, tako i u napredovanju u struci.

Poslije rata, Mahmut Bajraktarević je još neko vrijeme radio kao profesor matematike na Šerijatskoj gimnaziji u Sarajevu, a zatim jedno vrijeme u Drugoj, pa u Prvoj muškoj gimnaziji, odakle je prešao na Višu pedagošku školu u Sarajevu. Od aprila 1950. godine do kraja 1960. godine radio je, zajedno s nešto starijom kolegicom *Verom Šnajder* i kolegom sa studija *Šefkijom Raljevićem*, s kojima je godinama predstavljao neraskidiv tandem, na novoosnovanom Prirodno-matematičkom odsjeku Filozofskog fakulteta u Sarajevu. Tako je M. Bajraktarević, zajedno s njima dvoma, postao jedan od prvih nastavnika matematike tek osnovanog Prirodno-matematičkog odsjeka Filozofskog fakulteta.

Po dolasku na Filozofski fakultet, M. Bajraktarević je najprije izabran za predavača, pa docenta, a zatim i za vanrednog profesora. Ubrzo ga je Vera Šnajder, koja je tada bila dekanica Fakulteta, poslala na doktorat, na čuvenu parišku Sorbonu. Dugo se lomila i razmišljala može li ikome povjeriti brigu o malenoj kćerkici Milici i staroj majci, s obzirom da je bila samohrana majka, i sama otići na Sorbonu, gdje je prije rata kao stipendista Francuske vlade provela tri godine i počela da radi na svom doktoratu. Na kraju je nesebično odlučila da pošalje kolegu Bajraktarevića u Pariz, da on produži tamo gdje je ona stala.

anu monografija FINAL PRINT.indd 25 6/16/2023 1:56:53 PM

Tako se Mahmut Bajraktarević obreo na jednom od najpoznatijih univerziteta, pariškoj Sorboni (*Sorbonne*), na kojoj je stekao doktorat 1953. godine, odbranivši doktorsku disertaciju *O nekim iterativnim nizovima* (*Sur certaines suites itérées*), koja je objavljena u tri dijela *Sur certaines suites itérées* I, II i III, u čuvenom Kontrandiju (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences) [6-8]. Mentor mu je bio poznati francuski matematičar *Žan Favar* (*Jean Favard*). Mahmut Bajraktarević je tako postao, ne samo prvi doktor matematičkih nauka iz BiH, nego i prvi doktor matematičkih nauka, rođen za vrijeme Austrougarske monarhije. [L: 14, 38, 46, 48]



M. Bajraktarević 2. slijeva s komisijom poslije odbrane doktorata, Notre-Dame de Paris, 1953.

Université Paris Sorbonne, Paris IV, osnovan 1896.

Ubrzo po povratku iz Pariza, 60-ih kada se dotadašnji Prirodno-matematički odsjek Filozofskog fakulteta izdvojio u zaseban Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Sarajevu, Mahmut Bajraktarević je na novoosnovanom fakultetu izabran i u zvanje redovnog profesora.

Mahmut Bajraktarević je bio ne samo jedan od prvih nastavnika i osnivača Odsjeka za matematiku na novoosnovanom Prirodno-matematičkom fakultetu nego i ključni profesor za matematičku analizu koji je dugi niz godina dijelio sav teret nastave sa još par kolega, članova Odsjeka za matematiku: Verom Šnajder i Šefkijom Raljevićem. Istovremeno je ulagao ogroman trud i energiju na odgajanje brojnih generacija matematičara i fizičara, koji ga se i danas sjećaju s ljubavlju i dubokim poštovanjem.

Za člana Naučnog društva NR BiH izabran je 1961. godine. Prerastanjem Naučnog društva u Akademiju nauka i umjetnosti BiH, 1966. godine, prelazi u

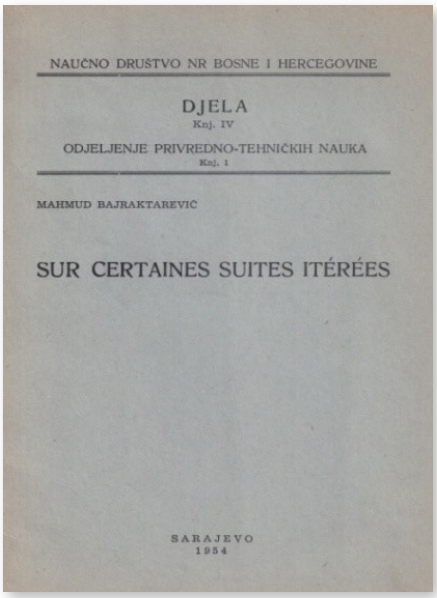
anu monografija FINAL PRINT.indd 26 6/16/2023 1:56:53 PM

njen sastav, najprije kao njen dopisni član, da bi u oktobru 1967. godine bio izabran za redovnog člana Akademije nauka i umjetnosti Bosne i Hercegovine.

Akademik Mahmut Bajraktarević je objavio šezdesetak naučnih radova. Njegovi naučni radovi pobuđivali su zapažen interes, kako domaćih, tako i stranih matematičara. Mnogi od njegovih radova su, već za njegova života, pored vrlo povoljnih ocjena u međunarodnim referativnim časopisima, uključeni i u nekoliko svjetskih monografija, kao što su:

- J. Aczel, *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen*, Basel – Stuttgart – Berlin, 1961 – navedeno 6 radova;
- M. Kuczma, *A survey of the theory of functional equations*, Publikacije Elektrotehničkog fakulteta, Beograd, No. 130 (1964) – navedeno 11 radova;
- M. Kuczma, *Functional equations in a single variable*, Polska akademia nauk, Monografie matematyczne, T. 45, Warszawa (1968) – naveden 21 rad;
- K. Zeller, W. Beckmann, *Theorie der Limitierungsverfahren*, Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzegebiete, Springer Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, Band 15 (1970);
- *Itogi nauki i tehniki, Matematičeskij analiz*, T.12, AN SSSR, Moskva, 1974 – navedena 2 rada.

Naučni interes akademika Bajraktarevića bio je usmjeren uglavnom ka dvjema, u to vrijeme, važnim oblastima matematičke analize: *teoriji funkcionalnih jednačina*, naročito onim koje su u vezi s određenim sredinama, a zatim i *teoriji nizova i sumabilnosti* u kojoj je posebno proučavao, kako sumabilnost iterativnih nizova, pomoću uopštenih sredina, tako i brzinu njihove konvergencije.


NAUČNO DRUŠTVO NR BOSNE I HERCEGOVINE

DJELA

Knj. IV

ODJELJENJE PRIVREDNO-TEHNIČKIH NAUKA

Knj. 1

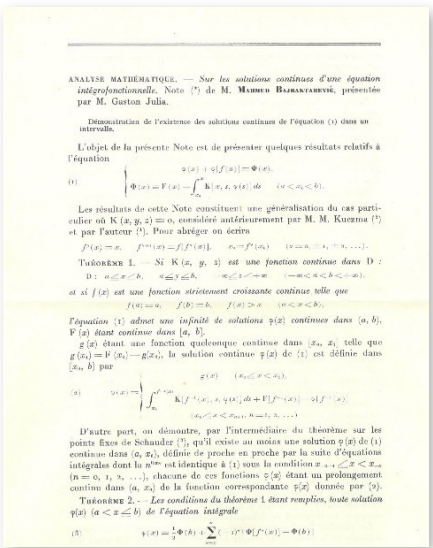
MAHMUD BAJRAKTAREVIĆ

SUR CERTAINES SUITES ITÉRÉES

SARAJEVO

1954

Rad M. Bajraktarevića – prvi naučni rad iz matematike publikovan u BiH (1954)


ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les solutions continues d'une équation intégrofonctionnelle.* Note (*) de M. Mahmud Bajraktarević, présentée par M. Gaston Julia.

Démonstration de l'existence des solutions continues de l'équation (1) dans un intervalle.

L'objet de la présente Note est de présenter quelques résultats relatifs à l'équation

$$\varphi(x) + \varphi[f(x)] = \Phi(x), \qquad (1)$$

$$\Phi(x) = F(x) - \int_{x_0}^{x} \mathbf{k}[x, t, \varphi(t)]\, dt \qquad (a \leq x_0 < b).$$

Les résultats de cette Note constituent une généralisation du cas particulier où $K(x, y, z) \equiv o$, considéré antérieurement par M. M. Kuczma (*) et par l'auteur (*). Pour abréger on écrira

$$f^{\circ}(x) = x, \qquad f^{n+1}(x) = f[f^{n}(x)], \qquad x_n = f^{n}(x_0) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

THÉORÈME 1. — *Si $K(x, y, z)$ est une fonction continue dans D :*

$$D : a \leq x < b, \qquad a \leq y \leq b, \qquad -\infty \leq z \leq +\infty \qquad (-\infty < a < b < +\infty),$$

et si $f(x)$ est une fonction strictement croissante continue telle que

$$f(a) = a, \qquad f(b) = b, \qquad f(x) > x \qquad (a < x < b),$$

l'équation (1) admet une infinité de solutions $\varphi(x)$ continues dans $[a, b]$, $F(x)$ étant continue dans $[a, b]$.

$g(x)$ étant une fonction quelconque continue dans $[x_0, x_1]$ telle que $g(x_0) = F(x_0) - g(x_0)$, la solution continue $\varphi(x)$ de (1) est définie dans $[x_0, b]$ par

$$\varphi(x) = \begin{cases} g(x) & (x_0 \leq x < x_1), \\ \int_{x_0}^{f^{-1}(x)} \mathbf{k}[f^{-1}(x), t, \varphi(t)]\, dt + F[f^{-1}(x)] - \varphi[f^{-1}(x)] & \\ \qquad (x_n \leq x < x_{n+1};\ n = 1, 2, \ldots). & \end{cases} \qquad (2)$$

D'autre part, on démontre, par l'intermédiaire du théorème sur les points fixes de Schauder (*), qu'il existe au moins une solution $\varphi(x)$ de (1) continue dans (a, x_1), définie de proche en proche par la suite d'équations intégrales dont la $n^{\text{ième}}$ est identique à (1) sous la condition $x_{n-1} \leq x < x_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, chacune de ces fonctions $\varphi(x)$ étant un prolongement continu dans (a, x_n) de la fonction correspondante $\varphi(x)$ donnée par (2).

THÉORÈME 2. — *Les conditions du théorème 1 étant remplies, toute solution $\varphi(x)$ $(a < x \leq b)$ de l'équation intégrale*

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\Phi(b) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \Phi[f^{n}(x)] - \Phi(b) \qquad (3)$$

M. Bajraktarević, C.R. l'Académie des Sciences, T. 254, p. 605-607, 1962. Rad predstavio Gaston Juliat

anu monografija FINAL PRINT.indd 27 6/16/2023 1:56:54 PM

Među prvim radovima akademika M. Bajraktarevića bilo je nekoliko radova koji su se odnosili na nizove dobijene iteracijama [1, 5-8, 10, 13, 16], a bilo je i onih koji su se nastavljali jedan na drugi. U tim radovima je najprije ispitivao konvergenciju određenih iterativnih nizova, a zatim granične funkcije tih nizova dovodio u vezu s rješenjima odgovarajućih funkcionalnih jednačina, odnosno sistema funkcionalnih jednačina, kao što su *Schröderova*, odnosno *Abelova jednačina*. Rezultati M. Bajraktarevića dobijeni na ovaj način, predstavljali su modifikacije, odnosno poboljšanja rezultata nekih drugih autora, kao što su: Morgan, Ward, Fuller, Korkin i Bennet.

Ovoj problematici je, kao što smo već spomenuli, bila posvećena i doktorska disertcija M. Bajraktarevića [10]. U radu [1], on ispituje konvergenciju niza (x_n), zadanog pomoću neprekidne i, specijalno, neprekidne opadajuće funkcije f, zadane sa $x_{n+1} = f(x_n)$.

Zatim u radu [5] prelazi na znatno složeniji niz (x_n), definisan sa:

$$x_n(z) = \varepsilon_0 f(\varepsilon_1 f(\ldots(\varepsilon_n f(0)))), \quad \text{gdje je} \quad \varepsilon_n = (1 - 2d_n)/(1 - 2d_{n-1}),$$

a d_n cifre broja $z \in [0, 2]$, prikazanog u sistemu s bazom 2, za koji najprije utvrđuje neke opšte osobine, a zatim dokazuje nekoliko teorema o konvergenciji posvećujući pritom posebnu pažnju slučaju kada je granična funkcija tog niza neprekidna. Dobijene rezultate je, kao i obično, ilustrovao odgovarajućim primjerima od kojih prvi predstavlja generalizaciju ranije posmatranog niza, u slučaju kada je $f(x) = \sqrt{2 + x}$.

Ova ispitivanja je nastavio uopštavanjem posmatranog niza tako što je zamijenio broj nulâ sa t i tako dobio niz funkcija $x_n(z, t)$, za koji je zatim, pored ostalog, odredio potrebne i dovoljne uslove pod kojim će njegova granična funkcija biti neprekidna u odnosu na z. Dalje funkciju f dovodi u vezu s rješenjima funkcionalne jednačine:

$$f(g(2z)) = g(z) \ (0 \le z \le 2)$$

koja, pod određenim uslovima, predstavlja jedan oblik *Schröderove*, odnosno *Abelove jednačine* [6]. Zatim nalazi potrebne i dovoljne uslove za konvergenciju prethodnog niza, modifikujući pritom neke rezultate Morgana, Warda i Fullera, koji se odnose na neprekidne iteracije [7]. Rezultate iz radova [6] i [7] je poopštavao u radu [8], tako što je ispitivao jedno rješenje sistema funkcionalnih jednačina:

$$f_n(g_{n+1}(2z)) = g_n(z),$$

koje je dobijeno iteracijom.

Nastavljajući rad na ovoj problematici [10], M. Bajraktarević, pomoću strogo rastuće neprekidne funkcije $F(x)$, uvodi neprekidnu iteraciju $F_y(x)$, koja je opštija od Morganove i Fullerove i određuje potrebne i dovoljne uslove da bi funkcija $F_y(x)$ bila neprekidna funkcija od x [13].

anu monografija FINAL PRINT.indd 28 6/16/2023 1:56:54 PM

Ispitujući osobine iterativnih nizova [16], čije granične funkcije $f_n(z,t)$ predstavljaju rješenja funkcionalnih jednačina oblika:

$$f_n(z,t) = \varepsilon_o f_n(f_{n+1}((z-d_o)p,t)),$$

M. Bajraktarević poopštava i neke od rezultata koje je dobio u svojoj doktorskoj disertaciji, u specijalnom slučaju za $p = 2$.

Značajni su i radovi [2, 4] M. Bajraktarevića, u kojima proučava proširene stavove o srednjim vrijednostima. Tako polazeći u prvom od njih (rad [2]), od radova Bojanića i Rothea, u kojim su dati potrebni i dovoljni uslovi pod kojim je neka funkcija *ksi-funkcija*, dokazuje sličnu tvrdnju za prošireni stav o srednjim vrijednostima, a zatim u radu [14] modifikuje taj rezultat, da bi mogao da ga koristi za određivanje dviju funkcionalnih jednačina, čija rješenja ξ, zajedno sa odgovarajućim funkcijama f i φ, zadovoljavaju proširenu teoremu o srednjim vrijednostima [4].

Veliki broj radova M. Bajraktarevića odnosi se na funkcionalne jednačine ili su na neki način sa njima povezani. U radove direktno povezane s funkcionalnim jednačinama spadaju i oni koji se odnose na integro-funkcionalne jednačine [18, 19, 21, 22, 29, 34]. Tako oslanjajući se na opšte teoreme o fiksnim tačkama, za jednu integro-funkcionalnu jednačinu vrlo opšteg tipa M. Bajraktarević najprije dokazuje egzistenciju jedne klase neprekidnih rješenja, a zatim, pod strožijim uslovima, ne samo egzistenciju nego i jedinstvenost neprekidnog rješenja.

M. Bajraktarević produžava da ispituje integro-funkcionalne jednačine među kojim ima i onih koje predstavljaju poopštenja jednačina koje su ranije, u svojim radovima, proučavali Kuczma, odnosno Kordylewski i Kuczma [21, 22, 29]. Određujući razne potrebne i dovoljne uslove za egzistenciju i jedinstvenost neprekidnog rješenja funkcionalne jednačine, dokazuje da se ono, uz određene pretpostavke, može napisati u obliku neke integralne jednačine [34].

Niz radova, a među njima su i neki od njegovih najznačajnijih radova, odnose se na razne vrste sredina [17, 27, 31, 36], kao što su kvaziaritmetičke sredine koje se mogu poopštiti na sredine s težinama u koje, kao prvo takvo poopštenje, spadaju *kvazilinearne sredine* koje se formiraju pomoću *konstantnih težina*, a koje su i ranije bile predmetom ispitivanja više u svijetu poznatih autora, kao što su Hardy, Littlewood, Polya, Aczel i dr. Iako ove sredine obuhvataju široku klasu sredina, među njima se nalaze i neke elementarne sredine, kao što je *antiharmonijska sredina* koja je također jedna *generalizacija aritmetičke sredine*.

Sve do 1958. godine problemima sredina su se bavili brojni autori: Beckenbach, Azcel, Daroczi, Fenye, Anghelut, Ghermanisku, Pompeiu i dr., ali samo u specijalnim slučajevima. U vezi s ovim sredinama postavljaju se fundamentalna pitanja *jednakosti, homogenosti* i *karakterizacije sredina*. Ovim problemima, za kvazilinearne sredine, bavili su se Knopp, Jensen, Nagumo, Finetti i Kolmogorov.

M. Bajraktarević je proučavao problem jednakosti sredina tipa:

anu monografija FINAL PRINT.indd 29 6/16/2023 1:56:54 PM

$$M_r(x_i, f) = \varphi^{-1}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\varphi(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}\right) \tag{1}$$

u kojem je *f funkcija težine* i koji se sastoji u nalaženju uslova pod kojim vrijedi jednakost:

$$M_\varphi(x_i, f) = M_\psi(x_i, g), \text{ za svaki niz } x_1, x_2, \ldots, x_n. \tag{2}$$

Riješio ga je za sve prirodne brojeve $n > 2$, uz pretpostavku da sve funkcije u (2) imaju izvode drugog reda. U slučaju, kada je $n \neq 2$, dobio je cijelu klasu rješenja ovog problema, a prije toga je promatrao specijalan slučaj, kada je: $f = const > 0$ i $n = 2$ [4], a zatim i slučaj $n > 2$ [11].

Ako se pretpostavi da jednakost (2) vrijedi ne samo za neko fiksno n nego i za sve $n > 1$, klasa rješenja tog problema biće eventualno i uža. Ovako shvaćen problem jednakosti sredina tipa (1), kao i problem homogenosti tih sredina, u potpunosti su riješili Aczel i Daroczy, ali bez dodatne pretpostavke o diferencijabilnosti funkcija.

Neposredno poslije toga M. Bajraktarević je, kao generalizaciju sredina (1), uveo nove sredine oblika:

$$M_\varphi(t, f, p_i) = \varphi^{-1}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i f(t_i)\varphi(t_i)}{\sum_{i=1}^{n} p_i f(t_i)}\right) \tag{3}$$

i, za te sredine, bez pretpostavke o egzistenciji izvoda, riješio sva tri fundamentalna problema teorije sredina. Njegovi dokazi su, ne samo mnogo jednostavniji od odgovarajućih dokaza Aczela i Daroczya, nego i od njegovih, koji se odnose na sredine tipa (1) (u radu [31] iz 1965. godine).

Nešto kasnije (rad [36] iz 1969. godine), M. Bajraktarević se ponovo vratio na sredine tipa (1) i, ovaj put ispitujući umjesto jednakosti (2) odgovarajuće nejednakosti, uz dodatne pretpostavke, uspio da dobije i potrebne uslove pod kojim te nejednakosti vrijede za svako fiksno $n > 2$.

Više radova M. Bajraktarevića posvećeno je funkcionalnim jednačinama raznih tipova [9, 14, 15, 20, 23, 24, 26, 32, 33, 37-39, 45-47]. Posebno ćemo istaći nekoliko radova koji se nadovezuju na rad [34], u kojem se posmatra funkcionalna jednačina:

$$\varphi(x) + \varphi(f(x)) = F(x), \quad \text{na } [a, b],$$

koju je prije njega proučavao M. Kuczma. Uz iste pretpostavke kao kod Kuczme, M. Bajraktarević je dokazao da:

anu monografija FINAL PRINT.indd 30 6/16/2023 1:56:55 PM

1. ako određeni red, formiran pomoću funkcijâ f i F, konvergira, ili je sumabilan jednom klasom postupaka ka funkciji $\varphi(x)$, tada je $\varphi(x)$ rješenje posmatrane jednačine;
2. ako je pomenuti red sumabilan prema funkciji $\varphi(x)$, koja je neprekidna na $[a, b]$, tada taj red konvergira ka istoj funkciji i ona je jedino rješenje posmatrane jednačine neprekidno na $[a, b]$;
3. neprekidno rješenje na $[a, b]$ postoji samo uz određene, drukčije pretpostavke o funkcijama f i F.

M. Bajraktarević je zatim posmatrao jedno poopštenje funkcionalne jednačine iz rada [20] i tražio njeno rješenje u obliku reda, koje je neprekidno na $[a, b]$. To ga je dovelo do različitih, dovoljnih uslova za egzistenciju: najviše jednog, tačno jednog, a zatim i do beskonačno mnogo rješenja posmatrane jednačine, koja se od ranije dobivenog rješenja razlikuju samo u jednoj aditivnoj konstanti [23].

Ispitivanje funkcionalne jednačine (4), iz rada [23], nastavio je u radu [26], u kome je dokazao da ta jednačina ima beskonačno mnogo rješenja i naveo dovoljne uslove pod kojim su ta rješenja neprekidna. Osim toga, došao je i do dovoljnih uslova pod kojim suma, odnosno T-suma jednog određenog reda, predstavlja rješenje posmatrane jednačine.

M. Bajraktarević je zatim u radovima [33, 34], na nekom skupu E, posmatrao funkcionalnu jednačinu:

$$f^N(x) = g(x), \quad \text{odnosno} \quad f^{N-n}(h(f^n(x))) = g(x).$$

Za prvu jednačinu je konstruisao opšte rješenje, na cijelom skupu E, a za drugu na nekom njegovom podskupu E', a zatim pokazao da se njeno rješavanje, na skupu $E \setminus E'$, svodi na rješavanje jednog sistema funkcionalnih jednačina. Dobijene rezultate je, nakon toga, primjenio na funkcionalnu jednačinu:

$$(gh)^k f(x) = f(hg)^k(x), \quad \text{odnosno} \quad f(hg)^m h(x) = g(hg)^n(x).$$

Uopštavanjem jedne funkcionalne jednačine, koju je ranije rješavao P. M. Vasić, M. Bajraktarević dobija jednačinu s nepoznatom vektorskom funkcijom čije komponente zavise od više promjenljivih, a primaju vrijednosti iz nekog polja. Njegovo opšte rješenje te jednačine je jednostavnijeg oblika od onoga do kojeg je došao P. M. Vasić, u specijalnom slučaju. Osim toga, kao posljedicu glavnog rezultata, M. Bajraktarević je dobio rješenja nekih sistema funkcionalnih jednačina sličnog tipa. Ovim sistemima su, kao specijalni slučajevi ([35]), obuhvaćeni i neki sistemi koje su ranije promatrali R. Ž. Đorđević i M. S. Mitrinović.

Među radovima M. Bajraktarevića, značajno mjesto, kako po značaju rezultata, tako i po njihovoj povezanosti s rezultatima većeg broja drugih matematičara, pripada i radovima koji su vezani za funkcionalnu jednačinu:

$$f g f(x) = g(x),$$

anu monografija FINAL PRINT.indd 31 6/16/2023 1:56:55 PM

u kojoj je f nepoznata, a g zadana permutacija nekog skupa X [39, 46]. Rješavanjem ove jednačine M. Bajraktarević je uspio da dobije opšte rješenje u eksplicitnom obliku drukčijom metodom, u čemu nije uspio S. Lojasiewicz, koji je inače prije njega riješio istu jednačinu, ali na drugi način. Bajraktarevićev metod je, međutim, bolji i zbog toga što se može primjeniti i na rješavanje nešto opštijih jednačina.

M. Bajraktarević je postigao značajne rezultate i baveći se raznim problemima, vezanim za sumabilnost [25, 30, 40-42]. Prva dva rada [25, 30] čine cjelinu, s tim što je u prvom od njih (rad [25]), uspio poopštiti neke rezultate B. Martića u vezi sa $S^{\alpha,\beta}$ - postupkom sumabilnosti, kojeg je prvi uveo V. Vučković. M. Bajraktarević je, štaviše, otišao i korak dalje, uvođenjem jednog novog postupka $S^{\alpha,\beta,\rho}$ koji je u literaturi po njemu nazvan *metodom Bajraktarević* – i nastavio da ispituje klase postupaka te sumabilnosti. Između ostalog, dokazao je regularnost postupaka iz te klase, dao asimptotsku formulu za parcijalne sume reda sumabilnog $S^{\alpha,\beta,\rho}$ -postupkom, odredio potrebne i dovoljne uslove pod kojim je svaki red, sumabilan *Rieszovim postupkom* prvog reda, sumabilan i određenim $S^{\alpha,\beta,\rho}$ - postupkom.

Ovaj postupak je M. Bajraktarević, zatim, primjenio na stepene redove, u okolini tačke a, i, uz određene pretpostavke, dokazao da je stepeni red, koji na krugu konvergencije predstavlja analitičku funkciju $f(z)$, sumabilan ka toj funkciji i u unutrašnjosti *Borelovog poligona* te funkcije, pridruženog tački a. I, na kraju, dokazao je inkluziju:

$$E^{\lambda} \subseteq \mathrm{S}^{\alpha,\beta,\rho}, \text{ za } \lambda > 0 \text{ i } \alpha > 0,$$

pri čem je s E^{λ} *označen Eulerov postupak sumabilnosti* [30].

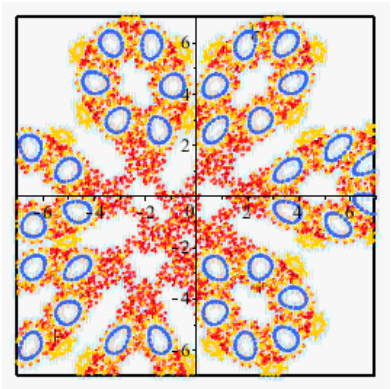
M. Bajraktarević je proučavao i probleme brzine konvergencije nizova kompleksnih brojeva [40-42]. U tim radovima je najprije određivao potrebne i dovoljne uslove za postojanje jednog niza koji brže, odnosno sporije, konvergira od svih nizova iz date klase A *nula-nizova*. Zatim je odredio razne dovoljne uslove pod kojim postoji *nula-niz*, koji je neuporediv sa svakim nizom iz klase A i dokazao da, pod tim uslovima, klasa $\varphi \setminus A$ ima moć kontinuuma, pri čemu je sa φ označio skup svih *nula-nizova* kompleksnih brojeva koji su različiti od nule.

Osim toga, pod raznim uslovima, dokazao je i egzistenciju *matričnih postupaka sumabilnosti* koji, za datu klasu nula-nizova ubrzavaju, usporavaju ili ne mijenjaju brzinu konvergencije nizova iz te klase. I na kraju, dokazao je egzistenciju nula-niza, čiju konvergenciju ubrzava svaka transformacija T jedne određene klase matričnih transformacija i za datu regularnu matričnu transformaciju T odredio jednu klasu nula-nizova čiju konvergenciju ta transformacija ubrzava. Za rezultate iz ova tri rada može se reći da su veoma interesantni i da sigurno spadaju među značajnije rezultate M. Bajraktarevića.

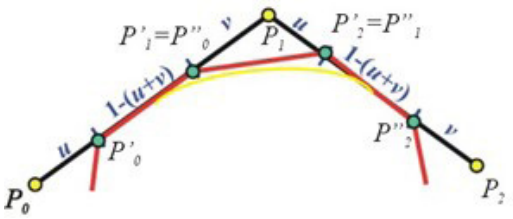
Šta reći u najkraćim crtama o značaju rezultata i radova akademika Mahmuta Bajraktarevića?

anu monografija FINAL PRINT.indd 32 6/16/2023 1:56:55 PM

Njegovi radovi o iterativnim nizovima i uopštenim sredinama, kao i oni kasniji o problemima brzine konvergencije su – dajući podsticaj za dalja istraživanja, u kojim su, pored eks-jugoslovenskih, učestvovali i neki značajniji poljski, mađarski, rumunski i drugi matematičari – doveli do uzajamnog obogaćivanja ideja i poboljšavanja rezultata, tako da su tokom dužeg perioda proizašli vrlo značajni rezultati na svim stranama koji su ostavili trajan trag u matematici.



Rezultati M. Bajraktarevića u oblasti funkcionalnih jednačina čine veći i još značajniji dio njegovog sveukupnog stvaralaštva, a njegovi radovi o raznim klasama funkcionalnih jednačina, citirani su u desetinama članaka već za njegovog života i uključeni u veliki broj monografijâ poznatih svjetskih matematičara iz te oblasti i tako bili inspiracija za nova istraživanja i nastanak novih radova. Ipak posebno ću istaći njegove rezultate vezane za teoriju sumabilnosti i već spomenuti metod $S^{\alpha,\beta,\rho}$, po njemu nazvan *metod Bajraktarević*, koji se pojavio kao kruna njegovih istraživanja.





The Read-Bajraktarevic Functional Equation and Selfsimilarity – *Maple Centre*

Svakako treba podvući da su radovi M. Bajraktarevića, u vrijeme kada su nastajali, imali čisto teoretski karakter, ali su neki od njih razvojem kompjuterske geometrije postali interesantni i za primijenjenu matematiku. Tako je, primjenom *Maple*-a, dokazano da se fraktalne krive mogu dobiti kao rješenja neke funkcionalne jednačine s tzv. *Read-Bajraktarević operatorom* [L: 19, 28, 35].

Uvođenje fraktalne interpolacije funkcije (FIF) i njena konstrukcija, uz primjenu *Read-Bajraktarević operatora*, doveli su do nevjerovatne prednosti u interpolaciji eksperimentalnih podataka pomoću krivih koje nisu glatke i nađena je široka primjena u inženjerstvu, biološkim naukama, astronomiji i umjetnosti.

anu monografija FINAL PRINT.indd 33 6/16/2023 1:56:55 PM



Zakopane, 1967:
Poljski matematičar
M. Kuczma
s M. Bajraktarevićem

Rezultate svojih istraživanja M. Bajraktarević je izlagao na više domaćih i međunarodnih konferencija i skupova. S referatima je učestvovao na skoro svim posljeratnim kongresima matematičara, fizičara i astronoma Jugoslavije, kao i na međunarodnim simpozijumima posvećenim funkcionalnim jednačinama: u Zakopanama (Poljska, 1967) i Oberwolfachu (SR Njemačka, 1968), na kongresima balkanskih matematičara u Istanbulu (Turska, 1971) i u Beogradu (Jugoslavija, 1974). Rezultate svojih istraživanja izlagao je po pozivu i na više univerziteta i naučnih instituta, kao što su: Matematički institut Srpske akademije nauka i umetnosti u Beogradu (1958), Institut Akademije nauka Sovjetskog Saveza u Moskvi (1962), Univerzitet u Debrecinu (Mađarska, 1965), i dr.

Zahvaljujući svojim naučnim rezultatima Mahmut Bajraktarević je stekao ugled istaknutog naučnika kod nas i u svijetu, a time doprinio ne samo svojoj ličnoj reputaciji nego i ugledu bosanskohercegovačke matematike u cjelini.

anu monografija FINAL PRINT.indd 34 6/16/2023 1:56:55 PM

M. Bajraktarević sa studentima na izletu, Počitelj, 1967.

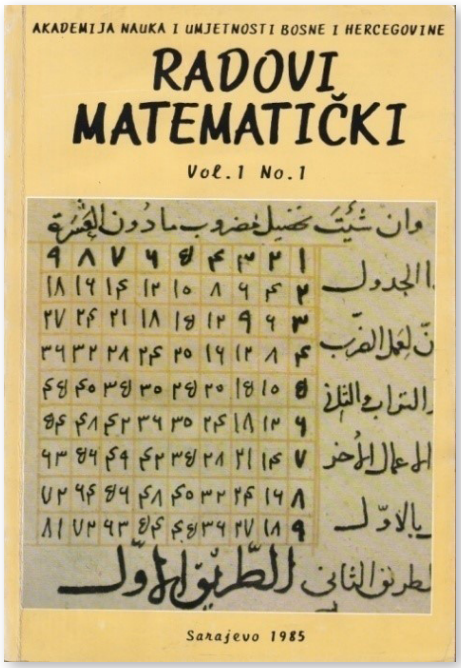


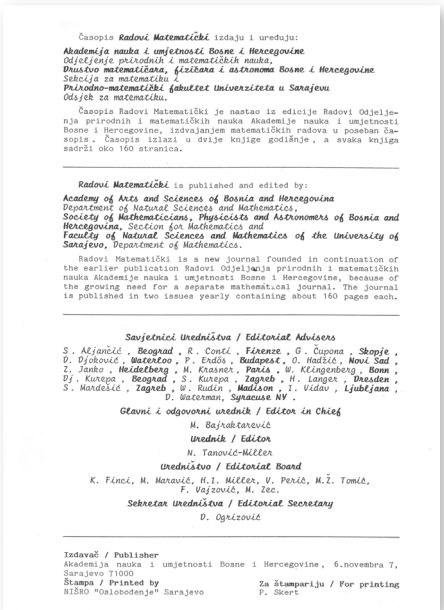
Uz naučne radove M. Bajraktarevića treba svakako spomenuti i nekoliko njegovih radova pedagoško-didaktičkog karaktera koji su objavljeni u časopisima *Prosvjetni radnik* i *Bilten Društva matematičara, fizičara i astronoma BiH* [B: 2], kao i radove o razvoju matematike, najčešće vezane za savjetovanja i skupove koje je organizovala Akademija nauka i umjetnosti Bosne i Hercegovine [B: 1, 3, 4].

Aktivnost Mahmuta Bajraktarevića nije bila ograničena samo na matematiku kao nauku nego je učestvovao i u svim drugim aktivnostima koje su se ticale matematike, pa tako i kada se trebalo boriti za bolju poziciju matematike – dovoljno je bilo samo njegovo prisustvo jer su ga ljudi smatrali izuzetno korektnim i veoma uvažavali njegovo mišljenje.

M. Bajraktarević je bio prodekan Filozofskog fakulteta u vrijeme kada se matematika izučavala na Filozofskom fakultetu, dugogodišnji šef Odsjeka za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta, sekretar i potpredsjednik Društva matematičara, fizičara i astronoma BiH, član Odbora za nastavu Sekretarijata za obrazovanje, nauku i kulturu BiH i iste takve Komisije na saveznom nivou, višegodišnji član Pedagoškog savjeta BiH i član brojnih komisija na Odsjeku za matematiku, Prirodno-matematičkom fakultetu i Univerzitetu.

anu monografija FINAL PRINT.indd 35 6/16/2023 1:56:55 PM





Časopis **Radovi Matematički** izdaju i uređuju:

Akademija nauka i umjetnosti Bosne i Hercegovine
Odjeljenje prirodnih i matematičkih nauka,
Društvo matematičara, fizičara i astronoma Bosne i Hercegovine
Sekcija za matematiku i
Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Sarajevu
Odsjek za matematiku.

Časopis Radovi Matematički je nastao iz edicije Radovi Odjeljenja prirodnih i matematičkih nauka Akademije nauka i umjetnosti Bosne i Hercegovine, izdvajanjem matematičkih radova u poseban časopis. Časopis izlazi u dvije knjige godišnje, a svaka knjiga sadrži oko 160 stranica.

Radovi Matematički is published and edited by:

Academy of Arts and Sciences of Bosnia and Hercegovina
Department of Natural Sciences and Mathematics,
Society of Mathematicians, Physicists and Astronomers of Bosnia and Hercegovina, Section for Mathematics and
Faculty of Natural Sciences and Mathematics of the University of Sarajevo, Department of Mathematics.

Radovi Matematički is a new journal founded in continuation of the earlier publication Radovi Odjeljenja prirodnih i matematičkih nauka Akademije nauka i umjetnosti Bosne i Hercegovine, because of the growing need for a separate mathematical journal. The journal is published in two issues yearly containing about 160 pages each.

Savjetnici Uredništva / Editorial Advisers

S. Aljančić, **Beograd**, R. Conti, **Firenze**, G. Čupona, **Skopje**, D. Djoković, **Waterloo**, P. Erdös, **Budapest**, O. Hadžić, **Novi Sad**, I. Janko, **Heidelberg**, M. Krasner, **Paris**, W. Klingenberg, **Bonn**, Dj. Kurepa, **Beograd**, S. Kurepa, **Zagreb**, H. Langer, **Dresden**, S. Mardešić, **Zagreb**, W. Rudin, **Madison**, I. Vidav, **Ljubljana**, D. Waterman, **Syracuse NY**.

Glavni i odgovorni urednik / Editor in Chief
M. Bajraktarević

Urednik / Editor
N. Tanović-Miller

Uredništvo / Editorial Board
K. Finci, M. Maravić, H.I. Miller, V. Perić, M.Ž. Tomić, F. Vajzović, M. Zec.

Sekretar Uredništva / Editorial Secretary
D. Ogrizović

Izdavač / Publisher
Akademija nauka i umjetnosti Bosne i Hercegovine, 6.novembra 7, Sarajevo 71000
Štampa / Printed by NIŠRO "Oslobođenje" Sarajevo
Za štampariju / For printing P. Skert

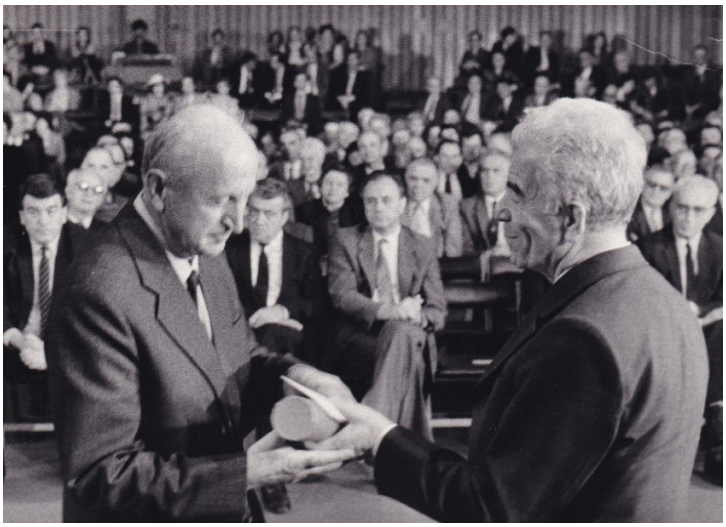
Radovi Matematički (*prvi broj*), *Sarajevo, 1985.*

Mahmut Bajraktarević se odazivao i na pozive svojih studenata i postdiplomaca i sa njima odlazio na duže i kraće izlete, o čemu svjedoče fotografije.

Koristan i zapažen je bio i njegov rad u Akademiji nauka i umjetnosti Bosne i Hercegovine, naročito u Odjeljenju prirodnih i matematičkih nauka, čiji je jedno vrijeme bio sekretar. Tokom tog mandata uspješno je organizovao savjetovanja o matematici, za koja je pripremao iscrpne referate o razvoju matematike, s posebnim akcentom na razvoj naučno-istraživačkog rada u oblasti matematike u BiH. Nabrojaću samo neke od značajnijih članaka M. Bajraktarevića, vezanih za razvoj obrazovanja, kao što su: *Pregled razvoja matematike u Bosni i Hercegovini*, objavljen u ediciji Matematička biblioteka, iz Beograda [B:1], te referati sa savjetovanja: *Istorijski osvrt na dosadašnji razvojni put naučnih istraživanja u matematici, u Bosni i Hercegovini* (ANUBiH, 1978) [B:3], *O naučnom radu u oblasti matematičkih nauka u Bosni i Hercegovini* (ANUBiH, 1980) [B:4], itd. Na savjetovanjima i u svojim člancima, objavljenim u pomenutim časopisima, autori su, na osnovu dugogodišnjeg iskustva u nastavi, veoma promišljeno i kompetentno raspravljali o nekim važnim pitanjima nastave matematike u srednjim školama, ali i na Univerzitetu.

Posebno treba istaći da je M. Bajraktarević dugo vremena bio glavni urednik časopisa *Radovi Odjeljenja prirodnih i matematičkih nauka Akademije nauka i umjetnosti Bosne i Hercegovine*, koji je kao prvi naučni časopis u Bosni i Hercegovini – u kom su, pored radova iz matematike, objavljivani i naučni radovi iz fizike, hemije, biologije, geologije itd. – mnogo doprinio afirmaciji matematike i matematičara BiH. Isto tako

anu monografija FINAL PRINT.indd 36 6/16/2023 1:56:55 PM



N. Albahari uručuje akad. M. Bajraktareviću 27-julsku nagradu, Sarajevo 1985.
1. red zdesna: N. Stojanović, M. Renovica;
2. red R. Dizdarević (*s naočalama*)

doprinio je i osnivanju časopisa *Radovi matematički*, za čijeg je glavnog urednika, takođe, izabran. Odlazak u štampu prve sveske časopisa *Radovi matematički* označio je početak novog matematičkog časopisa koji je M. Bajraktarević zajedno sa uredništvom dugo i sa radošću pripremao, ali ga je iznenadna smrt spriječila da dočeka njegov izlazak iz štampe i da vidi prvi broj tog časopisa koji danas izlazi kao *Sarajevo Journal of Mathematics*.

Akademik Mahmut Bajraktarević bio je i dugogodišnji član redakcije časopisa *Publications de l'Institut Mathématique*, iz Beograda.

Za dugogodišnji uspješan naučni, nastavni, stručni i društveni rad, kao i cjelokupnu aktivnost u matematičkom životu Bosne i Hercegovine, akademik Mahmut Bajraktarević je dobio više raznih priznanja i nagrada od kojih ćemo istaći samo neka, najznačajnija. Dobitnik je Povelje Saveza Društva matematičara, fizičara i astronoma Jugoslavije (1974) i Povelje Društva matematičara, fizičara i astronoma Bosne i Hercegovine (1977). Ukazom predsjednika SFRJ, druga Tita, odlikovan je: Ordenom rada III reda (1957), Ordenom rada sa crvenom zastavom (1971) i Ordenom zasluga za narod sa srebrenim zracima (1977). Posebno treba istaći da je bio dobitnik Dvadesetsedmojulske nagrade (1977), za naučni rad i Šestoaprilske nagrade Grada Sarajeva (1985), za cjelokupan doprinos razvoju matematike i matematičke misli u našoj sredini.

anu monografija FINAL PRINT.indd 37 6/16/2023 1:56:55 PM



M. Bajraktarević s postdiplomcima na Vrelu Bosne (1967), A. Finci, M. Zec, U. Simeunović, V. Vuletić, R. Džananović i K. Finci; čuče: P. Karačić i M. Galić.

Pored svega toga, svakako treba reći nešto i o akademiku Bajraktareviću kao čovjeku, jer bi, u suprotnom, slika o njemu bila nepotpuna. Svaki posao koji je obavljao, obavljao je veoma savjesno i na najbolji mogući način.

Kroz svoj izuzetno stručno i pedagoški obavljan nastavnički rad, M. Bajraktarević je davao vrlo značajan dugogodišnji, pionirski doprinos razvoju obrazovanja, kako visokog, tako i osnovnog i srednjeg – angažovanjem na izradi planova i programa škola, recenziranjem udžbenika i preporučivanjem za štampu onih najboljih. U vrijeme kada je bio šef Odsjeka za matematiku pokrenuo je, zajedno s prof. Verom Šnajder i prof. Šefkijom Raljevićem, dugogodišnjim dekanom Fakulteta, i prvi postdiplomski studij iz matematike (1967-1970), što je takođe predstavljalo veoma značajan doprinos obrazovanju generacija mladih matematičara, pa tako i razvoju matematike, u BiH.

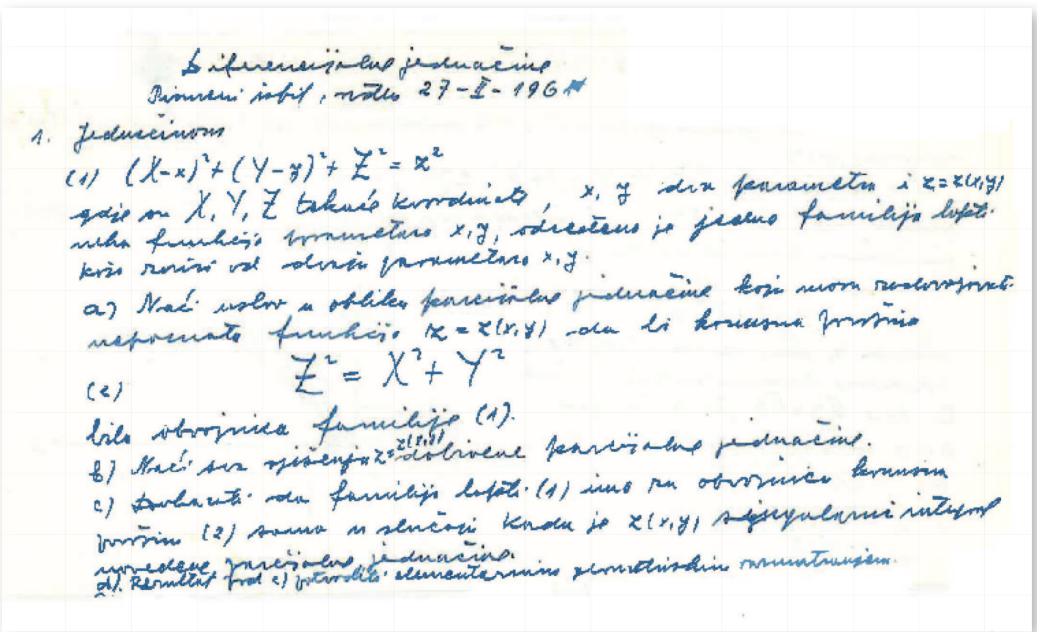
Zapravo, jako je teško nabrojati sve što je učinio akademik Bajraktarević za našu matematiku. Bio je naučnik, prvi doktor matematičkih nauka u BiH, čak i prvi doktor matematičkih nauka rođen u Austrougarskoj monarhiji [L: 14, 37, 46, 48]. Imao je veliki uticaj na naučni rad, pa tako i na razvoj bosanskohercegovačke matematike. Ipak,

anu monografija FINAL PRINT.indd 38 6/16/2023 1:56:55 PM

najdublji trag je ostavio u radu sa nama, članovima Odsjeka za matematiku.

Svakako treba nešto reći i o njegovim predavanjima, koja su bila sređena, poznata po jasnoći, ispisana njegovim sitnim, čitkim rukopisom. Crteži, u skladu s najstrožijim stručnim i pedagoškim normama, privlačili su pažnju i onih koji bi slučajno navratili u učionicu poslije njega. Poneko bi znao reći da bi se njegova predavanja, zbog sređenosti, komotno mogla slikati za knjigu. Nažalost, s obzirom na brojne obaveze, prof. Bajraktarević – Mašo nije ostavio knjigu, tako da su njegova predavanja ostala još samo u sjećanjima njegovih bivših studenata, naročito akademika Fikreta Vajzovića i mene, koji smo imali čast i zadovoljstvo da budemo njegovi asistenti. Inače, akademik Fikret Vajzović mi je znao reći: „Kada uđem poslije vas u učionicu, čini mi se kao da sam ušao poslije Maše. Sve ispisano lijepo, sistematično, crteži ...“.

Ali sačuvala sam par lijepih zadataka, ispisanih Mašinim sitnim i urednim rukopisom, koje je on sastavljao i davao na ispitima iz Diferencijalnih jednačina.



Diferencijalne jednačine
Pismeni ispit, rješen 27-II-1961

1. Jednačinom

(1) $(X-x)^2+(Y-y)^2+Z^2=z^2$

gdje su X, Y, Z takaće koordinate, x, y dva parametra i $z=z(x,y)$ neka funkcija parametara x, y, određeno je jedna familija lopti koja zavisi od dvaju parametara x, y.

a) Naći uslov u obliku parcijalne jednačine koju mora zadovoljavati nepoznata funkcija $z=z(x,y)$ da bi konusna površina

(2) $$Z^2=X^2+Y^2$$

bila obvojnica familije (1).

b) Naći sva rješenja $z=z(x,y)$ dobivene parcijalne jednačine.

c) Dokazati da familija lopti (1) ima za obvojnicu konusnu površinu (2) samo u slučaju kada je $z(x,y)$ singularni integral navedene parcijalne jednačine.

d) Rezultat pod c) potvrditi elementarnim geometrijskim razmatranjem.

Zadatak sa ispita iz Diferencijalnih jednačina održanog 27. II 1961. g. ispisan rukom prof. M. Bajraktarevića

anu monografija FINAL PRINT.indd 39 6/16/2023 1:56:56 PM

Te zadatke mi je dao kako bi mi pomogao i olakšao traženje zadataka za pismene ispite, jer je prof. Vajzović, čija sam također bila asistentica na Diferencijalnim jednačinama, pripremanje zadataka i ocjenjivanje pismenih ispita povjerio meni, a uvijek je tražio nove, lijepe i originalne zadatke.





Prof. Bajraktarević mi je poslao novogodišnju čestitku za vrijeme mog studijskog boravka na Lomonosovu u Moskvi, u kojoj mi se zahvaljuje na knjizi koju sam mu poslala, a u kojoj je citirano više njegovih radova.

Tokom moje dugogodišnje saradnje s prof. Bajraktarevićem, koja je trajala duže od 20 godina, imala sam priliku da ga upoznam ne samo profesionalno nego i kao čovjeka, solidnog i istrajnog, strogog, ali izuzetno pravednog, strpljivog i korektnog. Rijetko je otvarao dušu. Bio je tih i povučen, nenametljiv, ali svako ko ga je iole poznavao, rekao bi da plijeni svojom jednostavnošću, toplinom, blagošću i spremnošću da sasluša i pomogne, koliko god je bilo u njegovoj moći. Ali, znao je i da hrabro ustane protiv nepravde, ma koliko to bilo i po život opasno, kao što je to učinio 1941. godine, potpisavši Sarajevsku deklaraciju protiv pogroma nad Srbima, Jevrejima i Romima, koja je upućena direktno Hitleru, što je inače bilo malo poznato.

Slobodno se može reći da je rad obilježio cijeli njegov život. Slike urezane u sjećanje, ni za tren ne blijede. Uvijek ću se sjećati svog prvog dana na Fakultetu i gotovo očinskih savjeta akademika M. Bajraktarevića, koji je nas – generaciju iz 1967 – kao šef Odsjeka, primio i pozdravio. Počeo je, riječima:

„Učite, djeco. Što možete naučiti danas, ne ostavljajte za sutra. Fakultet nije škola, nema jedinica. Niko vas neće tjerati da učite [...]. Analiza I, koju ću vam predavati, činiće vam se sada najtežim predmetom, ali, kada se kasnije osvrnete unazad, vidjećete da se predmeti, koji budu dolazili poslije Analize I, ne samo na nju nadovezuju nego i da su puno teži. Ako Analizu I dobro naučite, i oni će vam biti lakši."

A sjećaću se i susreta kada me Mašo, zajedno s prof. Šefkijom Raljevićem, dekanom Fakulteta, pozvao poslije prve godine studija da mi kaže da me njih dvo-

anu monografija FINAL PRINT.indd 40 6/16/2023 1:56:56 PM

jica predlažu za nagradnu stipendiju Univerzitetskog fonda „Hasan Brkić“. Tom prilikom su mi rekli da ću, ako tako produžim, biti asistentica. Za mene je to bila velika čast, ali isto tako i veliko opterećenje, zbog želje da ispunim njihova očekivanja, ali i da se moj san ostvari. Ponosna sam da sam bila asistentica akademika Mahmuta Bajraktarevića, i to na Kompleksnoj analizi, jednom od najljepših predmeta na kom sam ga i naslijedila.

Ima još jedan događaj koji će zauvijek ostati u mom sjećanju, a to je 29. juni 1979. godine – dan kada je akademik Mahmut Bajraktarević bio na Univerzitetu u Sarajevu izvjestitelj na mojoj promociji na čast doktora matematičkih nauka. Zamijenio je mog mentora akademika Manojla Maravića, koji je bio na jednom od svojih ranije isplaniranih putovanja na Thajland, Japan, itd.

Zbog svega toga sjećaću se s velikom ljubavlju i dubokim poštovanjem mog dragog profesora, izuzetnog naučnika i velikog čovjeka akademika Mahmuta Bajraktarevića Maše.



Univerzitet u Sarajevu – promocija doktora nauka, 29. juni 1979.
Slijeva na desno: M. Vuković, M. Malenica, M. Bajraktarević

anu monografija FINAL PRINT.indd 41 6/16/2023 1:56:56 PM

Bibliografija akademika Mahmuta Bajraktarevića

A. Naučni radovi

[**1**] *O konvergenciji niza* (x_n) čiji su članovi definisani jednačinom $x_{n+1} = f(x_n)$, Glasnik matematičko-fizički i astronomski, 6, Zagreb (1951), pp. 201-209.

[**2**] *O proširenom stavu o srednjim vrijednostima*, Vesnik Društva matematičara i fizičara NR Srbije III, Beograd (1951), pp. 15-23.

[**3**] *O ograničenjima modula jednog zbira*, Vesnik Društva matematičara i fizičara NR Srbije III, 4, Beograd (1953), pp. 17-27.

[**4**] *Neki specijalni slučajevi proširenog stava o srednjim vrijednostima,* Glasnik matematičko-fizički i astronomski, 8, Zagreb (1953), pp. 115-128.

[**5**] *O nizovima definisanim jednačinama* $x_n = \varepsilon_o f(\varepsilon_1 f(\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n f(0)) \ldots)$, Zbornik radova SAN, XXXV, Matematički Institut SAN, knj. 3, Beograd (1953), pp. 61-74.

[**6**] *Sur certaines suites itérées*, C.R. Académie des sciences Mathématiques, Ser. I, 236, Pais (1953), pp. 881-883.

[**7**] *Sur certaines suites itérées*, II, ibid. pp. 988-989.

[**8**] *Sur certaines suites itérées*, III, ibid. pp. 1125-1127.

[**9**] *O rješenjima jedne funkcionalne jednačine*, Glasnik matematičko-fizički i astronomski, 8, Zagreb (1953), pp. 297-300.

[**10**] *Sur certaines suites itérées*, Naučno društvo NR BiH, Djela, knj. 4, Odjeljenje privredno-tehničkih nauka, knj. 1, Sarajevo, 1954 (vidi, takođe Thèses présentées à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris, Série A, 598, No. d'ordre 622, Paris ,1953).

[**11**] *O nekim rješenjima dviju funkcionalnih jednačina*, Vesnik Društva matematičara i fizičara NR Srbije, 4, Beograd (1954), pp. 173-185.

[**12**] *Quelques remarques sur la fractions continues*, Publications de l' Institut Mathématiques, 6, Beograd (1954), pp. 137-148.

[**13**] *Sur les itérées continues et leur applications* à *la recherche des fonctions limites de certaines suites itérées*, ibid. 8, Beograd (1955), pp. 13-22.

anu monografija FINAL PRINT.indd 42 6/16/2023 1:56:56 PM

[**14**] *Sur une équation fonctionnelle*, Glasnik matematičko-fizički i astronomski, 12, Zagreb (1957), pp. 201-205.

[**15**] *Sur une solution monotone d'une équation fonctionnelle*, Publications de l' Institut Mathématiques, XI, Beograd (1957), pp. 43-52.

[**16**] *Sur une généralisation de certaines suites itérées*, ibid. 12, Beograd (1958), pp. 27-38.

[**17**] *Sur une équation fonctionnelle aux valeurs moyennes*, Glasnik matematičko-fizički i astronomski, 13, Zagreb (1958), pp. 243-248.

[**18**] *Sur une équation intégro-fonctionnelle*, ibid. 13, Zagreb (1958), pp. 235-242.

[**19**] *Sur une équation intégro-fonctionnelle sans limitation*, ibid. 14, Zagreb (1959), pp. 169-176.

[**20**] *Sur une solution de l'équation fonctionnelle* $f(g(x)) + f(x) = F(x)$, ibid. 15, Zagreb (1960), pp. 91-98.

[**21**] *Sur les solutions continues d'une équation intégro-fonctionnelle*, C.R. de l'Académie des Sciences, Ser. I, Mathématiques, 254, Paris (1962), pp. 605-607.

[**22**] *Sur l'existence des solutions continues d'une équation intégro-fonctionnelle*, ibid. 254, Paris (1962), pp. 980-982.

[**23**] *Sur les solutions de certaines équations fonctionnelles représentables par des séries,* Glasnik matematičko-fizički i astronomski, 17, Zagreb (1962), pp. 27-41.

[**24**] *Sur l' existence des solutions continues monotones de l'équation fonctionnelle* $f(x) + f(g_f(x)) = F(x)$, Publications de l' Institut Mathématiques, 2 (16), Beograd (1962), pp. 75-80.

[**25**] *Quelques remarques sur les procédées de sommabilité lies aux polynômes de Stirling*, Glasnik matematičko-fizički i astronomski, 17, Zagreb (1962), pp. 183-187.

[**26**] *Sur certaines équations fonctionnelles,* Vesnik Društva matematičara i fizičara NR Srbije, 14, Beograd (1962), pp. 131-150.

[**27**] *Sur une généralisation des moyennes quasilinéaires,* Publications de l' Institut Mathémtiques, 3 (17), Beograd (1963), pp. 69-76.

[**28**] *Sur l' existence des solutions continues monotones d'une équation fonctionnelle*, Naučno društvo SR BiH, Radovi, XXII, Odjeljenje privredno-tehničkih nauka, knj. 6, Sarajevo (1963), pp. 43-46.

[**29**] *Sur les solutions de certaines équations fonctionnelles et intégrales,* Publications de l' Institut Mathématiques, 4 (18), Beograd (1964), pp. 147-155.

[**30**] *Sur une ensemble de procédés de sommabilité à deux paramètres dépendant d'une suite*, Naučno društvo SR BiH, Odjeljenje privredno-tehničkih nauka, Radovi, XXV, knj. 7, Sarajevo (1964), pp. 203-224.

[**31**] *Quelques remarques sur ma note „Sur une généralisation des moyennes quasilinéaires*," Publications de l' Institut Mathématiques, 5 (19), Beograd (1965), pp. 97-98.

[**32**] *Solutions générales de l'équation fonctionnelle* $f^N(x) = F(x)$, ibid., Beograd pp. 115-124.

[**33**] *Sur la solution générale de l'équation fonctionnelle* $f^{N-m} h f^m x = g x$, ibid., Beograd, pp. 125-132.

[**34**] *O rešenijah nekotoryh funkcional'nyh i integral'nyh uravnenij*, Matematičeskij Sbornik, 66 (108), Moskva (1965), pp.161-169.

anu monografija FINAL PRINT.indd 43 6/16/2023 1:56:56 PM

[**35**] *Quelques remarques sur les solutions générales de certaines équations fonctionnelles aux plusieurs inconnues,* Matematički vesnik, 5 (20), Beograd (1968), pp. 497-503.

[**36**] *Über die Vergleichbarkeit der mit Gewichtsfunktionen gebildeten Mittelwerte*, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica, 4, Budapest (1969), pp. 3-8.

[**37**] *Sur les solutions générales de certaines équations fonctionnelles,* ANUBiH, Radovi XXXIII, Odjeljenja prirodnih i matematičkih nauka, 10, Sarajevo (1969), pp. 17-37.

[**38**] *Sur la solution générales de l' équations fonctionnelle* $f\,g\,f\,x = g\,x$, ANUBiH, Radovi XLV, 12, Sarajevo (1973), pp. 5-23.

[**39**] *Sur les solutions de l' équation fonctionnelle* $f^{m_{n-1}}\,g\,f^{m_{n-2}}\,g\ \ldots\ g\,f^{m_0}\,x = g^{n-1}\,x$, ANUBiH, Radovi XLV, 12, Sarajevo (1973), pp. 49-60.

[**40**] *Sur quelques problèmes concernant la vitesse de convergence et la sommabilité des suites* (II), Publications de l' Institut Mathématiques, 16 (30), Beograd (1973), pp. 25-30.

[**41**] *Sur quelques problèmes concernant la vitesse de convergence et la sommabilité des suites,* Bulletin Sci. Conseil des académie des siences et des arts de la RSF Jougoslavie, T. 18, No. 10-12, Beograd (1974), pp. 255-256.

[**42**] *Sur quelques problèmes concernant la vitesse de convergence et la sommabilité des suites,* ANUBiH, Radovi Odjeljenja prirodnih i matematičkih nauka LII, 14, Sarajevo (1974), pp. 5-27.

[**43**] *Neke analitičke nejednakosti*, ibid. pp. 29-36 (sa *B. Martićem*).

[**44**] *Sur quelques cas particuliers de la convergence des séries* des fonctions*,* ibid. LIX, 16 Sarajevo (1976), pp. 69-83.

[**45**] *Sur les solutions convexes d' une équation fonctionnelle,* ibid. LXI, 17, Sarajevo (1978), pp. 5-20.

[**46**] *Sur une solution continue concave* (*convexe*) *de l'équation fonctionnelle* $f(x+1) = (f(x)) / ((1+f(x)g(x)))$, ibid. LXVIII, 6, Sarajevo (1979), pp. 5-18.

[**47**] *Sur une solution de l' équation fonctionnelle* $\varphi\,f\,x - \varphi\,x = h\,x$ *déterminée par une solution de l'équation d'Abel et par une séries* (*divergente*), ibid. LXVIII, 6, Sarajevo (1979), pp. 41-52.

[**48**] *Quelques remarques sur la vitesse de convergence d'une suite par rapport* à *ses suites partielles,* Matematički vesnik, 4 (17) (32), Beograd (1980), pp. 255-262.

[**49**] *Sur l'existence de la solution unique continue de l'équation* $\varphi(x) + A\varphi(x) = F(x)$, ANUBiH Radovi Odjeljenja prirodnih i matematičkih nauka, LXIX (20), Sarajevo (1982), pp. 63-69.

[**50**] *Sur une opérateur particulier figurant dans l' équation fonctionnelle* $\varphi + A\,\varphi = F$, Publications de l' Institut Mathématiques, 32 (46), Beograd (1982), pp. 7-15.

[**51**] *Sur certaines solutions continues de l' équation fonctionnelle* $A\psi = \psi$ *et leur application* à *la recherche des fonctions moyennes,* Matematički vesnik, 6 (19) (34), Beograd (1982), pp. 345-355.

[**52**] *Sur la solution unique continue de l' équation fonctionnelle* $\varphi + A\,\varphi = F$*,* ANUBiH, Radovi Odjeljenja prirodnih i matematičkih nauka, LXXIV (22), Sarajevo (1983), pp. 73-81.

anu monografija FINAL PRINT.indd 44 6/16/2023 1:56:57 PM

[**53**] *Sur la solution continue de l'* équation *fonctionnelle* $A\psi = \psi$, ibid., Sarajevo (1983), pp. 129-132.

[**54**] *Sur certaines solutions continues de l'* équation *fonctionnelle* $A\psi = B\psi$, Glasnik Matematički, 20 (40) (2), Zagreb (1985), 377-382.

[**55**] *Sur une* équation *fonctionnelle appliquée à une équation différentielle aux dérivées partielles du second ordre*, Radovi Matematički, 1 (1), Sarajevo (1985), pp. 39-47. (s N. Bajrakrevićem)

[**56**] *Sur une équation intégro-différentielle appliquée à une équation différentielle aux dérivées partielles d'ordre k*, ibid. 1 (2), Sarajevo (1985), pp. 191-197. (s N. Bajraktarvićem)

[**57**] *Sur certaines solutions continues d' une* équation *fonctionnelle,* Glasnik Matematički, 22 (41) (1), Zagreb (1987), pp. 53-67

B. STRUČNI RADOVI

[**1**] *Pregled razvoja matematike u Bosni i Hercegovini*, Matematička biblioteka, 20, Beograd (1963), pp. 101-105.

[**2**] *Neke primjedbe o L'Hôspitalovom pravilu*, Bilten Društva matematičara, fizičara i astronoma BiH, 15, Sarajevo (1971), pp. 1-6.

[**3**] *Istorijski osvrt na dosadašnji razvojni put naučnih istraživanja u matematici u Bosni i Hercegovini,* Savjetovanje o naučnom radu u oblasti matematike, Sarajevo, 15. 12. 1978, Posebna izdanja XLVI Odjeljenja prirodnih i matematičkih nauka ANUBiH, Knj. 7, Sarajevo (1979), pp. 11-27.

[**4**] *O naučnom radu u oblasti matematičkih nauka u Bosni i Hercegovini*, Savjetovanje: Fundamentalna i primjenjena istraživanja u nauci i strategija naučnog razvoja u Bosni i Hercegovini, Sarajevo, januar 1980, ANUBiH, pp. 33-43.

anu monografija FINAL PRINT.indd 45 6/16/2023 1:56:57 PM

anu monografija FINAL PRINT.indd 46 6/16/2023 1:56:57 PM



Manojlo Maravić

(*Drežnica 1919 – Beograd 2000*)

Bogata nastavna i naučna djelatnost akademika Manojla Maravića, započeta sredinom pedesetih godina prošlog vijeka, vezana je gotovo isključivo za Sarajevo i Univerzitet u Sarajevu. Njegova aktivna nastavna djelatnost trajala je do njegovog odlaska u penziju (1979), a naučna aktivnost do izbijanja posljednjeg rata i napuštanja Sarajeva 1992. Za svo vrijeme, paralelno s njegovim razvojem, a uz značajan njegov uticaj i doprinos, tekao je i sveukupan razvoj matematike na Univerzitetu u Sarajevu i u Bosni i Hercegovini. Po doprinosu nauci i univerzitetskoj nastavi bio je jedan od najistaknutijih matematičara kod nas, kao i prvi matematičar sa Univerziteta u Sarajevu koji je stekao doktorat iz matematike na tom Univerzitetu.

Život Manojla Maravića je počeo 17. novembra 1919. godine ili, kako se u ono vrijeme pamtilo, četiri dana prije Aranđelov dana, u Drežnici (sada R. Hrvatska). Toga dana je u kući *Jove Maravića Nikolića* (nazvan po selu Nikolići) njegova supruga *Sara*, rođena *Zrnić*, prije vremena rodila njihovo prvo dijete – dječaka koji je ubrzo kršten kao Mane, po stricu, ali ga je sveštenik upisao pod imenom Manojlo. Kasnije su se rodile još dvije djevojčice, Manetove sestrice *Ljubica* i *Mira*, za koje je ostao vezan cijelog života.

Pošto su ga do polaska u školu svi zvali Mane, prvi dan u školi mu je počeo neslavno, jer se nije odazvao na prozivku učitelja. Tako je saznao da mu je nesuđeno ime zapravo samo nadimak. Ali čim je počela nastava, dječak Mane se istakao u većini predmeta, a posebno u matematici.

2010 Mathematics Subject Classification: 01A70, 01A65, 40-XX, 42-XX, 35J05, 35P05, 42A24, 26A12
Key words and phrases: Biographies, Bibliographies; Sequences, series and summability, Fourier Analysis, Laplace operator, General spectral theory, (Summability of) Fourier series, Slowly varying function

anu monografija FINAL PRINT.indd 47 6/16/2023 1:56:57 PM



Učitelji i đaci škole u centru Drežnice, 1927. M. Maravić je osmi, najviši u zadnjem redu.

Mane je sa svojim školskim drugovima od svog sela Nikolići svaki dan pješačio pet kilometara do škole koja se nalazila u centru Drežnice. Pored svih poteškoća, može se reći da je njegovo djetinjstvo bilo sretno i lijepo.



Crkva i škola u Drežnici koju je pohađao Manojlo Maravić

Poslije završene osnovne škole, dječak Mane se, da bi produžio školovanje u Ogulinu, morao odvojiti od kuće i porodice. Mane je bio pametan i bistar dječak. Od samog početka bio je svjestan svog slabijeg materijalnog stanja, jer je bilo đaka koji su putovali sa svojim roditeljima i tako upoznavali evropske gradove, za koje on nije nikada ni čuo, ali je zato on, na časovima matematike bio ne samo jako dobar nego bolji od svih. Kasnije će i on upoznati sve te gradove, a u mnogi-

anu monografija FINAL PRINT.indd 48 6/16/2023 1:56:57 PM



Gimnaziju u Karlovcu koju je završio M. Maravić, završio je i N. Tesla

ma će gostovati i držati predavanja, po pozivu. Nakon četverogodišnjeg školovanja u Ogulinu, koje je završio 1934. godine s odličnim uspjehom, želio je da se upiše u gimnaziju. U intervjuu, koji je sa njim za *Oslobođenje* vodio novinar I. Kalkan, govorio je i o problemima koji su njegov upis u gimnaziju činili neizvjesnim: „Veliko je pitanje bilo da li ću poslije male mature otići u gimnaziju, jer materijalne prilike nisu bile najpovoljnije za nastavljanje školovanja. Za učenje su bila teška vremena. Nije bilo ni knjiga. Pisalo se i računalo na malim priručnim tablama. No, ipak sam se upisao u gimnaziju u Karlovcu" [L:17].

Tako dječak Mane produžava školovanje u Karlovcu, i to u istoj gimnaziji koju je završio i njegov veliki zemljak Nikola Tesla. I u Karlovcu je Manojlo Maravić stanovao privatno, što je porodicu koštalo oko 500 dinara, ali Mane je, da bi pomogao ocu, i sam zarađivao nešto novca dajući instrukcije drugim đacima.

Manetovo rodno mjesto – Drežnica (Partizanska Drežnica, do raspada Jugoslavije) geografski je smješteno na tromeđi Gorskog Kotara, Hrvatskog primorja i Like, ali ne pripada ni jednom od ova tri područja [L:15]. Nepunu godinu prije njegovog rođenja, nakon raspada velike Austrougarske monarhije i tek okončanog Prvog svjetskog rata, Drežnica je ušla u sastav novoosnovane Kraljevine Srba, Hrvata i Slovenaca.

Mane je već u gimnaziji toliko zavolio matematiku, tako da se već tada opredijelio da je i studira. Inače, jednom je kroz šalu rekao da su mladi iz njegovog kraja često produžavali školovanje zahvaljujući stipendijama na teološkim ili vojnim školama, ali „ja nisam mogao biti vojnik, zbog visine, a ni pop, pošto nisam lijepo pjevao".

anu monografija FINAL PRINT.indd 49 6/16/2023 1:56:57 PM

Tako se odmah po završetku gimnazije, 1938. godine, upisao na studij matematike – grupa teorijska matematika na Filozofskom fakultetu u Beogradu. Krajem septembra, kada je stigao u Beograd, nije imao obezbijeđen smještaj, ali je imao sreću da ga odmah zapazi prof. *Radivoj Kašanin*, koji je pomagao studentima koji su dolazili iz drugih krajeva Jugoslavije. Zahvaljujući njemu, Manojlo Maravić je dobio smještaj u Studentskom domu "Aleksandar Karađorđević", u kojem je imao izuzetno dobre uslove, kako za život, tako i za učenje. Studenta Maravića aprilski rat je zatekao na trećoj godini studija, u Beogradu. Pošto je Univerzitet zatvoren, on se vratio kući, u Drežnicu, gdje ga je dočekala vijest o stravičnom ustaškom teroru i da mu je ubijen otac. Sklonio se na Sušak, gdje je ostao dva mjeseca, do izbijanja ustanka, kada se vratio u Drežnicu i uključio u Narodnooslobodilačku borbu, u kojoj je učestvovao od septembra 1941. do oslobođenja 1945. godine. Recimo i to da je u toku rata bio šifrant i da je od običnog vojnika direktno unaprijeđen u čin kapetana. Kraj rata ga je zatekao u Mariboru, u činu majora Jugoslovenske narodne armije, gdje se 1946. godine demobilisao. Manojlo Maravić je nosilac Partizanske spomenice 1941.

Nakon demobilisanja vratio se u Beograd da nastavi studij koji završava 1947. godine i među prvim studentima dobija diplomu novoosnovanog Prirodno-matematičkog fakultetata Univerziteta u Beogradu. Zapažen kao izrazito talentovan i vrijedan student, M. Maravić je postavljen za demonstratora da bi, odmah po završetku studija, započeo univerzitetsko karijeru kao prvi asistent na Odseku za



Demonstrator Manojlo Maravić (zadnji red, 2. slijeva) s apsolventima matematike, Beograd, 1949.

matematiku novoosnovanog Prirodno-matematičkog fakulteta u Beogradu, i to na predmetu Kompleksna analiza, kod čuvenog profesora – akademika *Jovana Karamate*. U isto vrijeme je bio postavljen i za asistenta na Matematičkom institutu Srpske akademije nauka (SAN).

Osim toga, mladi matematičar Manojlo Maravić je bio angažovan i u Društvu matematičara, fizičara i astronoma NR Srbije, koje je u to vrijeme pokrenulo svoj časopis *Vesnik*. Prvi glavni urednik tog časopisa je bio njegov profesor Jovan Karamata, a jedan od članova Uređivačkog odbora čuveni profesor Pavle Savić, koji je, zajedno s Irène Joliot-Curie „bio na pola koraka do Nobelove nagrade". Za prvi broj časopisa Manojlo Maravić je napisao jedan od dva uvodna članka *Naši pali drugovi* [B:5], u kojem je govorio o Beogradskom univerzitetu, koji je i prije Drugog svjetskog rata bio centar naprednog omladinskog pokreta, i o studentima koji su pali, boreći se za slobodu ili kao žrtve fašističkog terora. Na poslovima asistenta Prirodno-matematičkog fakulteta u Beogradu i Matematičkog Instituta SAN ostao je do decembra 1949. godine, kada prelazi na dužnost u JNA, na kojoj ostaje do juna 1952.

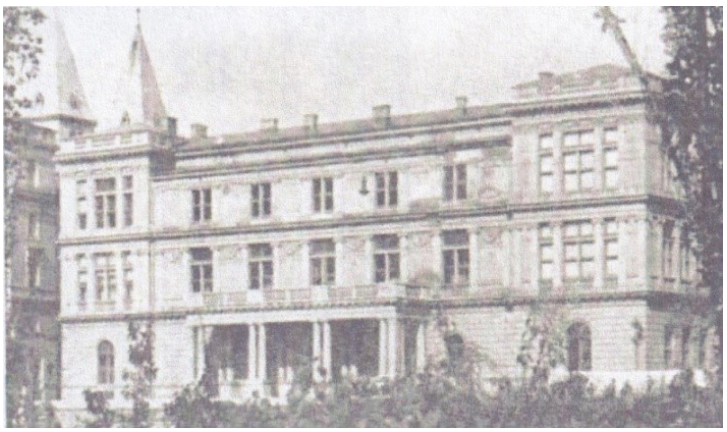
Teško je reći zašto je prof. Maravić napustio posao asistenta, koji je bio kao stvoren za njega – posao iz snova, s obzirom da je pred njim bila blistava univerzitetska karijera i da je matematika, još od đačkih dana, bila njegovo životno opredjeljenje. Koliko sam ga ja poznavala, mislim da je u pitanju mogao biti samo patriotizam mladog čovjeka koji nije mogao odbiti poziv Armije kojoj su trebali mladi, obrazovani i nadasve odani ljudi. Ta odluka je, međutim, bila kobna po njega, jer je uskoro „stigla zlokobna 1948. godina" i Rezolucija Informbiroa.

Major Manojlo Maravić je uhapšen 8. marta 1952. godine i sproveden u Istražni zatvor u Beogradu, u kom je proveo tri mjeseca. Jedina „njegova krivica" bila je što nije prijavio svog zemljaka – pukovnika kod kog je stanovao. Uhapšen je, iako ga ovaj tokom teških saslušavanja i ispitivanja nije ni spomenuo. I pored toga što protiv njega nije bilo ni optužbi, ni dokaza, presudom Vojno-disciplinskog suda oduzet mu je čin majora i razriješen je dužnosti u JNA. Tako je ostao bez čina, bez posla, bez perspektive. Bila su to teška vremena za Manojla Maravića, kao i za našu zemlju. Našla se u opasnosti. Trebalo ju je braniti od dojučerašnjih saveznika Rusa. Nije bilo vremena da se provjeravaju stavovi i opredjeljenja pojedinaca, tako da su se, na udaru, znali često naći i oni najodaniji, koji su se, sticajem okolnosti, našli na nekom mjestu ili nešto čuli, a nisu prijavili – patrioti poput Manojla Maravića. Iako je o tom periodu svog života rijetko pričao, jednom je rekao: „Srećom da me nisu poslali u rodnu Drežnicu, jer je tamo još uvijek bilo puno križara, a ja bih zbog svoje visine bio lako uočljiv".

Bio je to izuzetno težak period u životu prof. Manojla Maravića. Srećom, to nije dugo trajalo. Zahvaljujući Dušanki Kovačević, visokopozicioniranoj partizanki – ministarki obrazovanja u Vladi NRBiH i supruzi njegovog kolege sa studija Milenka Štekovića, akademsku karijeru je, po drugi put, započeo u Sarajevu. Jednu školsku godinu – od oktobra 1952. do juna 1953. godine, radio je kao profesor

anu monografija FINAL PRINT.indd 51 6/16/2023 1:56:57 PM

matematike na Prvoj muškoj gimnaziji. Među njegovim đacima je bilo puno onih koji će postati slavni: Momo Kapor, književnik, Slobodan Loga i Boriša Starović, profesori Medicinskog fakulteta i akademici, itd. Osim toga, honorarno je bio angažovan i kao asistent na Katedri za matematiku Filozofskog fakulteta i Tehničkom fakultetu – na koji ga je pozvao prof. Emil Janaček, koji je nešto kasnije postavljen za dekana novoosnovanog Građevinskog fakulteta. U junu mjesecu 1953. godine M. Maravić je izabran za stalnog asistenta Tehničkog fakulteta Univerziteta u Sarajevu, a u oktobru iste godine za docenta tog fakulteta.



Srpsko-pravoslavna Bogoslovija do Drugog svjetskog rata, poslije rata Tehnički, a sada Ekonomski fakultet

Tako je počela njegova dugogodišnja karijera na Građevinskom fakultetu, kome će ostati vjeran tokom cijelog svog radnog vijeka, iako je, kada je došlo do dezintegracije matematike po fakultetima, mogao da ostane na Prirodno-matematičkom fakultetu, na kojem je takođe držao predavanja, kako na osnovnom studiju, tako i na postdiplomskom.



M. Maravić, na Tehničkom fakultetu - Građevinski odsjek, 60-tih godina prošlog vijeka

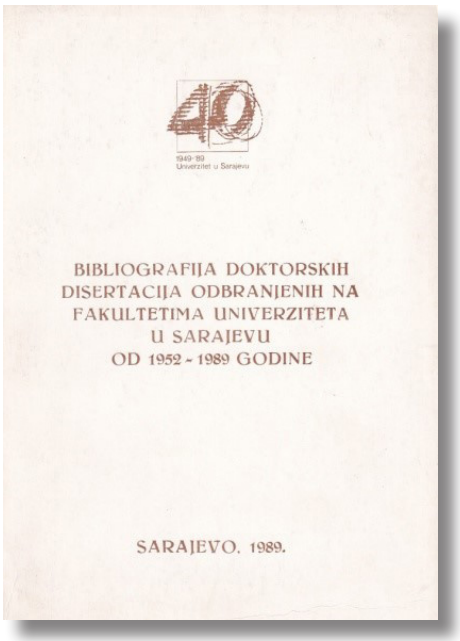
M. Maravić je bio jedan od prvih nastavnika i prvih naučnika u oblasti matematike u Sarajevu i u BiH. Doktorirao je 1956. godine na Prirodno-matematičkom odsjeku Filozofskog fakulteta Univerziteta u Sarajevu, odbranivši doktorsku disertaciju *O jednom postupku zbirljivosti divergentnih redova*, koju je uradio pod mentorstvom *Vojislava G. Avakumovića*, u to vrijeme, pored J. Karamate, jednog od najznačajnijih beogradskih matematičara. Manojlo Maravić je bio prvi matematičar i 13. naučnik iz BiH koji je stekao doktorat na Univerzitetu u Sarajevu [L:37].

U periodu od januara do maja 1960. godine, M. Maravić je bio na studijskom boravku na Univerzitetu u Londonu, u toku kojeg je učestvovao u radu naučnog seminara King's College. Po povratku iz Engleske, 1. marta 1961. godine izabran je za vanrednog, a 1967. za redovnog profesora

anu monografija FINAL PRINT.indd 52 6/16/2023 1:56:57 PM

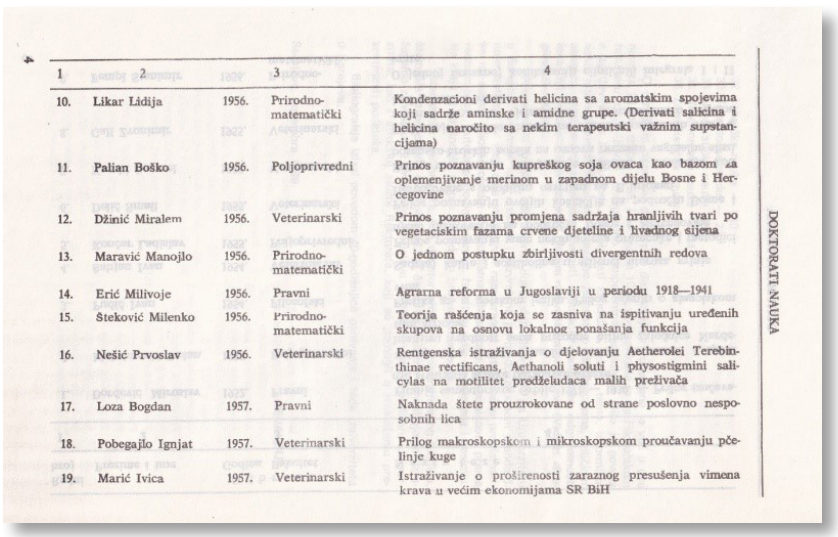
Građevinskog fakulteta u Sarajevu. Tokom dvije školske godine (1962/63. i 1963/64.) Manojlo Maravić je, preko Jugoslovenske komisije za kulturne veze s inostranstvom, boravio u Sudanu da bi na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Kartumu (Karthum) predavao matematiku, a od 1965-1967. godine bio je, po pozivu, gostujući profesor na Wayne State University u Detroitu, Michigen (SAD).

Akademik Manojlo Maravić je objavio četrdesetak naučnih radova. Njegovi naučni radovi pobuđivali su zapažen interes, kako jugoslovenskih naučnika, tako i onih širom svijeta i doprinijeli da bude pozvan za gostujućeg profesora, što u to vrijeme nije bilo često.



Bibliografija doktorskih disertacija odbranjenih na fakultetima Univerziteta u Sarajevu (*1989*)

Naučna djelatnost akademika Manojla Maravića odvijala se u dvjema važnim oblastima matematičke analize: *teoriji sumabilnosti i Fourierovoj analizi*, čija ljepota se ogledala u tome što je bila „mlada", ali sa starim korijenima. Fourierova analiza je začeta u drevnim istraživanjima Francuskog matematičara Josepha Fouriera, objavljenim u njegovom eseju *Analitička teorija toplote*, iz 1822. Po njemu je kasnije ta analiza dobila ime *Fourierova analiza*. U vrijeme, kada se M. Maravić počinjao njom baviti, Fourierova analiza je, zbog široke lepeze primjena, već bila nezaobilazan kurs na postdiplomskim studijima tehničkih fakulteta.



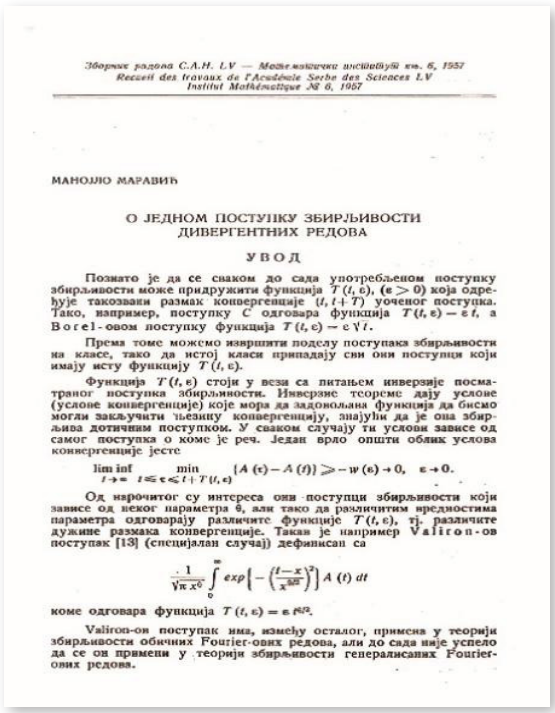
1	2	3	4	
10.	Likar Lidija	1956.	Prirodno-matematički	Kondenzacioni derivati helicina sa aromatskim spojevima koji sadrže aminske i amidne grupe. (Derivati salicina i helicina naročito sa nekim terapeutski važnim supstancijama)
11.	Palian Boško	1956.	Poljoprivredni	Prinos poznavanju kupreškog soja ovaca kao bazom za oplemenjivanje merinom u zapadnom dijelu Bosne i Hercegovine
12.	Džinić Miralem	1956.	Veterinarski	Prinos poznavanju promjena sadržaja hranljivih tvari po vegetaciskim fazama crvene djeteline i livadnog sijena
13.	Maravić Manojlo	1956.	Prirodno-matematički	O jednom postupku zbirljivosti divergentnih redova
14.	Erić Milivoje	1956.	Pravni	Agrarna reforma u Jugoslaviji u periodu 1918—1941
15.	Šteković Milenko	1956.	Prirodno-matematički	Teorija rašćenja koja se zasniva na ispitivanju uređenih skupova na osnovu lokalnog ponašanja funkcija
16.	Nešić Prvoslav	1956.	Veterinarski	Rentgenska istraživanja o djelovanju Aetherolei Terebinthinae rectificans, Aethanoli soluti i physostigmini salicylas na motilitet predželudaca malih preživača
17.	Loza Bogdan	1957.	Pravni	Naknada štete prouzrokovane od strane poslovno nesposobnih lica
18.	Pobegajlo Ignjat	1957.	Veterinarski	Prilog makroskopskom i mikroskopskom proučavanju pčelinje kuge
19.	Marić Ivica	1957.	Veterinarski	Istraživanje o proširenosti zaraznog presušenja vimena krava u većim ekonomijama SR BiH

DOKTORATI NAUKA

Bibliografija: M. Maravić je upisan na 4. stranici pod rednim brojem 13.

anu monografija FINAL PRINT.indd 53 6/16/2023 1:56:57 PM

Dakle, svojom doktorskom disertacijom [1], Manojlo Maravić je započeo istraživanja u oblasti *teorije sumabilnosti*, za koju je ostao trajno vezan, bilo da je u njoj započinjao nova istraživanja, bilo da je njene rezultate primjenjivao u drugim oblastima matematike. Intenzivno je radio i postizao značajne rezultate i u Fourierovoj analizi, i rješavao za nju vezana pitanja iz *teorije diferencijalnih i parcijalnih diferencijalnih jednačina*. Tu se posebno bavio primjenama teorije sumabilnosti na višestruke Fourierove redove i sumabilnošću razvitka funkcija po sopstvenim funkcijama Laplaceova operatora u n-dimenzionalnom prostoru. Inače, tom problematikom su se – pored J. Karamate, V. Avakumovića i velikog broja drugih poznatih matematičara, učenika *Beogradske škole analize* – bavili i brojni drugi, veoma značajni, matematičari širom svijeta, kao što su: E. C. Titchmarsh, B. M. Levitan, K. S. Chandrasekharan, P. S. Avadhani, S. Minakshisundaram, S. B. Bochner, R. Carleman, A. Pleijel, G. H. Hardy, J. E. Littlewood, D. Waterman, E. Stein, i dr.



Зборник радова С.А.Н. LV — Математички институт кн. 6, 1957
Recueil des travaux de l'Académie Serbe des Sciences LV
Institut Mathématique № 6, 1957

МАНОЈЛО МАРАВИЋ

О ЈЕДНОМ ПОСТУПКУ ЗБИРЉИВОСТИ ДИВЕРГЕНТНИХ РЕДОВА

УВОД

Познато је да се сваком до сада употребљеном поступку збирљивости може придружити функција $T(t, \varepsilon)$, $(\varepsilon > 0)$ која одређује такозвани размак конвергенције $(t, t+T)$ уоченог поступка. Тако, например, поступку C одговара функција $T(t, \varepsilon) = \varepsilon t$, а Borel-овом поступку функција $T(t, \varepsilon) = \varepsilon \sqrt{t}$.

Према томе можемо извршити поделу поступака збирљивости на класе, тако да истој класи припадају сви они поступци који имају исту функцију $T(t, \varepsilon)$.

Функција $T(t, \varepsilon)$ стоји у вези са питањем инверзије посматраног поступка збирљивости. Инверзне теореме дају услове (услове конвергенције) које мора да задовољава функција да бисмо могли закључити њезину конвергенцију, знајући да је она збирљива дотичним поступком. У сваком случају ти услови зависе од самог поступка о коме је реч. Један врло општи облик услова конвергенције јесте

$$\liminf_{t \to \infty} \min_{t \leq \tau \leq t + T(t, \varepsilon)} \{A(\tau) - A(t)\} \geq -w(\varepsilon) \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Од нарочитог су интереса они поступци збирљивости који зависе од неког параметра θ, али тако да различитим вредностима параметра одговарају различите функције $T(t, \varepsilon)$, тј. различите дужине размака конвергенције. Такав је например Valiron-ов поступак [13] (специјалан случај) дефинисан са

$$\frac{1}{\sqrt{\pi x^{\theta}}} \int_0^{\infty} exp\left\{-\left(\frac{t-x}{x^{\theta/2}}\right)^2\right\} A(t)\, dt$$

коме одговара функција $T(t, \varepsilon) = \varepsilon t^{\theta/2}$.

Valiron-ов поступак има, између осталог, примена у теорији збирљивости обичних Fourier-ових редова, али до сада није успело да се он примени у теорији збирљивости генералисаних Fourier-ових редова.

Doktorska disertacija M. Maravića:
Zbornik radova S.A.N. LV-Mat. Inst. Beograd, 1957.

U radovima koji pripadaju oblasti teorije sumabilnosti [1, 4-6, 8, 34], M. Maravić je postigao niz značajnih rezultata od kojih posebno izdvajamo rad pod rednim brojem [1], u kojem je proučavao G_{Θ}^{κ}-postupak sumabilnosti i njegovu primjenu u teoriji sumabilnosti generalisanih Fourierovih redova. Od posebnog interesa su oni od G-postupaka sumabilnosti, koji zavise od parametra θ, tako da različitim vrijednostima tog parametra odgovaraju različite dužine intervalâ konvergencije. Takav je, upravo, postupak G_{Θ}^{κ}, kod kojeg je interval konvergencije oblika $(t, t + \varepsilon t^{\theta})$, za svako $\kappa > 0$.

U svojoj doktorskoj disertaciji [1], M. Maravić je:

– dokazao jednu teoremu koja daje granična svojstva postupaka sumabilnosti, kada su zadana odgovarajuća granična svojstva funkcije – poznata kao direktna teorema;

– našao vezu između Rieszovog i G_{Θ}^{κ} – postupka sumabilnosti, koja igra važnu ulogu u primjenama postupka G_{Θ}^{κ} na probleme sumabilnosti generalisanih Fourierovih redova;

anu monografija FINAL PRINT.indd 54 6/16/2023 1:56:57 PM

- dokazao teoremu u kojoj se vrši poređenje G_Θ^κ - postupaka za različite vrijednosti κ, tj. dokazao da ako funkcija $A(x)$ i njena transformacija $G_\Theta^\kappa(A;x)$ zadovoljavaju izvjesne uslove tipa „O“ ili tipa „o“, tada i $G_\Theta^r(A;x)$ sredine te funkcije, pri čemu je $0 < r < \kappa$, zadovoljavaju izvjestan uslov koji je povezan s uslovima koje ispunjavaju funkcije $A(x)$ i $G^\kappa{}_\theta(A;x)$;
- polazeći od pretpostavki da:

$$G_\Theta^\kappa(A;x) \to A, \quad \text{kada } x \to \infty \text{ i } A(x) = O(1), \quad \text{kada } x \to \infty$$

dokazao je da je $A(x^b)$ $[b = (1-\theta)^{-1}]$ G_Θ^κ-sumabilan ka A, gdje je G_Θ^κ jedan postupak s Wienerovim jezgrom, a zatim, pomoću tog rezultata dobio jednu teoremu inkluzije, koja, zbog pretpostavke $A(t) \to A$, kada $t \to \infty$ nije „čista inkluzija“ te, pomoću tog rezultata, oslanjajući se na Wienerovu teoriju, došao do Tauberove teoreme za G_Θ^κ-postupak, tj. da:

$$G_\Theta^\kappa(A;x) \to A, \text{ kada } x \to \infty, \text{ uz još jedan uslov konvergencije}$$
$$\Rightarrow \quad A(t) \to A, \text{ kada } t \to \infty.$$

Od rezultata dobivenih u radu [1] naročito treba istaći Maravićevu teoremu konveksnosti za G_Θ^κ-postupak sumabilnosti. Prvu teoremu konveksnosti je dokazao mađarski matematičar M. Riesz za postupak koji je kasnije po njemu nazvan Rieszovim postupkom sumabilnosti. M. Maravić je dokazao drugu teoremu konveksnosti, dok je autorka ovog teksta (M. Vuković) dokazala treću teoremu konveksnosti.

U radovima [2, 3, 13, 17, 19, 21, 23], koji se odnose na probleme G_Θ^κ - sumabilnosti razvitaka funkcija iz klase L^2, po sopstvenim funkcijama Laplaceovog operatora, u n-dimenzionalnom prostoru, M. Maravić je proučavao i riješio više problema. Od navedenih radova posebno ću izdvojiti rad [2] i rad [3], koji se na njega nadovezuje, jer ga je, zahvaljujući rezultatima dobivenim u njima, D. Waterman pozvao za gostujućeg profesora na Wayne State University u Detroitu (SAD).

U radu [2] M. Maravić je, polazeći od rezultata Avadhania o sumabilnosti generalisanih Fourierovih redova, pomoću Rieszovog postupka, i teoreme, kojom je data veza između Rieszovog i G_Θ^κ-postupka sumabilnosti, dokazao daje G_Θ^κ-sumabilnost generalisanih Fourierovih redova, u prostoru E_n, lokalna osobina funkcije $f(Q) \in L^2(D)$, u tački P, ako je:

$$\tfrac{1}{2} < \theta < 1 \text{ i } \kappa > \tfrac{1}{2}(n+1)(2\theta-1)^{-1}.$$

anu monografija FINAL PRINT.indd 55 6/16/2023 1:56:58 PM

Pošto klasa neprekidnih funkcija ne zadovoljava ovu lokalnu osobinu, od funkcije $f(Q)$ se, u posmatranoj tački P, mora zahtijevati više od neprekidnosti. Teorema koju je M. Maravić dokazao u vezi s tim pitanjem je u izvjesnom smislu analogon Hardy–Littlewoodove teoreme o B-sumabilosti, odnosno Morganove teoreme o Valironovoj sumabilnosti običnih Fourierovih redova.

U radu [3], M. Maravić, za funkciju $f(Q) \in L^2(D)$ i parametre θ i κ, koji zadovoljavaju iste uslove kao u radu [2], polazeći od jednog Levitanovog rezultata, dolazi do zaključka: da bi red $\Sigma a_n \Phi_n(P)$ bio G_Θ^κ-sumabilan ka $f(P)$, potrebno i dovoljno je da za jedno ρ $(0 < \rho < \rho_P)$, funkcija $\alpha_0(t)$ bude G_Θ^κ -sumabilna ka nuli. M. Maravić koristi u svom dokazu Levitanov metod da bi odredio interval, kojem treba da pripadaju parametri θ i κ da bi G_Θ^κ - sumabilnost generalisanih Fourierovih redova bila lokalna osobina funkcije $f(Q)$, u tački $P \in D$.

Iz navedene grupe radova M. Maravića treba svakako spomenuti i radove [17, 23] koji se odnose na spektralnu funkciju Laplaceova operatora. U njima, polazeći od rezultata Avakumovića, Tichmarsha, Levitana, Avadhania i Minakshi-sundarama, M. Maravić proširuje brojne klasične rezultate i kroz njih otvara niz novih pitanja i istraživanja.

Skoro svi ostali naučni radovi M. Maravića pripadaju teoriji višestrukih Fourierovih redova funkcijâ, iz klase L^1. Polazeći od fundamentalnih rezultata Bochnera i Chandrasakharana, M. Maravić je dobio niz rezultata u ovoj oblasti, među kojima posebno mjesto, pripada poopštenju Osnovne Bochnerove teoreme [9]. U njoj je izrazio Rieszove sredine $S_x^\delta(Q)$ reda δ, *višestrukog Fourierovog reda,* posmatrane funkcije f, pomoću njene sferne sredine $f_P(t)$ od f, na sferi radijusa t, s centrom u tački $P = (x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ)$, te definisao sfernu sredinu $f_{P,s}(t)$ reda $s \geq 0$. Zatim je dokazao dvije teoreme kojim se tvrdi da se, uz određene uslove, Rieszova sredina S_x^δ, reda δ, viš*estrukog Fourierovog* reda, funkcije f, može asimptotski aproksimirati, u jednoj određenoj formi, ako se sferna sredina $f_{P,s}(t)$ od f, može asimptotski aproksimirati u određenoj formi, i obrnuto.

Koristeći vezu između asimptotskog ponašanja ove sredine sa ponašanjem jedne Karamatine sporo promjenljive funkcije, M. Maravić je izveo zaključak kako o asimptotskom ponašanju Rieszovih, tako i o ponašanju uopštenih Bochnerovih sredina sfernih parcijalnih suma višestrukih Fourierovih redova. Niz takvih rezultata dobio je i za izvodne višestruke Fourierove redove [14, 15, 23, 28].

M. Maravić je, dalje, proučavao Φ-sumabilnost višestrukih Fourierovih redova [11] i Φ-sumabilnost redova, izvedenih iz višestrukog Fourierovog reda funkcije f, uzastopnom primjenom Laplaceova diferencijalnog operatora [13] i dokazao: ako je sferna sredina višeg reda funkcije f ograničene varijacije, u intervalu $(0, \infty)$, onda je njen višestruki Fourierov red Φ-sumabilan. U ovom rezultatu je (kao specijalan slučaj) sadržan i ranije dokazani stav za Rieszovu sumabilnost višestrukih Fourierovih redova, u slučaju kada je red Rieszovog postupka veći od jednog broja, koji zavisi od dimenzije n prostora E_n [11].

anu monografija FINAL PRINT.indd 56 6/16/2023 1:56:58 PM

U radu [13], koristeći *Bochnerov fundamentalni obrazac*, kojim je data veza između Φ- sredine sfernih parcijalnih suma i sferne sredine funkcije f, M. Marković je došao do zaključka da je:

a) Φ-sumabilnost takvih izvodnih Fourierovih redova, u posmatranoj tački, jedna lokalna osobina;

b) ako asimptotsko ponašanje sferne sredine funkcije $f(X)$ stoji u vezi s asimptotskim ponašanjem jedne sporo promjenljive funkcije, tada je asimptotsko ponašanje izraza, dobijenog primjenom Laplaceova diferencijalnog operatora, na Φ-sredinu sfernih parcijalnih suma, posmatranog višestrukog Fourierovog reda, povezano s asimptotskim ponašanjem pomenute sporo promjenljive funkcije.

M. Marković je u svojim radovima započinjao nova istraživanja, a nerijetko dobivene rezultate primjenjivao i u drugim oblastima matematike. Posebno ćemo istaći dva takva rada [7] i [16]. Rad [7] – kratka monografija, koju je M. Marković napisao u koautorstvu s B. Martićem, govori o procjeni sopstvenih vrijednosti sopstvenih funkcija i Greenove funkcije rubnog problema oscilujuće membrane. U njoj, nakon konciznog pregleda opšte problematike, autori navode najnovije rezultate R. Carlemana, T. Couranta, S. Minakshisundarama, A. Pleijela i V. Avakumovića o asimptotskoj raspodjeli sopstvenih vrijednosti i o asimptotskom ponašanju sopstvenih funkcija $w_m(P)$ rubnog problema oscilujuće membrane, u dvodimenzionalnom prostoru E_2, a zatim iznose neke novije rezultate o sumabilnosti razvitka funkcije $f(Q) \in L^2(D)$ po ortogonalnim sopstvenim funkcijama rubnog problema oscilujuće membrane.

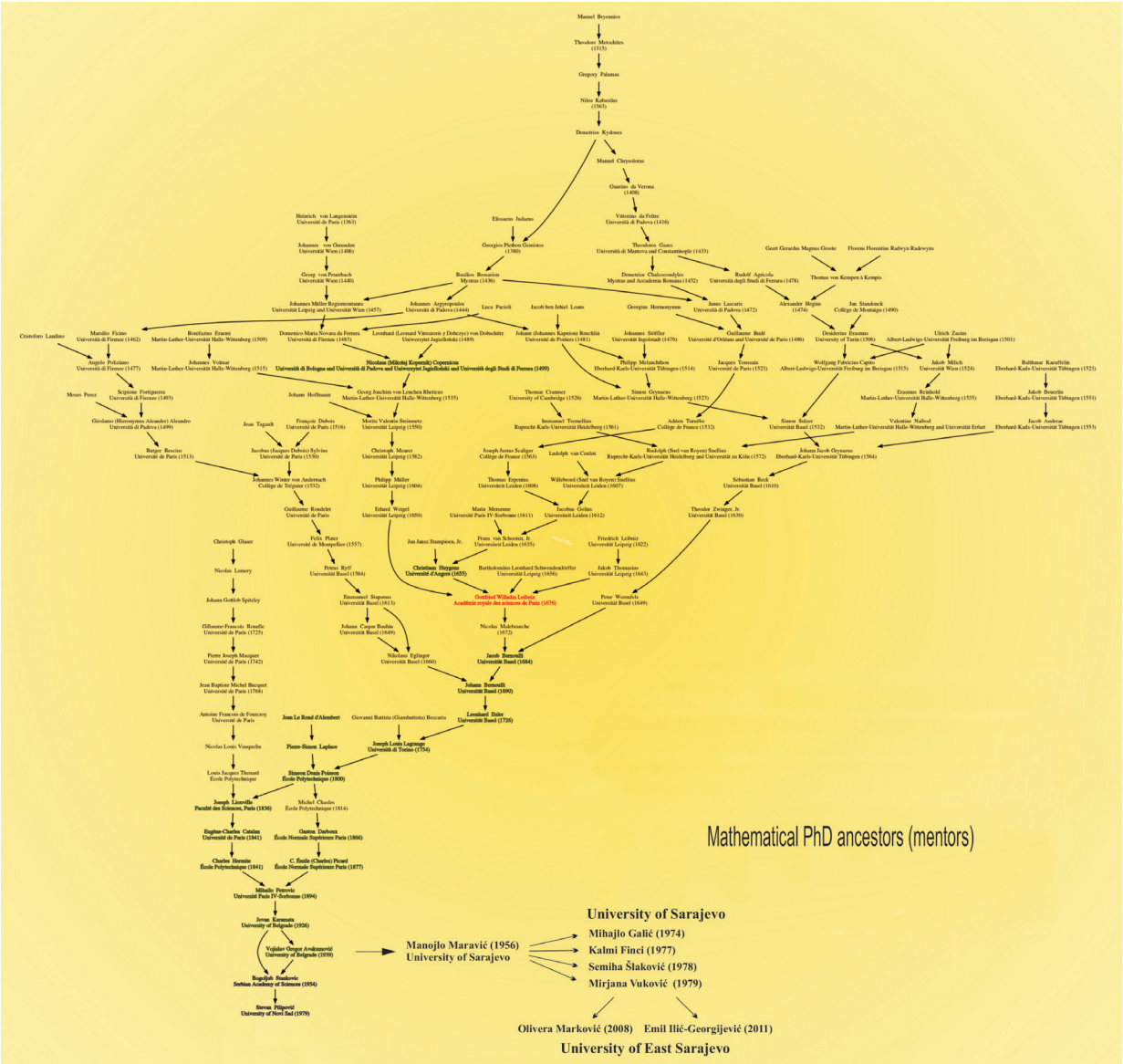
U radu [16], pisanom u koautorstvu sa D. Vukeljom, daje se proračun nestacionarnih temperaturnih polja u čvrstim tijelima nestacionarne zapremine, u predjelu rezanja metala koji je sačinjen na osnovu primjene toplotnog potencijala prostog i dvostrukog sloja. Proračuni u radu su obavljeni pomoću elektronskih računarskih mašina (ELIOTT 803B). Primjenom matematičkog aparata na ovaj problem, dobija se sistem od dvije linearne integralne jednačine Volterraovog tipa druge vrste, koje se ne mogu uvijek riješiti u zatvorenom obliku, tako da se, u tu svrhu, koriste približne metode. U praksi, kada su rubni uslovi zadani pomoću jednostavnijih izraza, dobija se jedna integralna jednačina, čime se problem matematički znatno pojednostavljuje, jer se za rješavanje te jednačine može koristiti metoda Laplaceove transformacije.

Posljednji radovi akademika Maravića vezani su za Rieszovu sumabilnost kompleksnog reda višestrukih Fourierovih redova, koju je prvi uveo poznati američki matematičar Elias Stein [27, 33].

Rad [27] M. Maravića je vezan za Rieszove sredine $S_w^{\delta}(Q)$ tipa $m^2 = m_1^2 + \ldots + m_n^2$ i kompleksnog reda δ $(= \sigma + i\tau)$, sferno sumiranog višestrukog Fourierovog reda u kojem dokazuje da je Rieszova sumabilnost kompleksnog reda δ, tog Fourierovog reda, funkcije f, u posmatranoj tački $Q = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, lokalna osobina funkcije f, odnosno njene sferne sredine f_s, u tački Q, kad god je $\mathrm{Re}(\delta) > k + s + \frac{1}{2}$.

anu monografija FINAL PRINT.indd 57 6/16/2023 1:56:58 PM

U rješavanja problema, koje je sam izučavao, akademik Maravić je uključio i svoje doktorante: M. Galića (1974), K. Fincija (1977), S. Šlaković (1978) i autoricu ovog teksta M. Vuković (1979) [L: 26, 27]. Pored ova četiri doktoranta, u vrijeme gostovanja na Wayne State University, zajedno s profesorom Danielom Watermanom, bio je mentor još jedne doktorske disertacije.



Stablo Francuskih matematičara iz kojeg je iznikla Beogradska škola analize Mihaila Petovića Alasa, a iz nje i Sarajevska škola Manojla Maravića

anu monografija FINAL PRINT.indd 58 6/16/2023 1:57:00 PM

Manojlo Maravić

MathSciNet

Ph.D. University of Sarajevo 1956

Dissertation: *O jednom postupku zbirljivosti divergentnih redova*
(***On a Method of Summability of Divergent Series***)
Mathematics Subject Classification: 42—Fourier analysis
Advisor 1: **Vojislav Gregor Avakumović**
Students:

Name	School	Year	Descendants
Galić, Mihajlo	University of Sarajevo	1974	
Finci, Kalmi A.	University of Sarajevo	1977	
Šlaković, Semiha	University of Sarajevo	1978	
Vuković, Mirjana	University of Sarajevo	1979	**2**

Mathematics Genealogy Project: Manojlo Maravić

Posebno sam bila i ponosna i sretna kada sam na čuvenom Lomonosovu (*Moskovski državni univerzitet*) upoznala velikana Ruske matematike B. M. Levitana, koji mi je među jugoslovenskim matematičarima koje je upoznao preko njihovih radova i o kojim je govorio s poštovanjem, pored J. Karamate i V. Avakumovića, spomenuo i M. Maravića, uz još neke pripadnike *Beogradske škole matematičke analize*, kojoj preko prof. Maravića pripadam i ja.

Naučnoj problematici kojom se bavio M. Maravić je posvetio i svoju monografiju *Sumabilnost razvitka po sopstvenim funkcijama Laplace-ova operatora u n-dimenzionalnom prostoru*, koja je objavljena u ediciji „Djela“ Akademije nauka i umjetnosti Bosne i Hercegovine [B:1].

Monografija prof. Maravića je podijeljena na 3 glave i to:

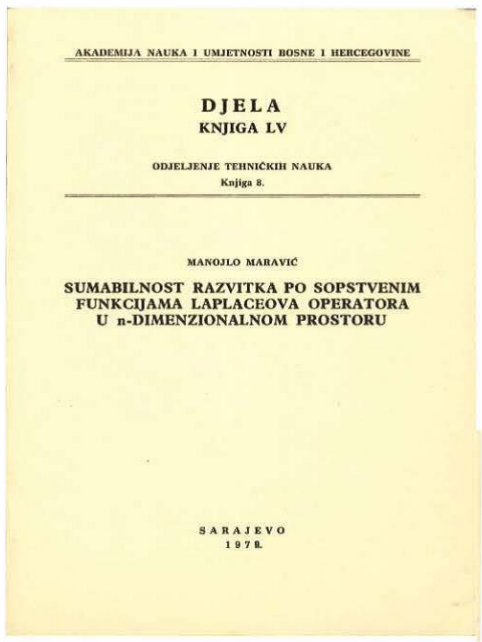
Glava 1. – Višestruki Fourierovi redovi ;

Glava 2. – Razvoj funkcije $f(Q)\in L^1$ po sopstvenim funkcijama rubnog problema oscilujuće membrane ;

Glava 3. – Razvoj funkcije $f(Q)\in L^2$ po sopstvenim funkcijama Laplaceova operatora.

Sada ćemo reći nešto o toj monografiji. S obzirom da se svakoj funkciji $f(x)$, integrabilnoj u razmaku $[0, \pi]$, može pridružiti jedan Fourierov red, čija konvergencija, u tački $x = x_o$, zavisi samo od njenog ponašanja, u okolini tačke x_o, ma kako ona bila mala, pitanje konvergencije Fourierovog reda u posmatranoj tački je *jedna lokalna osobina funkcije* $f(x)$, u toj tački, o kojoj govori fundamentalna Riemann-Lebesgueova lema.

anu monografija FINAL PRINT.indd 59 6/16/2023 1:57:00 PM



AKADEMIJA NAUKA I UMJETNOSTI BOSNE I HERCEGOVINE

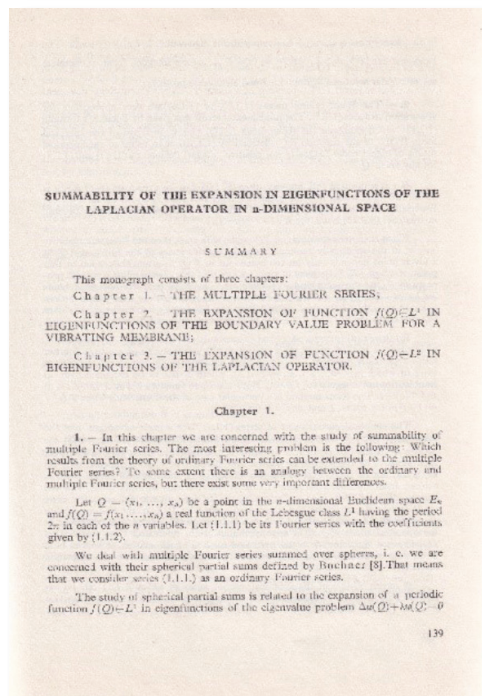
DJELA
KNJIGA LV

ODJELJENJE TEHNIČKIH NAUKA
Knjiga 8.

MANOJLO MARAVIĆ

SUMABILNOST RAZVITKA PO SOPSTVENIM FUNKCIJAMA LAPLACEOVA OPERATORA U n-DIMENZIONALNOM PROSTORU

SARAJEVO
1979.



SUMMABILITY OF THE EXPANSION IN EIGENFUNCTIONS OF THE LAPLACIAN OPERATOR IN n-DIMENSIONAL SPACE

SUMMARY

This monograph consists of three chapters:

Chapter 1. — THE MULTIPLE FOURIER SERIES;

Chapter 2. — THE EXPANSION OF FUNCTION $f(Q)\in L^1$ IN EIGENFUNCTIONS OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A VIBRATING MEMBRANE;

Chapter 3. — THE EXPANSION OF FUNCTION $f(Q)\in L^2$ IN EIGENFUNCTIONS OF THE LAPLACIAN OPERATOR.

Chapter 1.

1. — In this chapter we are concerned with the study of summability of multiple Fourier series. The most interesting problem is the following: Which results from the theory of ordinary Fourier series can be extended to the multiple Fourier series? To some extent there is an analogy between the ordinary and multiple Fourier series, but there exist some very important differences.

Let $Q = (x_1, \ldots, x_n)$ be a point in the n-dimensional Euclidean space E_n and $f(Q) = f(x_1, \ldots, x_n)$ a real function of the Lebesgue class L^1 having the period 2π in each of the n variables. Let (1.1.1) be its Fourier series with the coefficients given by (1.1.2).

We deal with multiple Fourier series summed over spheres, i. e. we are concerned with their spherical partial sums defined by Bochner [8]. That means that we consider series (1.1.1) as an ordinary Fourier series.

The study of spherical partial sums is related to the expansion of a periodic function $f(Q)\in L^1$ in eigenfunctions of the eigenvalue problem $\Delta u(Q)+\lambda u(Q)=0$

139

Monografija akademika Manojla Maravića, Djela ANUBiH, Sarajevo, 1979.

U prvoj glavi monografije se govori o sumabilnosti višestrukih Fourierovih redova funkcije $f(Q) = f(x_0, \ldots, x_n)$ koja je realna, L-integrabilna i periodična s periodom 2π, po svakoj nezavisno promjenljivoj. Do fundamentalnih rezultata u sumabilnosti višestrukih Fourierovih redova došao je S. Bochner, uvodeći sferne parcijalne sume tih redova, zahvaljujući kojim se oni mogu predstaviti kao obični Fourierovi redovi. Osim toga, pokazao je kako se mogu povezati razni postupci sumabilnosti koji imaju lokalnu osobinu, u primjeni na višestruke Fourierove redove. U ovu glavu monografije su uključeni rezultati radova [11, 12, 14, 20] M. Maravića.

U drugoj glavi se posmatra problem G_Θ^κ -sumabilnosti razvitka funkcije $f(Q)\in L^1(D)$, po sopstvenim funkcijama dvodimenzionalnog rubnog problema:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta u + \lambda u = 0, \text{ u } D \\ &u = 0, \quad \text{na rubu } B \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

i određuju θ i κ, za koje je ta sumabilnost jedna lokalna osobina funkcije $f(Q)$, u tački u kojoj se ona razvija. Za dobivanje ovih rezultata bitna je procjena Greenove funkcije, ovog problema, u kompleksnoj ravni λ, do koje je došao V. G. Avakumović.

Rieszov i G_Θ^κ - postupak sumabilnosti uspješno se primjenjuju na razvitak funkcije $f(Q)\in L^2(D)$, po sopstvenim funkcijama n-dimenzionalnog rubnog problema (1), o čemu se govori u trećoj glavi ove monografije. U dokazima teoremâ o Rieszovoj sumabilnosti tog razvitka, bitnu ulogu je igrala Avakumovićeva procjena zbira kvadrata sopstvenih funkcija posmatranog rubnog problema. *Avadhani* je pomoću Avakumovićove procjene i nekih Tichmarshovih

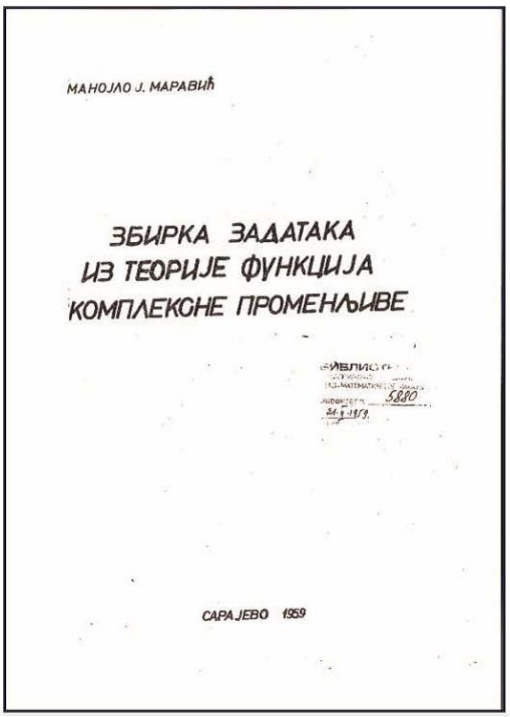
anu monografija FINAL PRINT.indd 60 6/16/2023 1:57:00 PM

osnovnih ideja, dokazao da je Rieszova sumabilnost tog razvitka jedna lokalna osobina funkcije $f(Q)$, u tački u kojoj se ona razvija, ako je red te sumabilnosti veći ili jednak $(n\text{-}1)/2$. Do tog rezultata je došao i B. M. Levitan.

Polazeći od rezultata *B. M. Levitana,* M. Maravić je dokazao teoreme o G_{Θ}^{κ} - sumabilnosti razvitka funkcije $f(Q)$ i odredio θ i κ, za koje je ta sumabilnost jedna lokalna osobina te funkcije. I na kraju je razmatrao G_{Θ}^{κ} - sumabilnost spektralne funkcije, spomenutog rubnog problema i njenih izvoda [1, 17, 19, 23].

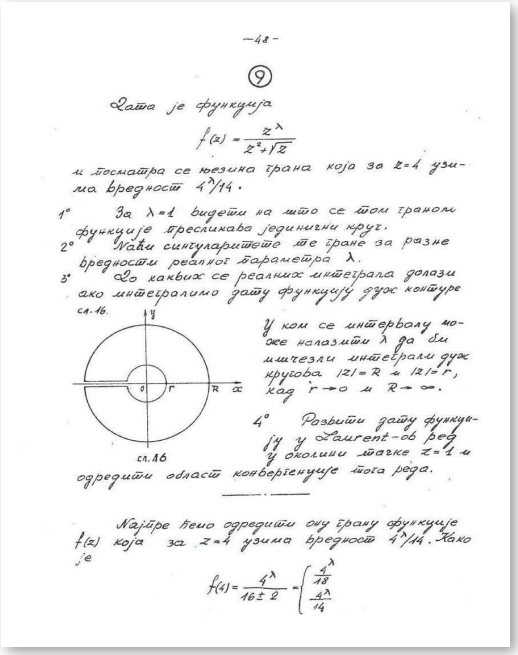
Monografija M. Maravića je izuzetno dobro ocijenjena u sva tri svjetska referativna žurnala. U prilično opširnom prikazu te monografije, u njemačkom referativnom žurnalu *Zentralblatt für Mathematik*, referent B. Crstici, između ostalog, ističe doktorske teze učenika *Sarajevske matematičke škole formirane oko akademika Maravića* [1979; Zbl. 0435. 42001], [L:7]. S obzirom da su svi njegovi doktoranti, kao i on sam, radili u oblasti *teorije sumabilnosti* i *Fourierove analize*, oni su zajedno s njim stvarno činili školu – *Sarajevsku školu teorije sumabilnosti* i *Fourierove analize*, kako je primjetio referent Crstici.

Akademik Manojlo Maravić se, pored naučnog, vrlo uspješno bavio i stručnim radom. Da bi pomogao studentima, u vrijeme kada nije bilo udžbeničke literature, napisao je dva izuzetno dobra udžbenika – skripta: *Zbirku rešenih problema iz matematike* I (za inženjere), u koautorstvu s B. Martićem [B:2] i *Zbirku rešenih zadataka iz teorije funkcija kompleksne promjenljive* [B:3], s originalnim zadacima koje je akademik Jovan Karamata sastavljao i davao na ispitima, u vrijeme


МАНОЈЛО Ј. МАРАВИЋ

ЗБИРКА ЗАДАТАКА
ИЗ ТЕОРИЈЕ ФУНКЦИЈА
КОМПЛЕКСНЕ ПРОМЕНЉИВЕ

САРАЈЕВО 1959


—48—

⑨

Дата је функција

$$f(z)=\frac{z^{\lambda}}{z^2+\sqrt{2}}$$

и посматра се њезина грана која за $z=4$ узима вредност $4^{\lambda}/14$.

1° За $\lambda=1$ видјети на што се том граном функције пресликава јединични круг.

2° Наћи сингуларитете те гране за разне вредности реалног параметра λ.

3° За каквих се реалних интеграла долази ако интегралимо дату функцију дуж контуре сл.16.

сл.16

У ком се интервалу може налазити λ да би мјешовити интеграли дуж кругова $|z|=R$ и $|z|=r$, кад $r\to 0$ и $R\to\infty$.

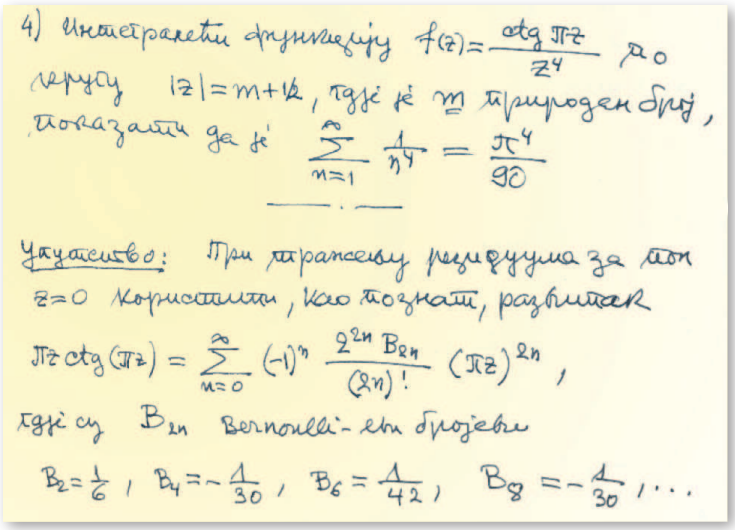
4° Развити дату функцију у Laurent-ов ред у околини тачке $z=1$ и одредити област конвергенције тога реда.

Најпре ћемо одредити ону грану функције $f(z)$ која за $z=4$ узима вредност $4^{\lambda}/14$. Како је

$$f(4)=\frac{4^{\lambda}}{16\pm 2}=\left\{\begin{matrix}\frac{4^{\lambda}}{18}\\ \frac{4^{\lambda}}{14}\end{matrix}\right.$$

M. Maravić, Zbirka zadataka iz Teorije funkcija kompleksne promjenljive, Sarajevo, 1959.

anu monografija FINAL PRINT.indd 61 6/16/2023 1:57:00 PM


4) Интегралети функцију $f(z)=\frac{\operatorname{ctg}\pi z}{z^4}$ по кругу $|z|=m+\frac{1}{2}$, где је m природан број, показати да је $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$

Упутство: При развоју резидуума за тачку $z=0$ користити, као познат, развитак

$$\pi z \operatorname{ctg}(\pi z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!}(\pi z)^{2n},$$

где су B_{2n} Bernoulli-еви бројеви

$$B_2=\frac{1}{6},\ B_4=-\frac{1}{30},\ B_6=\frac{1}{42},\ B_8=-\frac{1}{30},\ \ldots$$

M. Maravić: ispitni zadatak s uputstvom.

kada je M. Maravić bio njegov asistent. Ti zadaci, napisani njegovim prekrasnim ćiriličnim rukopisom, koliko lijepi, toliko i teški, i danas privlače pažnju, kako svojom originalnošću, tako i kompleksnošću i elegancijom rješenja i izazivaju divljenje čitalaca.

Oni su i mene, kao asistenticu na Kompleksnoj analizi, koju je predavao akademik M. Bajraktarević, toliko opčinili da sam zadatke iz te zbirke radila sa studentima na vježbama i davala im ih na pismenim ispitima. Prof. Bajraktarević me, zahvaljujući tim zadacima (i njemu su se svidjeli), uključio kao koautoricu zbirke koju su već pripremale dvije starije koleginice, a prof. Maravić, koji je zajedno s prof. Bajraktarevićem bio recenzent, zahvaljujući mom izboru zadataka i posebno mojim rješenjima, ponudio mi je da mi bude mentor za doktorat – na šta sam posebno ponosna.

Profesor Maravić je svoje naučne radove publikovao u vrlo uglednim i cijenjenim domaćim i stranim matematičkim časopisima i svi su pozitivno prikazani u najuglednijim svjetskim referativnim časopisima: *Mathematical Reviews* (USA), *Referativnij Žurnal Matematika* Akademije nauka SSSR i *Zentralblatt für Mathematik* (tadašnje SR Njemačke, danas EMIS-a), a ušli su i u nekoliko svjetskih monografija, kao što su: K. Zeller, W. Beckmann, *Theorie der Limitierungsverfahren*, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New-York (1970); E. Seneta, *Regularly Varying Functions*, Springer-Verlag, Berlin (1976). Osim toga, niz njegovih radova je citiran i u publikaciji *Itogi nauki i tehniki* (Dostignuća nauke i tehnike), Svesaveznog instituta naučnih i tehničkih informacija Akademije nauka SSSR,

anu monografija FINAL PRINT.indd 62 6/16/2023 1:57:01 PM

serija Matematička analiza, tom 12, Moskva, 1974 [L: 2], i dr.

Zahvaljujući svojim radovima i dobijenim rezultatima, M. Maravić je na sebe skrenuo pažnju međunarodne naučne javnosti, što je rezultiralo, kao što je već spomenuto, pozivom poznatog američkog matematičara Daniela Watermana, da bude gostujući profesor na Wayne State University, Detroit (SAD), na kom je držao predavanja, kako za studente, tako i za postdiplomce, tokom dvije školske godine (1965/66 i 1966/67). Iako je ponuda da u Americi ostane za stalno bila primamljiva, prof. Maravić je nije prihvatio. Jednom je onako, kao usput, rekao: „Nisam mogao dozvoliti da kupe jednog prvoborca".



Razglednica iz Tampe, USA, pisana 28.10.1977. godine prof. Maravić navodi američke univerzitete na kojim je održao ili će držati predavanja

Afirmisan i cijenjen, akademik Maravić je pozivan da drži predavanja o svojim naučnim rezultatima na brojnim odsjecima za matematiku i matematičkim institutima univerziteta i akademija nauka, kako bivše Jugoslavije, tako i u inostranstvu. Spomenućemo samo neke od stranih univerziteta, kao što su engleski univerziteti iz Londona: University of London (University College) i Woolwich Polytechnic University i američki univerziteti: Syracuse University, Syracuse, New York; Wayne State University, Detroit, Michigan; University of South Florida, Tampa, Florida; University of California (UCLA), Los Angeles i drugi.

Nakon povratka iz SAD, zbog integracije nastave matematike na Univerzitetu u Sarajevu, Manojlo Maravić je postao profesor Prirodno-matematičkog fakulteta, na kom je proveo oko deset godina, iako je i dalje držao nastavu i za studente Građevinskog fakulteta.

anu monografija FINAL PRINT.indd 63 6/16/2023 1:57:01 PM



SUSRET SA DOBITNICIMA 27-JULSKE NAGRADE

MATEMATIKA KAO PJESMA

Akademik profesor doktor Manojlo Maravić došao je u Sarajevo prije više od 20 godina i ostao do danas ◆ To je čovjek koji obogaćuje i oplemenjuje sagovornika, jer je cijeli život posvetio nauci i radu sa mladim

«Akademik profesor doktor Manojlo Maravić je melem. Veoma je objektivan. On prosto dokaže studentu da ništa ne zna, ide od pitanja do pitanja i nema se nikako ni za šta žaliti», izjavili su studenti Građevinskog fakulteta u Sarajevu o svom profesoru u anketi na pitanje da li im je teška matematika.

Kako živi i radi profesor dr Manojlo Maravić, akademik, redovni profesor, dobitnik ovogodišnje 27-julske nagrade, jedan od najistaknutijih matematičara u našoj zemlji koji se, posebno, bavi proučavanjem i razradom problema savremene matematičke teorije što je značajno i za teoriju i za praktičnu primjenu. U posljednjih nekoliko godina objavio je više visoko ocijenjenih kapitalnih radova. Susreti sa dr Maravićem pružaju pažnju i oplemenjuju sagovornika.

Jednog avgustovskog popodneva, dočekao nas je u kabinetu na Građe-

Od tada do danas u njegovoj biografiji stoji zapisano: 1947. godine izabran za asistenta na Prirodno-matematičkom fakultetu, a kasnije i na Institut Srpske akademije nauka i umjetnosti. Tu je ostao tri godine kada odlazi na dvogodišnju službu u JNA, a poslije toga, 1952. godine napušta Beograd i dolazi u svoj novi grad u Sarajevo, gdje je bio u početku asistent, a kasnije docent na Prirodno-matematičkom i Tehničkom fakultetu. Doktorirao je 1956. godine, 1961. godine biran je za vanrednog profesora Tehničkog fakulteta. Od 1968. godine je redovni profesor. Godinu dana ranije biran je za dopisnog člana Akademije nauka i umjetnosti BiH čiji redovni član postaje ova godina. U dva navrata po dvije godine je boravio u inostranstvu. Prvi put od 1962. do 1964. godine na Univerzitetu u Sudanu, a od 1965. do 1967. godine na Wayne State University (SAD).

M. Maravić, intervju za Oslobođenje, 21.8.1975. (*I. Kalkan*)

Akademik M. Maravić je nesumnjivo spadao u najznačajnije i najsvestranije matematičare posljeratne plejade matematičara BiH i bivše Jugoslavije. Bitno je uticao na razvoj matematike, kako na Univerzitetu u Sarajevu, tako i u cijeloj BiH. Spadao je u one naše vrhunske matematičare koji su imali mnogo razumijevanja i za probleme nastave matematike. Kao jedan od ključnih profesora matematičke analize i njenih primjena, svojim naučnim i pedagoškim radom dao je jasne konture *Sarajevskoj školi matematičke analize*. S ogromnom energijom i širokom matematičkom erudicijom Manojlo Maravić je duže vrijeme pokrivao veliki dio nastave matematike na više fakulteta (Građevinski, Tehnički, Mašinski) u Sarajevu, Mostaru i Zenici, kako na II, tako i na III stepenu studija. Posebno treba istaći da je učestvovao u formiranju prvog postdiplomskog studija iz matematike (akademske 1966/67) na Odsjeku za matematiku Univerziteta u Sarajevu, čiji je bio i prvi voditelj. Važnu komponentu tog studija činili su njegovi seminari, uz koje se obično vezivala izrada magistarskog rada.

Kao izvrstan i seriozan, ne samo predavač, nego i vrlo aktivan naučnik i istraživač, uvijek spreman da pomogne, M. Maravić je imao snažan uticaj na brojne generacije studenata i postdiplomaca, ali i doktoranata, koji su mu se divili i veoma ga cijenili. I pored toga što je bio veoma strog, bio je omiljen među studentima, jer je važio

anu monografija FINAL PRINT.indd 64 6/16/2023 1:57:01 PM

za izuzetno dobrog i korektnog profesora. To potvrđuje i citat iz članka *Matematika kao pjesma*, objavljenog u intervjuu povodom dodjele Dvadesetsedmojulske nagrade: „Akademik profesor doktor Manojlo Maravić je melem. Veoma je objektivan. On prosto dokaže studentu da nešto ne zna, ide od pitanja do pitanja i nema se niko ni za šta žaliti“ – napisali su studenti Građevinskog fakulteta u Sarajevu o svom profesoru u anketi, u odgovoru na pitanje da li im je teška matematika (I. Kalkan) ([L:17]).



ANUBiH, slijeva na desno: 1. red M. Maravić, V. Perić i A. Hadžibeganović; 2. red F. Vajzović i M. Vuković, U. Kisić i N. Kusturica

Za izvanredan doprinos razvoju matematike akademik Manojlo Maravić je u toku svog dugogodišnjeg rada dobio brojna visoka priznanja i odlikovanja, kao što su: Republička nagrada za nauku „Veselin Masleša“ (1968), Dvadesetsedmojulska nagrada (1975), Orden rada sa crvenom zastavom (1976), Šestoaprilska nagrada grada Sarajeva (1979), Nagrada ZAVNOBiH-a (1988), te povelje Saveza DMFA Jugoslavije (1974) i DMFA BiH (1977) i dr.

Kao logičan rezultat bogate naučne, stručne i svih drugih aktivnosti, prof. Manojlo Maravić je 1967. godine postao dopisni, a 1975. redovni član Akademije nauka i umjetnosti BiH. Bio je i član Naučnog društva Srbije i Akademije nauka R. Srpske.

Akademik M. Maravić je bio angažovan i na brojnim funkcijama, kao što su: šef Katedre za opštu matematiku Odsjeka za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta, šef Katedre za matematiku i fiziku Građevinskog fakulteta u Sarajevu, predsjednik Društva matematičara, fizičara i astronoma BiH, član Republičkog savjeta za unapređenje vaspitno-obrazovnog rada BiH, kao i član Izdavačkog savjeta časopisa Pronalazač Saveza pronalazača, inovatora i racionalizatora BiH, i dr.

I u Akademiji nauka i umjetnosti BiH obavljao je mnoge značajne dužnosti, kao što su: glavni i odgovorni urednik časopisa Radovi Odjeljenja tehničkih nauka Akademije

anu monografija FINAL PRINT.indd 65 6/16/2023 1:57:01 PM

nauka i umjetnosti Bosne i Hercegovine, a zatim i časopisa Radovi matematički, koji je nastao izdvajanjem matematike iz Radova Odjeljenja prirodnih i matematičkih nauka Akademije nauka i umjetnosti Bosne i Hercegovine; sekretar Odjeljenja tehničkih nauka i član Predsjedništva Akademije nauka i umjetnosti Bosne i Hercegovine, te član Komisije Savjeta akademija za saradnju s Američkom nacionalnom akademijom nauka, kao i brojnih drugih komisija.

Bio je i dugogodišnji član Londonskog (LSM) i Američkog (ASM) društva matematičara.

Akademik M. Maravić je bio plodan i ugledan naučni stvaralac u oblasti matematičke analize, opštejugoslovenskog značaja i visoke međunarodne reputacije, čovjek koji je svojim naučnim radom, nastavno-naučnom djelatnošću i posebno mentorskim radom najviše doprinio formiranju naučnog podmlatka u oblasti matematike u BiH.

Manojlo Maravić je bio intelektualac koji je pored matematike bio izuzetan poznavalac, kako književnosti – posebno ruskih klasika, tako i stranih jezika (objavljivao je radove na engleskom, francuskom, njemačkom i ruskom jeziku) i istorije, u kojoj se takođe dokazao, i to ne samo kao izuzetan poznavalac nego i kao autor. Otprilike tri decenije poslije dolaska u Sarajevo, kao uveliko uspio i priznat naučnik, tada već penzioner, akademik Manojlo Maravić se, zajedno s grupom svojih prijatelja – zemljaka, upustio u ozbiljan posao istraživanja i pisanja istorije rodnog kraja – kako bi s jedne strane rasvijetlio doseljavanje Srba krajem XVI i početkom XVII vijeka u te krajeve, a sa druge da bi istoriju rodnog kraja otrgnuo od zaborava i sačuvao za naredna pokoljenja. Tako je, učestvujući u pisanju knjige – monografije *Partizanska Drežnica* [L:15] – u uvodnom članku *Iz prošlosti Drežnice do 1918.* godine pošao od najstarijih vremena, kada su u tim krajevima živjeli Japodi i Rimljani, a zatim stavio akcent na doseljavanje Srba u te krajeve i njihov život do početka XX vijeka [B:6]. Pri tome je koristio brojne podatke i pisane dokumente, među kojim i one najpouzdanije koji se čuvaju u Bečkim arhivima, do kojih je došao zahvaljujući svom veoma obrazovanom srednjoškolskom profesoru teologije i istorije, kasnije i velikom prijatelju Milanu Radeki.[2]

Kao i svaki posao koji je radio, i ovaj je M. Maravić uradio izuzetno dobro, tako da je nakon objavljivanja knjige dobio niz pohvala, i to ne samo od običnih čitalaca nego čak i od veoma cijenjenih i ozbiljnih istoričara, kao što je bio akademik Milan Vasić, koji je, kada je pročitao članak, primijetio da je veliki gubitak za istoriju što se M. Maravić nije bavio istorijom.

Pored rada *Iz prošlosti Drežnice do 1918 godine* [B:6], koji je, s obzirom na istorijsku vrijednost, bio jedan od najznačajnijih radova u knjizi *Partizanska Drežnica*, objavljena su još dva članka prof. M. Maravića [B:7] i [B:8].

Slobodno se može reći da je akademik Manojlo Maravić bio najsvestraniji među matematičarima. Pored toga što je bio izuzetan naučnik, autor naučne monografi-

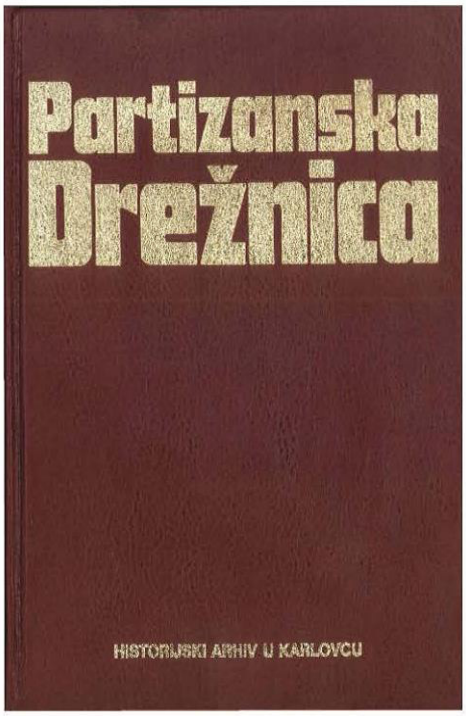
2 Pregažen, zajedno sa suprugom, na uličnom prelazu, 1990. u Karlovcu.

anu monografija FINAL PRINT.indd 66 6/16/2023 1:57:01 PM

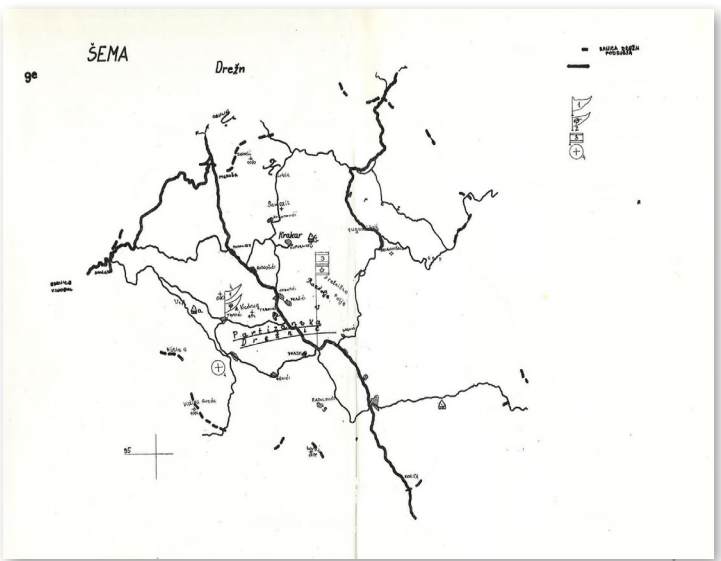
je i dva udžbenika za studente, što je, sa četiri doktoranta, u ono vrijeme bio matematičar koji je najviše doprinio stvaranju podmlatka na Univerzitetu u Sarajevu, bio je i jedan od najznačajnijih tvoraca *Sarajevske škole matematičke analize* [L:7], gostujući profesor i predavač po pozivu, na brojnim domaćim univerzitetima i institutima, kao i na engleskim i američkim, čak i u Africi. Bio je i izuzetan poznavalac istorije, posebno svog rodnog kraja, kojom se vrlo uspješno bavio.

Međutim, bibliografski podaci, koliko god bili izuzetni, predstavljaju samo nepotpunu sliku čovjeka kakav je bio akademik M. Maravić, pa bi i ova priča bila nepotpuna kada se ne bi reklo barem nekoliko riječi i o njemu kao čovjeku. Manojlo Maravić je bio vrlo stabilna, sređena ličnost i dobronamjeran čovjek – umjerenog i prirodnog ponašanja. Bio je čovjek jasne misli i izgrađenih stavova, tolerantan i nenametljiv i uz to vrlo elokventan i zanimljiv pripovjedač. Imao je talenat da sakupi ljude oko sebe, da im priča tako interesantno, da ga svi pažljivo slušaju, ali je bio i besjednik koji je umio pažljivo i da sluša druge, strog prema drugima, ali isto tako i prema sebi, jasnog stava i velikog autoriteta. Kao takav, bio je poštovan ne samo od svojih kolega i studenata nego i od običnih ljudi.

Tako, recimo, prof. dr Srđan Kisin, najprije student, a kasnije profesor i kolega profesora Maravića na Građevinskom fakultetu u Sarajevu, u svom



Partizanska Drežnica
Historijski arhiv u Karlovcu,
Karlovac, 1982.



Geopozicija Partizanske Drežnice

anu monografija FINAL PRINT.indd 67 6/16/2023 1:57:01 PM

tekstu „Zapis o legendi fakulteta" kaže: „Prof. Manojlo Maravić je nas studente najprije fascinirao svojom visinom od 202 cm. Potom nam je ublažio tremu svojim i dobroćudnim i zagonetnim osmjehom. Za vrijeme predavanja, u sali je vladala savršena tišina, prekinuta uzdahom ponekog studenta koji nije stigao da nešto zapiše [...]. Šta je još upotpunilo sliku o profesoru Maraviću, mom doživotnom idolu? Sem suverenosti u nauci kojom se bavio, to je svakako skromnost. A tu je i njegov divan smisao za humor, obično na svoj račun" [L:18].

Da je prof. Maravić imao smisla za humor, potvrđuje i priča koju sam svojevremeno čula od njega: „Jednom, kada sam kao partizan žurio na zadatak, zaustavio sam se pored plota da upitam seljaka koliko mi treba vremena do odredišta, a on mi je odgovorio, tebi pola sata, inače sat, jer je, zbog moje visine, pomislio da sam na konju."

Prof. Maravić je imao nešto zajedničko i sa velikim Isaakom Newtonom – oba su rođena prije vremena – od sedam mjeseci. To sam saznala sasvim slučajno kada je neko zabrinuto rekao da mu se rodilo dijete od sedam mjeseci. Mane, koji je stajao u blizini, okrenuo se i, da bi utješio zabrinutog čovjeka, kroz smiješak, rekao: „To ne mora ništa da znači. Pogledajte mene, i ja sam prijevremeno rođen, a vidite koliki sam narastao. A i čuveni Isaak Newton je rođen od 7 mjeseci, a postao je veliki genije. Dakle, nema razloga za brigu." Iako je i u tom slučaju, kao primjer, mogao također navesti sebe, skromno je spomenuo Newtona.

Ako tome još dodamo da je volio putovanja i da je bio patriota i dobrovoljac koji je 1941. godine uzeo pušku da brani zemlju, onda možemo zaključiti ne samo da je bio jedan od najsvestranijih bosanskohercegovačkih matematičara nego i da je imao puno zajedničkog s osnivačem poznate Beogradske škole matematike – Mihailom Petrovićem Alasom, čiji je i sam bio sljedbenik.

Lijepo je da Drežničani nisu zaboravili svog Maneta, ni 20 godina poslije njegove smrti. Dostojanstveno su mu se odužili izložbom „Sto godina od rođenja i 20 godina od smrti akademika Manojla J. Maravića" [L:8], koja je održana u jednom od ekskluzivnih prostora Etnografskog muzeja u Beogradu, u poznatoj Manakovoj kući. Osim toga, Drežničani su mu tim povodom posvetili i jedan broj *Godišnjaka matice Drežničke* [L:13].

M. Maravić je od 1952. godine živio u Sarajevu. Zavolio ga je i kud god je odlazio, vraćao mu se. U njemu je stekao prijatelje, proveo radni vijek i u njemu se najbolje osjećao. U intervjuu I. Kalkanu je rekao: „Volim Sarajevo. Ono je već postalo dio mene i mog posla" [L:17]. Stekao je brojne prijatelje.

Spomenuću samo jednog, velikog prijatelja Kadriju Kresu, ratnika i prvoborca, nastavnika matematike, s kojim se često družio.

Teška srca je napustio Sarajevo, ratne 1992. godine. I sada ga vidim presavijenog s rukama na koljenima i u ušima mi odzvanjaju njegove tužne riječi "ići, ne ići", dok se opraštao od svojih knjiga i svojih uspomena i skanjivao da krene ka izlazu iz svoga stana, i ne sluteći da ga neko posmatra i prisustvuje tom, za njega bolnom činu i ne znajući da se više nikada neće vratiti u svoj dom. Mene, koja sam ga zajedno s još nekolicinom prijatelja ispraćala, njegova sestričina Branka

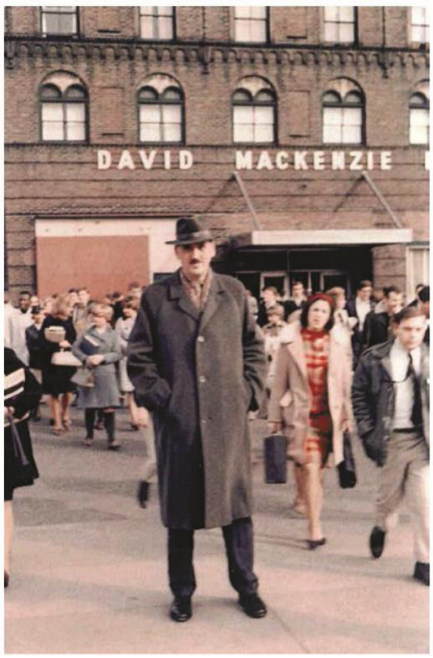
anu monografija FINAL PRINT.indd 68 6/16/2023 1:57:01 PM

Đurica (rođena Ivošević), koja je zajedno s njim napuštala Sarajevo, zamolila je da se popnem do stana i vidim šta je s njim i da ga izvedem iz stana.

Ja, kao posljednja i najmlađa doktorantica akademika Maravića, reći ću da je moj profesor Manojlo Maravić Mane bio izuzetan čovjek, prijatelj i učitelj brojnih generacija studenata. Iako to nije pokazivao, bio je izuzetno osjećajan čovjek – čovjek koji je imao dušu.

Ja ću se uvijek sjećati dana kada me, poslije povratka s Lomonosova, upitao kako je protekao moj studijski boravak u Moskvi i kako napreduje rad na mom doktoratu. Dok sam mu s oduševljenjem pričala kako rješavam opet aktuelan problem, koji je prije 35 godina postavio čuveni njemački matematičar Wolfgang Krull, on se zamislio, a onda rekao: „To nije dobro. Svako bi bio sretan da riješi takav probem – donio bi mu slavu, ali to nije problem za mladog čovjeka, za početnika." Nakon par dana mi je ponudio da radim doktorat iz analize pod njegovim mentorstvom.

U ime svih nas, njegovih doktoranata, reći ću da je bila velika privilegija i čast biti učenikom akademika Manojla Maravića, koji je nas, svoje doktorante, uveo u veliki, očaravajući svijet matematičke nauke: svijet divergentnih redova i njihove konvergencije, teorije sumabilnosti, Karamatine teorije i Fourierove analize i njihovih primjena. Ponosna sam da sam bila doktorantica, ne samo izuzetnog naučnika nego i velikog čovjeka, akademika Manojla Maravića.



Izložba:
"Sto godina od rođenja i dvadeset godina od smrti akad. Manojla J. Maravića"
Etnografski muzej u Beogradu,
Manakova kuća,
25. februar – 20. mart 2020.

anu monografija FINAL PRINT.indd 69 6/16/2023 1:57:01 PM

Bibliografija akademika Manojla Maravića

A. NAUČNI RADOVI

[1] *O jednom postupku zbirljivosti divergentnih redova* (doktorska disertacija), Zbornik radova Matematičkog instituta Srpske Akademije Nauka (SAN), LV, Beograd (1957), pp. 5-52.

[2] *Über die* G_{Θ}^{κ} *– summierbarkeit der verallgemeinerten Fourier-Reihen,* Publications de l' Institut Mathématiques, SANU, XII, Beograd (1958), pp. 137-146.

[3] *Sur la sommabilité des développements procédant suivant les fonctions caractéristiques de l'opérateur de Laplace,* Publications de l'Institut Mathematique, SANU, XIV, Beograd (1960), pp. 129-142.

[4] *O asimptotskom ponašanju jedne integralne transformacije*, Publikacije Tehničkog fakulteta u Sarajevu III, 1, Sarajevo (1960), pp. 31-38.

[5] *O jednom Tauberijanu*, Publikacije Tehničkog fakulteta u Sarajevu IV, 1, Sarajevo (1961), pp. 5-15.

[6] *On an O – inverse theorem*, Glasnik matematičko-fizički i astronomski, Ser. II 16, 3-4, Zagreb (1961), pp. 183-187.

[7] *O nekim novijim rezultatima procene sopstvenih vrednosti sopstvenih funkcija i Greenove funkcije rubnog problema oscilujuće membrane*, Publikacije Tehničkog fakulteta u Sarajevu IV, 2, Sarajevo (1961), pp. 9-95 (u koautorstvu s B. Martićem).

[8] *Jedna relacija inkluzije između* g_r *– postupakâ i Rieszova postupka zbirljivosti*, Publikacije Tehničkog fakulteta u Sarajevu IV, 2, Sarajevo (1961), pp. 5-8.

[9] *Slowly oscillating functions and their application to the asymptotic evaluations of the Riesz and* G_{Θ}^{κ}*-means of multiple Fourier series,* Publications de l'Institut Mathématique SANU (NS), 3 (17), Beograd (1963), pp. 93-104.

[10] *Sur certaines relations asymptotiques entre les moyennes sphériques d'ordre superieur et les moyennes de Riesz des séries de Fourier multiples,* Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 258, Paris (1964), pp. 4407-4410.

[11] *On an application of slowly oscilating functions,* Proceedings of the American Mathematical Society 17, 5 (1966), pp. 969-976.

[12] *On the summability of multiple Fourier series*, Portugaliae Mathematica 27, 3, Lisbon (1968), pp. 127-135.

[13] *On the G-summability of eigenfunction expansion,* Radovi Odjeljenja tehničkih nauka ANUBiH, XXXVI, 1, Sarajevo (1969), pp. 109-118.

anu monografija FINAL PRINT.indd 70 6/16/2023 1:57:02 PM

[14] *O zbirljivosti izvodnih višestrukih Fourierovih redova*, Radovi Odjeljenja prirodnih i matematičkih nauka ANUBiH, XXXIII, 10, Sarajevo (1969), pp. 61-77.

[15] *O zbirljivosti izvodnih višestrukih Fourierovih redova u vezi s asimptotskim ponašanjem sfernih sredina višeg reda*, Radovi odjeljenja tehničkih nauka ANUBiH, XLII, 2, Sarajevo (1972), pp. 5-16.

[16] *Primena elemenata toplotnog potencijala prostog i dvojnog sloja kod proračuna nestacionarnih temperaturnih polja u krutim telima nestacionarne zapremine,* Tehnika, XXII, 5 (1973), pp. 905-914. (sa D. Vukeljom)

[17] *Sur le comportement asymptotique d'une transformation de la fonction spectrale de l'operateur de Laplace,* Publications de l' Institut Mathématique, SANU (NS), 16 (30), Beograd (1973), pp. 95-100.

[18] *O asimptotskom ponašanju* g^{κ}*– sredina Dirichletovih redova*, Radovi Odjeljenja tehničkih nauka ANUBiH, LIII, 3, Sarajevo (1974), pp. 5-18.

[19] *On a method of summation of expansion in eigenfunctions of the Laplace-operator*, Radovi Odjeljenja prirodnih i matematičkih nauka ANUBiH, LII, 14, Sarajevo (1974), pp. 59-69.

[20] *On the spherical means and some of their applications*, Publications de l' Institut Mathématique SANU (NS), 19 (33), Beograd (1975), pp. 111-121.

[21] *O G-sumabilnosti razvitka po sopstvenim funkcijama Laplace-ovog operatora*, Radovi Odjeljenja tehničkih nauka ANUBiH, LVIII, 5, Sarajevo (1977), pp. 5-15.

[22] *O Rieszovoj sumabilnosti višestrukih Fourierovih redova*, Radovi Odjeljenja tehničkih nauka ANUBiH, LXV, 5, Sarajevo (1979), pp. 5-13.

[23] *Sur la sommabilité des dérivées de la fonction spectrale de l'opérateur de Laplace,* Glasnik Matematički, 2 (32), Zagreb (1977), pp. 289-297.

[24] *Sumabilnost višestrukih Fourierovih redova,* Naučni pregled – Zbornik radova Naučnog društva SR Srbije, 6, Beograd (1979), pp. 233-244.

[25] *Sur certaines applications des fonctions à croissance lente avec reste*, Radovi Odjeljenja prirodnih i matematičkih nauka ANUBiH, LXVI, 19, Sarajevo (1980), 43-58.

[26] *O* R_k *– sredinama funkcija,* Radovi Odjeljenja tehničkih nauka ANUBiH, LXVIII, 6 Sarajevo (1981), pp. 53-68.

[27] *O Rieszovoj sumabilnosti kompleksnog reda višestrukih Fourierovih redova*, Radovi Odjeljenja tehničkih nauka ANUBiH, LXVIII, 6, Sarajevo (1981), pp. 93-102.

[28] *Summability of derived multiple Fourier series related to slowly oscilating functions with remainder term*, Matematički vesnik, 16 (31), 3, Beograd (1979), pp. 431-441.

[29] *Sur quelques applications de procédé de sommabilité de Riesz d'ordre complexe*, Radovi Odjeljenja prirodnih i matematičkih nauka ANUBiH, LXIX, 20, Sarajevo (1982), pp. 135-147.

[30] *Sporo promenljive funkcije sa ostatkom i njihova primena na Rieszove i G-sredine višestrukih Fourierovih redova*, Radovi Odjeljenja tehničkih nauka ANUBiH, LXXI,7 Sarajevo (1982), pp. 177-189.

anu monografija FINAL PRINT.indd 71 6/16/2023 1:57:02 PM

[31] *On a problem of the* G_{Θ}^{κ}*-summability of multiple Fourier series of a function of the class* L^{p}, Radovi Odjeljenja tehničkih nauka ANUBiH, XXV, 8, Sarajevo (1984), pp. 153-158.

[32] *Об одном приложению медленно колеблющихся функций с остатком*, Radovi Odjeljenja tehničkih nauka ANUBiH, LXXVII, 9, Sarajevo (1984), pp. 215-223.

[33] *On the Riesz means of complex order of the multiple Fourier series*, Radovi Odjeljenja prirodnih i matematičkih nauka ANUBiH, LXXVIII, 24, Sarajevo (1985), pp. 83-89.

[34] *O nekim osobinama* (*R*, *log n*, *k*) *postupka sumabilnosti*, Radovi Odjeljenja tehničkih Nauka ANUBiH, LXXIX, 10, Sarajevo (1986), pp. 115-122.

[35] *On an application of slowly oscillating functions with remainder term to the summability of spherically summed multiple Fourier series*, Radovi Odjeljenja tehničkih nauka, LXXXII ANUBiH, 11, Sarajevo (1987), pp. 5-19.

[36] *On the asymptotic behavior of* G_{Θ}^{κ}*-means of eigenfunction expansion related to the slowly oscillating functions with remainder,* Publlications de l' Institut Mathématiques SANU (NS), 46 (60), Beograd (1989), pp. 104-112.

B. STRUČNI I OSTALI RADOVI

[1] *Sumabilnost razvitka po sopstvenim funkcijama Laplace-ova operatora u n-dimenzionalnom prostoru* (naučna monografija), Djela Odjeljenja tehničkih nauka ANUBiH, LV/8, Sarajevo (1979), 151 str.

[2] *Zbirka rešenih ispitnih zadataka iz Matematike I*, Tehnički fakultet, Sarajevo, 1958 (sa B. Martićem)

[3] *Zbirka iz teorije funkcija kompleksne promjenljive,* Sarajevo (1959), 120 str.

[4] *Zbirka riješenih zadataka iz Matematike* 3, Univerzitet u Sarajevu, Mašinski fakultet, Sarajevo (1972), 111 str. (autorizovani tekst M. Maravića, sastavili inženjeri R. Dučić i S. Milidrag).

[5] *Naši pali drugovi*, Vesnik Društva matematičara i fizičara NR Srbije, I/1, Beograd (1946), pp. 5-6.

[6] *Iz prošlosti Drežnice do* 1918. *godine*, u: *Partizanska Drežnica*, Historijski arhiv u Karlovcu, Zbornik 12, Karlovac (1982), pp. 11-48.

[7] *Rad KPJ u Drežnici od oktobra* 1942. *do kapitulacije fašističke Italije,* u: *Partizanska Drežnica,* Historijski arhiv u Karlovcu, Zbornik12, Karlovac (1982), pp. 105-121.

[8] *Pao u borbi na čelu ruske čete*, u: *Partizanska Drežnica,* Historijski arhiv u Karlovcu, Zbornik, 12, Karlovac (1982), pp. 754-756.

anu monografija FINAL PRINT.indd 72 6/16/2023 1:57:02 PM



Branislav Martić

(*Valjevo 1923 – Sarajevo 1985*)

Branislav Martić je rođen 3. juna 1923. godine u Valjevu (R. Srbija), u skromnoj porodici, o kojoj se malo zna. U izlaganju njegove biografije uskraćeni smo za izvjesne podatke koji čine obavezan sadržaj svake biografije, značajan za svaku, a posebno za ličnost kakva je bio profesor *Martić*. Iz službene biografije se vidi da mu se otac zvao *Mladen*, dok se ime njegove majke, pošto nigdje nije upisano, čak i ne zna. Ipak, dâ se zaključiti da mu je djetinjstvo bilo veoma teško, da mu je majka bila sve. Rijetko je o njoj pričao, ali kada bi je spomenuo, bilo je to uvijek s nježnošću i sa velikom ljubavlju. Na jednoj njegovoj knjizi sam pročitala „*Majkana*, rođena 19. 10. 1899. po novom, a 6. 10. 1899. po starom kalendaru". Pretpostavljam da ju je zvao *Majkana* od milja. Oca nije spominjao. Majka se, idući trbuhom za kruhom, zajedno sa sinom *Branislavom*, početkom četrdesetih godina prošlog vijeka, zatekla u dalekom Sarajevu. Bio je oženjem Smiljkom Šinik, ali nisu imali djece.

Znao mi je nekada, za nekoga, reći: „Lako je bilo onom gospodičiću, dijete, njegova majka je bila učiteljica, a moja majka, dijete, bila je pralja. Išla je da radi po kućama, da zaradi, kako bi me mogla školovati." Za majku je bio cijelog života nježno vezan i brinuo za nju, onako kako je ona brinula o njemu, dok je bio dijete.

Kao učenik sedmog razreda gimnazije, ratne 1941. godine, prekida školovanje, započeto u Sarajevu, i sa majkom bježi u rodni grad Valjevo (Srbija), u nadi da će tamo lakše prebroditi rat.

2010 Mathematics Subject Classification: 01A70, 0A65, 26-XX, 40-XX, 33-XX, 35-XX, 39-XX
Key words and phrases: Biographies, Bibliographies; Sequences, series and summability, Convergence and divergence of series, Inequalities for sums, series and integrals; Functional equations, Order, (modular) lattices

anu monografija FINAL PRINT.indd 73 6/16/2023 1:57:02 PM



Valjevska Gimnazija, osnovana 1870.



2020. proslavljeno je 150 godina Gimnazije

Ali neumoljiva njemačka armada ruši sve pred sobom, ne štedeći čak ni djecu. Tako je Branislav Martić 1942. godine, kao učenik osmog razreda gimnazije u Valjevu, najprije isključen iz škole, a zatim deportovan na prisilni rad u Njemačku. O tom periodu svog života nije volio da priča. Pretpostavljam da ga se nerado sjećao, ali da je ostavio neizbrisiv trag na njega moglo se zaključiti po njegovom ponašanju: nestrpljivosti, burnom reagovanju, kao i preranoj smrti. Nije volio da dolazi na sjednice i to se na Odsjeku za matematiku tolerisalo.

U maju 1944. godine, nakon bjekstva iz logora, uključio se u Sloveniji u partizane. U partizanskim redovima je ostao do oktobra 1945. godine. Poslije oslobođenja vratio se s majkom u Sarajevo da nastavi školovanje. Nakon završetka gimnazije 1946. godine, upisao se na studij matematike na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Beogradu, koji je završio 1950. godine. Po završetku studija, kraće vrijeme je radio kao profesor po srednjim školama u BiH: u Banjoj Luci, Prijedoru i Sarajevu. Godine 1954. izabran je za asistenta, a 1960. za predavača na Tehničkom fakultetu Univerziteta u Sarajevu. Istovremeno je radio i kao honorarni asistent na Prirodno-matematičkom odsjeku Filozofskog fakulteta u Sarajevu.

Znao bi reći: „Natrčao sam se, dijete, u vrijeme kada sam bio asistent. Trčao sam od jedne do druge crkve, s jednih na druge vježbe, da ne zakasnim“ – misleći pritom na srpsko-pravoslavnu *Bogosloviju* (danas Ekonomski fakultet) i katoličku crkvu *Sv. Nikole Tavelića*, na Kovačićima, koje su poslije Drugog svjetskog rata pretvorene u Tehnički, odnosno Poljoprivredno-šumarski fakultet, na kojim je u to vrijeme asistent Martić držao vježbe iz matematike.

anu monografija FINAL PRINT.indd 74 6/16/2023 1:57:02 PM

Branislav Martić je 1961. godine na Prirodno-matematičkom fakultetu u Sarajevu odbranio doktorsku disertaciju *O jednom skupu dvoparametarskih postupaka zbirljivosti i njihovim primjenama* [1], nakon što je, prethodno, na osnovu odluke Nastavno-naučnog vijeća Prirodno-matematičkog fakulteta, oslobođen usmenog dijela doktorskog ispita. Mentor njegove doktorske disertacije bio je prof. dr *Vladeta Vučković*, još jedan od matematičara iz plejade čuvene *Beogradske škole Mihaila Petrovića Alasa*.

Branislav Martić je iste godine na Elektrotehničkom fakultetu u Sarajevu izabran u zvanje vanrednog profesora. Nakon kraćeg vremena, prelazi na Višu tehničku školu u Trsteniku, a zatim na Tehnički fakultet u Banjoj Luci, na kojem je izabran za redovnog profesora.

Godine 1975. prof. Martić prelazi na Prirodno-matematički fakultet u Sarajevu, na kojem ostaje do 1983, kada odlazi u penziju. Plodna naučna djelatnost Branislava Martića trajala je neprekidno 25 godina, sve do njegove prerane smrti 1985. godine.

U tom periodu Branislav Martić je objavio preko 100 naučnih radova. Prateći radove Jovana Karamate, kojim je i inače bio opčinjen, i sam je postigao svoje najznačajnije rezultate u raz-

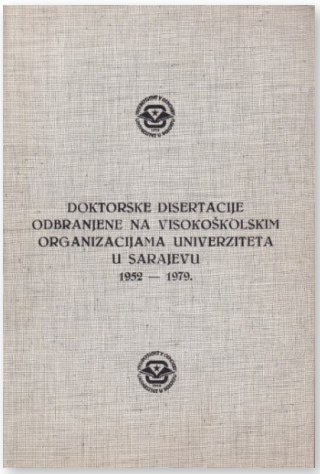


Pravoslavna Bogoslovija do rata 1941. godine, Tehnički fakultet poslije rata, sada Ekonomski fakultet



Katolička crkva Sv. Nikole Tavelića do rata 1941. Poljoprivredni i Šumarski fakultet do 1991. godine kada je vraćen crkvi

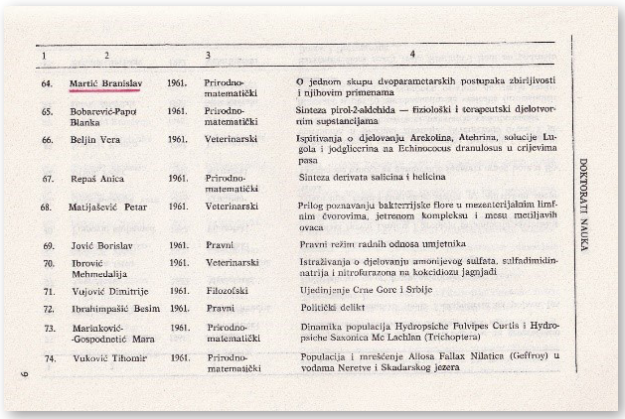
anu monografija FINAL PRINT.indd 75 6/16/2023 1:57:02 PM



DOKTORSKE DISERTACIJE odbranjene na VŠO Univerziteta u Sarajevu

nim oblastima klasične matematike, rješavajući probleme iz: *teorije sumabilnosti, teorije funkcija Tauberove prirode i teorije sporo promjenljivih i regularno promjenljivih funkcija, kao i iz teorije funkcija kompleksne promjenljive, teorije specijalnih funkcija, funkcionalnih jednačina, analitičkih nejednakosti, matematičke logike i algebre, te običnih i parcijalnih diferencijalnih jednačina*.

Svakako treba istaći da veliki broj naučnih radova Branislava Martića (više od jedne trećine) pripada oblasti teorije sumabilnosti, s kojom je započeo svoj naučni rad i u kojoj je postigao vrlo značajne rezultate. U svojoj doktorskoj disertaciji počeo je da proučava dvoparametarske postupke zbirljivosti [1] i u potpunosti ispitao neke od njihovih osobina, te za njih dokazao niz raznih relacija inkluzije i razmatrao neke od mogućnosti njihovih primjena.



1	2	3	4	
64.	Martić Branislav	1961.	Prirodno-matematički	O jednom skupu dvoparametarskih postupaka zbirljivosti i njihovim primenama
65.	Bobarević-Papo Blanka	1961.	Prirodno-matematički	Sinteza pirol-2-aldehida — fiziološki i terapeutski djelotvorni supstancijama
66.	Beljin Vera	1961.	Veterinarski	Ispitivanja o djelovanju Arekolina, Atehrina, solucije Lugola i jodglicerina na Echinococus dranulosus u crijevima pasa
67.	Repaš Anica	1961.	Prirodno-matematički	Sinteza derivata salicina i helicina
68.	Matijašević Petar	1961.	Veterinarski	Prilog poznavanju bakterijske flore u mezenterijalnim limfnim čvorovima, jetrenom kompleksu i mesu metiljavih ovaca
69.	Jović Borislav	1961.	Pravni	Pravni režim radnih odnosa umjetnika
70.	Ibrović Mehmedalija	1961.	Veterinarski	Istraživanja o djelovanju amonijevog sulfata, sulfadimidin-natrija i nitrofurazona na kokcidiozu jagnjadi
71.	Vujović Dimitrije	1961.	Filozofski	Ujedinjenje Crne Gore i Srbije
72.	Ibrahimpašić Besim	1961.	Pravni	Politički delikt
73.	Marinković-Gospodnetić Mara	1961.	Prirodno-matematički	Dinamika populacija Hydropsiche Pulvipes Curtis i Hydropsiche Saxonica Mc Lachlan (Trichopiera)
74.	Vuković Tihomir	1961.	Prirodno-matematički	Populacija i mrešćenje Alosa Fallax Nilatica (Geffroy) u vodama Neretve i Skadarskog jezera

DOKTORATI NAUKA

Branislav Martić: upisan pod brojem 64 na strani 9.

Radovi Branislava Martića su veoma pozitivno prikazani u sva tri, u ono vrijeme najuglednija, svjetska referativna žurnala, kao što su: *Mathematical Reviews* (USA); *Referativnij Žurnal Matematika* (Akademije nauka SSSR) i *Zentralblatt für Mathematik* (tadašnje SR Njemačke, danas EMIS). Osim toga, veći broj njegovih radova je ne samo citiran u radovima drugih matematičara nego je uključivan i u neke od poznatih svjetskih monografija, kao što su:

- K. Zeller, W. Beckmann, *Theorie der Limitierungsverfahren*, Springer-Verlag, 1970 (citiran 21 naučni rad) [L:53] ;
- *Itogi nauki i tehniki ANSSSR* i *Državnog komiteta Savjeta ministara SSSR*, serija Matematička analiza, Moskva, 1974 (citirano 20 naučnih radova) [L:2].

Ti radovi ne samo da su afirmisali Branislava Martića kao matematičara u međunarodnoj matematičkoj javnosti nego su mu i obezbijedili trajno mjesto u bosanskohercegovačkoj i svjetskoj nauci. Svakako treba istaći da je, u

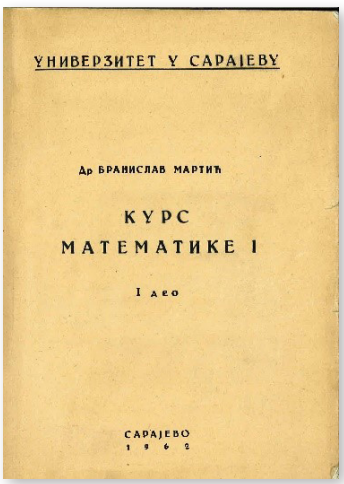
anu monografija FINAL PRINT.indd 76 6/16/2023 1:57:02 PM

ono vrijeme, uključivanje radova u svjetske monografije bilo veliko priznanje za svakog autora, s obzirom da tada nije bilo kompjutera, koji danas pomažu naučnicima da se, za kratko vrijeme, upoznaju s najnovijim rezultatima u oblastima svoga rada i međusobno povežu.

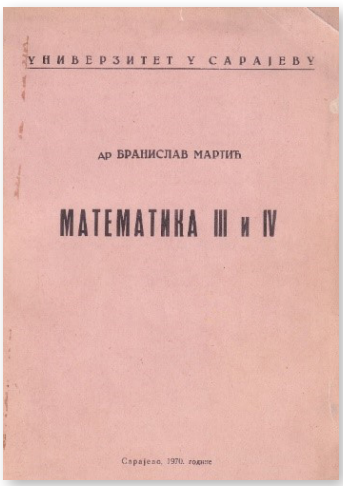
Branislav Martić je bio ne samo izuzetan naučnik nego i veoma zanimljiv predavač. Tragovi brojnih kurseva koje je predavao, na raznim fakultetima, ostali su ne samo u sjećanjima njegovih slušalaca nego i u obliku više veoma uspješnih udžbenika i skripta, tako da trajno čuvaju uspomenu na njega.

Trudio se svim silama da pomogne studentima i da im olakša studiranje. Pisao je predavanja da bi imali odakle da uče za ispite i da se pripremaju za kolokvijume. Tome svjedoče njegove knjige: *Kurs matematike* – I i II dio (Univerzitet u Sarajevu, 1962) i *Matematika* III i IV (Univerzitet u Sarajevu, 1970). Iako zvanično izdate od strane Univerziteta, pisane su rukom – njegovim čitkim i lijepim ćiriličnim rukopisom, i umnožavane "ofset" tehnikom, jer su u ono vrijeme još uvijek postojale samo malobrojne izdavačke kuće, a nije bilo ni dovoljno pisaćih mašina. I pored toga, bile su to jako dobre knjige. Krasila ih je jednostavnost izlaganja kako bi svaki student, s malo truda, mogao da razumije njihov sadržaj i da uživa u njihovoj ljepoti.

Branislav Martić je bio sljedbenik čuvene *Beogradske škole matematike Mihaila Petrovića Alasa* i veliki poštovalac naučnog djela Jovana Karamate, koji je na sebe skretao pažnju ne samo formom i stilom nego i originalnošću naučnih rezultata. Prof. Martić je do najsitnijih detalja proučavao Karamatine radove, koji su za njega bili istovremeno i inspiracija i izvor ideja. Njemu je posvetio i neke od svojih radova, uključujući i tri posljednja, pisana u koautorstvu s autorkom ovog teksta M. Vuković [107-109]. I pored neospornog uticaja koji su na njega imali radovi Jovana Karamate, s pravom se može reći da je profesor Martić bio samouk. Nikada nije imao neko matematičko ime iza sebe, niti nekoga ko bi mu otvarao put. Uspio je potpuno samostalno, zahvaljujući upornom radu, talentu i bezgraničnoj ljubavi prema matematici. Naravno, za uspjeh su mu bile neophodne i knjige i naučni radovi, do kojih se u ono vrijeme dolazilo teško, tako da ih je najčešće posuđivao, a često morao i da prepisuje. Slobodno se može

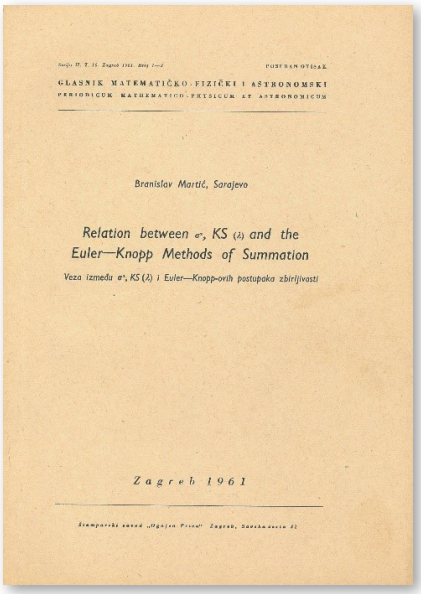


B. Martić: Kurs Matematike I, Sarajevo, 1962.



Matematika III i IV, Sarajevo 1970.

anu monografija FINAL PRINT.indd 77 6/16/2023 1:57:02 PM


GLASNIK MATEMATIČKO-FIZIČKI I ASTRONOMSKI

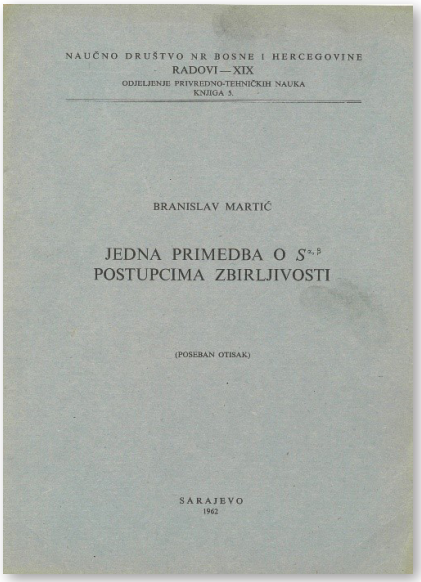
Branislav Martić, Sarajevo

Relation between e^*, KS (λ) and the Euler—Knopp Methods of Summation

Veza između e^*, KS (λ) i Euler—Knopp-ovih postupaka zbirljivosti

Zagreb 1961

B. Martić, naučni rad, Zagreb, 1961. Glasnik matematičko-fizički i astronomski


NAUČNO DRUŠTVO NR BOSNE I HERCEGOVINE
RADOVI — XIX
ODJELJENJE PRIVREDNO-TEHNIČKIH NAUKA
KNJIGA 5.

BRANISLAV MARTIĆ

JEDNA PRIMEDBA O $S^{\alpha,\beta}$ POSTUPCIMA ZBIRLJIVOSTI

(POSEBAN OTISAK)

SARAJEVO
1962

B. Martić, naučni rad Sarajevo, 1962. Naučno Društvo NR BiH, RADOVI – XIX

zaključiti da su stalan rad, radoznalost i matematička literatura bili najvažniji Martićevi učitelji.

Znao mi je reći: „Dijete, ja sam ti samouk, ja sam vuk samotnjak. Vidi ti onog Perića, to što on radi, to su strašne stvari, uuu uuu. Niko to ovdje, osim njega, ne može da razumije. Ali, nije ni čudo, on ti je učio tamo od onih jezuita“, kako je nazivao Nijemce, vjerujem zato što su ga podsjećali na strahote nacističkih tortura kroz koje je prolazio tokom tri godine koje je, kao srednjoškolac, proveo u logoru i na prinudnom radu u Njemačkoj. Inače, prof. Perića je veoma cijenio i kao čovjeka i kao naučnika i obraćao mu se za savjete, ali i za podršku, kada mu je ona bila potrebna. Privatno mu se često obraćao i sa Veselko.

Kao što sam već rekla, o Branislavu Martiću i njegovom životu se, nažalost, zna malo. Njegova istorija je bio njegov rad – njegovo stvaranje ili, bolje reći, nadarenost i velika ljubav prema matematici. Sve je radio s velikom strašću, a kod takvih ljudi važi pravilo „sve ili ništa“. Ako bih morala da u nekoliko riječi sažmem njegov život, istakla bih skromnost, plemenitost i dobrotu, žeđ za znanjem, želju da što više nauči, takmičarski duh i žestinu s kojom je govorio, naročito kada se radilo o nekoj nepravdi, na koju je posebno bio osjetljiv. Nije volio sjedničenje. Sjednice je smatrao gubljenjem vremena, a nije imao ni živaca da na njima sjedi.

Koliko sam ga poznavala, mogla bih dodati, bio je čovjek izraženog talenta kojeg je interesovalo sve što je bilo vezano za matematiku. Tragovi njegove riznice znanja sačuvani su u njegovim radovima. Oni o njemu najbolje govore. Brojao ih je i radovao im se poput malog djeteta. Zapravo, radovi su mu i bili kao djeca, koje nije imao. Nesebično nam ih je ostavio.

Po obimu i značaju svog naučnog opusa, Branislav Martić je predstavljao jednog od najplodnijih i najznačajnijih matematičara svoga vremena, u BiH i bivšoj Jugoslaviji.

Prerana smrt prekinula ga je u punoj stvaralačkoj aktivnosti. Za svoj naučni rad dobio je više značajnih prizna -

anu monografija FINAL PRINT.indd 78 6/16/2023 1:57:02 PM

nja, kao što su: Nagrada Skupštine Opštine Banja Luka (1971), a zatim i najveća – Republička nagrada za nauku „Veselin Masleša" (1984), itd. Zahvaljujući svojim naučnim rezultatima i cjelokupnom doprinosu matematici, Branislav Martić je 1971. godine postao dopisni član Akademije nauka i umjetnosti Bosne i Hercegovine.

Život Branislava Martića okončao se tiho, bez vapaja i gorčine. Predstavljao je samo smiraj za ispaćenu dušu jednog dobrog čovjeka. Za njega je postojala samo matematika, koju je bezgranično volio i između njega i nje nije bilo granica. Matematika mu je pomagala da potisne u zaborav siromaštvo u djetinjstvu i strahote njemačkog logora i rata, pomogla mu je i da mirno zakorači u vječnost.

Ovdje ćemo sada samo kratko i u grubim crtama reći nešto o nekim od najznačajnijih radova Branislava Martića, iz njegovog inače impozantnog opusa.

Prikaz radova akademika Branislava Martića

U radu [38] Branislav Martić je unio novinu u način dokazivanja neuporedivosti raznih postupaka sumabilnosti, što je referent, koji je njegov rad prikazivao za *Zentralblatt für Mathematik* primjetio i stoga radu posvetio veću pažnju u prikazu znatno opširnijem od uobičajenog.

U radu [39] B. Martić je uspio da riješi jedan otvoren problem u vezi s teškim Mercerovim stavovima koje su prije njega proučavali ruski matematičari, na čelu s Davidovim, kao i jedan od naših najvećih matematičara Jovan Karamata.

B. Martić je pokazao da između istraživanja dvije velike škole – *Ruske* i *Beogradske* – postoji „homomorfnost". Došao je do rezultata koji prije njega nije niko ne samo dokazao nego ni primijetio.

U radovima [41] i [49] Branislav Martić je, generalizujući rezultate svjetski poznatih matematičara Kamkea i D. S. Mitrinovića, došao do novih priloga teoriji diferencijalnih jednačina, dok je u radovima [42], [46] i [50] dao nove priloge određenim diferencijalnim i parcijalnim diferencijalnim jednačinama sa više nepoznatih funkcija. Značaj njegovih rezultata je utoliko veći jer su oni od velikog značaja za primjenu, pri rješavanju raznih problema hidrodinamike, elasticiteta, teoretske fizike i dr. Rezultati do kojih je došao B. Martić u ovoj oblasti, svrsishodniji su i mnogo bolji i jači od onih do kojih su došli neki poznati matematičari, kao što su: P. Nemenyi, C. Truesdell, D. S. Mitrinović i dr.

U radu [59] B. Martić je pokazao kako se neki rezultati, koji se tiču funkcija izvodnica za *Appelove funkcije* i *Lauricelleove redove*, a koje je ranije dobio Anandani, mogu dobiti pomoću tehnike koja je jednostavnija od one koju je on koristio, tako da ovaj rad predstavlja poboljšanje i Anandanijevih rezultata. U radu [67], polazeći od definicije višestrukog hipergeometrijskog reda generalisane *Lauricelleove funkcije*, koje zavise od više nezavisno promjenljivih i poznatih obrazaca za

anu monografija FINAL PRINT.indd 79 6/16/2023 1:57:02 PM

Eulerove integrale, povezane s hipergeometrijskim funkcijama, Legendreovim funkcijama, Laguerovim polinomima, Branislav Martić dobija pet obrazaca za takve integrale koji su povezani sa *hiperharmonijskim redom Lauricelleove funkcije* od kojih tri obrazca predstavljaju generalizacije odgovarajućih obrazaca H. M. Srivastova i M. C. Daousta.

Rad [61] odnosi se na problematiku kojom su se, pored ostalih, bavili H. M. Srivastava i M. C. Daoust, koji su proučavali generalisanu *Kampé de Férictovu funkciju*. U ovom radu B. Martić je dobio izvjesne funkcije generatrise koje zavise od dvije nezavisno promjenljive, koristeći pri tom samo *Taylorovu teoremu*, a zatim je dokazao kako se mogu izračunati dva *Eulerova integrala druge vrste* u kojim figuriše ta funkcija. Na kraju rada, autor je primijetio da se proučavanja funkcije generatrise mogu proširiti i na slučaj više nezavisno promjenljivih.

Rad [66], koji je B. Martić napisao u koautorstvu sa P. M. Vasićem, sadrži dvije teoreme u kojim su dobivene neke nejednakosti za $\zeta(x)$ funkciju, koje predstavljaju znatno poboljšanje u odnosu na ranije dobijene rezultate Karanikolova.

U radu [64], polazeći od rada *On fractional integration*, autora S. L. Bora i R. K. Saxena, u kom su oni došli do određenih veza između *Riemann- Liouvilleovog integrala* i *Meier-Hankelove transformacije*, B. Martić dokazuje iste tvrdnje, ali na drugi način, znatno kraće i elementarnije, koristeći pritom nešto drugačije oznake, koje se inače u matematičkoj literaturi više koriste. Problematika tog rada je, u vrijeme njegovog nastanka bila vrlo aktuelna, a rezultati vrlo značajni za nauku, jer su predstavljali doprinos boljem poznavanju veza između navedenih integrala i transformacija.

U radu [63] su dobivene funkcije – izvodnice za *Appellove funkcije* F_i (i = 1,2, 3,4) i za jedan specijalan *Lauricelleov hipergeometrijski red* F_A. B. Martić je do tog rezultata došao na znatno jednostavniji način od onog koji je ranije koristio Anandani, da bi došao do istih rezultata. Osim toga, u radu je dobivena funkcija izvodnica za opšti Lauricelleov hipergeometrijski red F_A, čime je generalisan odgovarajući rezultat Anandania i dokazano da se, primjenom metoda korištenih u ovom radu, mogu dobiti i odgovarajući rezultati za *Appelove funkcije*. Na kraju je odredio neke funkcije izvodnice i za *Saranove funkcije*. U radu [65] *O Eulerovim integralima prve i druge vrste, pridruženim raznim funkcijama*, B. Martić je, polazeći od jednog rada H. M Srivastava i M. C. Daousta, u kojem su izračunata tri *Eulerova integrala prve vrste*, kojim je obuhvaćena *generalisana Kampé de Férictova funkcija i hipergeometrijski red*, proširio njihove rezultate tako što je izračunao tri *Eulerova integrala prve vrste* koji, pored *Kampé de Férictove funkcije*, obuhvataju *polinome Čebiševa i Gegenbauera*, kao i *Legendreove funkcije prve vrste*. Osim navedenih rezultata, B. Martić je izračunao i dva *Eulerova integrala druge vrste* koji, pored generalisane *Kampé de Férictove funkcije*, obuhvataju i *modifikovanu Besselovu funkciju druge vrste*.

Predmet rada [62] je teorija sumabilnosti, inače teorija s kojom je B. Martić, radeći na doktoratu, ušao u naučnu oblast u kojoj je postigao svoje najznačajnije

anu monografija FINAL PRINT.indd 80 6/16/2023 1:57:03 PM

rezultate. Preciznije, ovaj rad je posvećen daljem proučavanju $S^{\alpha,\beta}$- postupaka sumabilnosti, koje je on, u nizu svojih radova i ranije proučavao. Najprije je dokazao da $S^{\alpha,\beta}$-postupci nisu Fourier-efikasni, za neprekidne funkcije, a zatim je ispitivao uporedivost $S^{\alpha,\beta}$-postupaka sa klasičnim postupcima (C,r), A, (LR), (VP) i $(A2)$, dokazavši, pritom, da $S^{\alpha,\beta}$-postupak nije uporediv ni sa jednim od njih. Tako je došao do zaključka da se postupci $S^{\alpha,\beta}$ mogu uspješno koristiti u nekim slučajevima u kojim se pomenuti klasični postupci sumabilnosti ne mogu koristiti. Odavde, osim toga, slijedi da se navedeni postupci mogu koristiti i u slučaju kada se ne mogu koristiti $S^{\alpha,\beta}$- postupci, ili kraće, kada oni zakazuju. Postupcima $S^{\alpha,\beta}$ sumabilnosti su se bavili i mnogi drugi matematičari, a među njima i akademik M. Bajraktarević, koji je uspio da poopšti neke od Martićevih rezultata.

I na kraju, B. Martić je u ovom radu uveo novu klasu $S_r^{\alpha,\beta}$ $(r = 0,\pm1, \pm2,\ldots)$ postupaka sumabilnosti za koju je dokazao četiri teoreme, u kojim je ispitivao međusobni odnos $S_r^{\alpha,\beta}$ postupaka, za razne vrijednosti r, i dokazao da oni imaju osobinu konzistentnosti permanencije. Najvažniji rezultat od svih rezultata dobivenih u ovom radu je da efikasnost $S_r^{\alpha,\beta}$ postupaka raste s rastom indeksa r.

Veoma interesantan je i rad [77], napisan u koautorstvu s V. Perićem, u kojem je dokazano da je svaka urediva kvazi-mreža, koja ispunjava jedan od četiri uslova distributivnosti, obavezno modularna. Time je osporena jedna hipoteza mađarskog matematičara A. Szàsza o tome da urediva kvazi-mreža ne mora biti modularna i kada ispunjava jedan od uslova distributivnosti, osim desne distributivnosti, za koju je Szàsz dokazao da povlači modularnost.

Dokaz navedene teoreme zasniva se na jednoj lemi prema kojoj su svaka dva uporediva elementa uredive kvazi-mreže permutabilna, u odnosu na obje operacije. Tvrdnja ove leme je tim interesantnija što, kao što je poznato, urediva kvazi-mreža ne mora biti komutativna. Za taj rad je akademik Đuro Kurepa, prvi učitelj V. Perića, koji je inače prvi otkrio njegov matematički talenat, rekao da je „pravi biser među biserima“.

Radovi [107-109] uglavnom su ekspozitornog karaktera, s izvjesnim poboljšanjima, novim dokazima i teoremama, čiji je cilj bio da se zaokruži cjelokupna slika o *Stolz-Karamatinim teoremama*. Od posebnog interesa je bilo istaći doprinos Jovana Karamate i njegovih učenika i razjasniti domet niza *Stolz-Karamatinih teorema*. Tako se, u prvom dijelu, rada [107], najprije navodi *Stolzova teorema:*

$$ako\ \ y_n \uparrow \infty,\quad \text{tada iz}\quad (x_n - x_{n-1}) / (y_n - y_{n-1}) \to \alpha\ \ \text{slijedi}\quad x_n/y_n \to \alpha.$$

Dalje se navodi *O*-varijanta, a zatim se ovaj dio rada zaključuje sa Karamatinim prostim funkcionalnim analogonom Stolzove teoreme i Martićevom generalizacijom posljednje.

U drugom dijelu rada dokazuje se Karamatina osnovna varijanta Stolzove teoreme, koja glasi: Ako:

anu monografija FINAL PRINT.indd 81 6/16/2023 1:57:03 PM

$$v_n - v_{n-1} \neq 0 \ (\forall\, n), \quad |\, v_n \,| \to \infty \,, \ n \to \infty \ \text{ i } \ \sum_{k=1}^{n} |v_k - v_{k-1}| \ = \ O\,(|\, v_n \,|),$$

tada, za svaki niz u_n,

$$\text{iz} \quad \sigma_n = (u_n - u_{n-1}) \,/\, (v_n - v_{n-1}) \to \alpha \ \text{ slijedi } \quad u_n / v_n \to \alpha.$$

To, inače, Karamata nije nikada dokazao. Zatim se dokazuje O-varijanta Karamatine teoreme (Teorema 2.2.), za koju uslov $|\, v_n \,| \to \infty$ više nije potreban. Poslije toga je navedeno Karamatino osnovno poboljšanje (Teorema 2.3.) i izloženo Martićevo O-poboljšanje (Teorema 2.4.) u kojem uslov $|\, v_n \,| \to \infty$ takođe više nije potreban.

U trećem dijelu rada se najprije objašnjavaju pojmovi *Abelove, Tauberove* i *Mercerove teoreme*. Zatim se daju precizna značenja ova tri pojma uvođenjem *Töplitzove trouglaste matrice* i, s njom povezane metode sumabilnosti A. Dalje se, navodi *Osnovna Töplitzova teorema regularnosti*, za ove metode. Uz ovakvu interpretaciju odmah se vidi da je *Stolzova originalna teorema* upravo *Abelova teorema* [107].

U nastavku – u četvrtom dijelu rada [108], izvode se *Mercerove teoreme* raznih autora (Mercer, Karamata, Hardy, Čakalov-Aljančić, Vijayraghavan, Izumi, Davidov i Polya) iz osnovne Teoreme 2.3. (Karamata) i Teoreme 2.4. (Martić).

anu monografija FINAL PRINT.indd 82 6/16/2023 1:57:03 PM

Bibliografija akademika Branislava Martića

A. Naučni radovi

[1] *O jednom skupu dvoparametarskih postupaka zbirljivosti i njihovim primjenama* (doktorska disertacija), Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Sarajevu, Sarajevo (1961), 57 str.

[2] *Primedba na jednu stereometrijsku nejednačinu M. Petrovića*, Zbornik radova LXIX, Matematematički institut SAN, 8, Beograd (1960), pp. 131-132.

[3] *Veza izmedu Rieszovog i Karamata-Stirlingovih postupaka zbirljivosti*, Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R.S. de Serbie, XII, Beograd (1960), pp. 51-56.

[4] *O funkcijama koje zadovoljavaju Cauchy-Riemannove jednačine a nisu analitičke*, Publikacije Tehničkog fakulteta u Sarajevu, 3 (1), Sarajevo (1960), pp. 47-50.

[5] *Veza izmedu* R_{λ_i} *postupaka i* σ^{α} *postupaka zbirljivosti*, Bilten na Društvoto na matematičarite i fizičarite od NR Makedonija, XI, Skopje (1960), pp. 9-13.

[6] *Relation between* σ^{α}, *KS*(*L*), *and the Euler-Knopp Methods of Summation*, Glasnik matematičko-fizički i astronomski, 16, Zagreb (1961), pp.79-85.

[7] *The Application of Karamata-Stirling Methods to Analytical Continuation and Relation with Borel's Method of Summation*, ibid. 16 (1961), pp. 171-175.

[8] *Primena Karamata-Stirlingovih postupaka zbirljivosti na asimptotske i trigonometrijske redove*, Publikacije Tehničkog fakulteta u Sarajevu, 4 (1), Sarajevo (1961), pp. 23 -31.

[9] *O inkluziji Eulerovih i Vučkovićevih postupaka*, Bilten na Društvoto na matematičarite i fizičarite od NR Makedonija, XII, Skopje (1961), pp. 29-32.

[10] *O jednom skupu dvoparametarskih postupaka zbirljivosti i njihovim primenama*, JAZU 325, Zagreb (1962), pp. 127-163.

[11] *Dva stava inkluzije jedne klase postupaka zbirljiivosti*, Bilten na Društvoto na matematičarite i fizičarite od NR Makedonija, XIII, Skopje (1962), pp. 13-20.

[12] *Jedna primedba o* $S^{\alpha,\beta}$ *postupcima zbirljivosti,* Radovi Naučnog društva NR BiH, XIX (5) Sarajevo (1962), pp. 45- 48.

[13] *The mutual inclusion* $S^{\alpha,\beta}$ *methods of summation*, Publication de l' Institut Mathématique 2 (16), Beograd (1962), pp. 93-98.

anu monografija FINAL PRINT.indd 83 6/16/2023 1:57:03 PM

[14] *On the S* $^{\alpha,\beta}$ *summability of series of Legendre polynomials*, Glasnik matematičko-fizički i astronomski, 18, Zagreb (1962), pp. 69-74.

[15] *Note on the summation of a classical divergent series*, Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la SR. de Serbie, XV, Beograd (1963), pp. 17-20

[16] *Neki stavovi o raznim sredinama*, Naučno društvo SR BiH, Radovi, XXII (6), Sarajevo (1963), pp. 57-61.

[17] *Jedna vrsta generalisanih izvoda i njihove primene*, Naučno društvo SR BiH, Radovi, XXII (6), Sarajevo (1963), pp. 47-55.

[18] *Uopštavanje jednog stava Tauberove prirode*, Naučno društvo SR BiH, Radovi, XXII (6), Sarajevo (1963) pp. 63-72.

[19] *On a sum of fractional parts*, Matematički vesnik, 1 (16), Beograd (1964), pp. 45-46.

[20] *Dve klase funkcija koje nisu analitičke u tački, a ispunjavaju u njoj Cauchy-Riemann-ove uslove*, Matematički vesnik, 2 (16), Beograd (1964), pp. 151-153. (sa D. Adamovićem)

[21] *Relations among KS* (λ) *and certain other methods for evaluation of sequences and series,* Matematički vesnik, 4 (16), Beograd (1964), pp. 346-347.

[22] *On the B transformations of M. Bajraktarević*, Glasnik matematičko-fizički i astronomski, 19, Zagreb (1964), pp. 225-235.

[23] *O jednoj opštoj klasi postupaka zbirljivosti*, Bilten na Društvoto na matematičarite i fizičarite od SR Makedonija, XV, Skopje (1964), pp. 5-17.

[24] *Neka istraživanja o Laplaceovoj i Stiltjeseovoj transformaciji*, Naučno društvo SR BiH, Radovi, XXV (7), Sarajevo (1964), pp. 242-250.

[25] *O razlaganju jedne racionalne funkcije u parcijalne razlomke i neke primene*, Naučno društvo SR BiH, Radovi, XXV (7), Sarajevo (1964), pp. 235-241.

[26] *O odnosima između* (N,1/n+1), (R) *i KS*(λ) *postupaka zbirljivosti,* Naučno društvo SR BiH, Radovi, XXV (7), Sarajevo (1964), pp. 251-257.

[27] *O Cauchy-evom proizvodu dva reda*, Naučno društvo SR BiH, Radovi, XXV (7), Sarajevo (1964), pp. 225-234.

[28] *On some iterative methods of summability*, Matematički vesnik, 2 (17), Beograd (1965), pp. 80-83.

[29] *O jednoj klasi linearnih diferencijalnih jednačina*, Matematički vesnik, 2 (17), Beograd (1965), pp. 204-206.

[30] *Neki stavovi o* Z_k *i* σ^{α} *transformacijama*, Bilten na Društvoto na matematičarite i fizičarite od SR Makedonija, XVI, Skopje (1965), pp. 19-25.

[31] *O zbirljivosti Dirichlet-ovih redova i neke relacije neuporedivosti*, Naučno društvo SR BiH, Radovi, XXVIII, Sarajevo (1965), pp. 135-145.

[32] *O jednoj regularnoj trouglastoj matrici*, Naučno društvo SR BiH, Radovi XXVIII, Sarajevo (1965), pp. 121-133.

[33] *Generalisani parcijalni izvodi i njihove primene*, Naučno društvo SR BiH, Radovi XXVIII, Sarajevo (1965), pp. 147-156.

[34] *O jednoj Laplace-ovoj diferencijalnoj jednačini*, Naučno društvo SR BiH, Radovi XXVIII, Sarajevo (1965), pp. 157-162.

anu monografija FINAL PRINT.indd 84 6/16/2023 1:57:03 PM

[35] *O zbirljivosti jedne klase asimptotskih redova postupcima KS*(λ), Glas SANU, Odelenje prirodnih i matematičkih nauka, CCLXIII, 28, Beograd (1966), pp. 83-91.

[36] *Beleška o nekim relacijama neuporedivosti*, Bilten na Društvoto na matematičarite i fizičarite od SR Makedonija XVII, Skopje (1966), pp. 11-18.

[37] *O nekim neodređenim diferencijalnim jednačinama*, Bilten na Društvoto na matematičarite i fizičarite od SR Makedonija XVII, Skopje (1966), pp. 5-10.

[38] *O jednoj integralnoj jednačini*, Bilten Društva matematičara, fizičara i astronoma SRBiH, 9, Sarajevo (1966), pp. 15-19.

[39] *Neka istraživanja o jednom skupu asimptotskih redova*, Radovi ANUBiH, XXIX (9), Sarajevo (1966), pp. 5-12.

[40] *Dopune Kamke-ovom delu*, Radovi ANUBiH, XXIX (9), Sarajevo (1966), pp. 13-18.

[41] *O nekim parcijalnim diferencijalnim jednačinama sa dve nepoznate funkcije*, Radovi ANUBiH, XXIX (9), Sarajevo (1966), pp. 19-28.

[42] *On a Mercerian theorem*, Glasnik matematički, 2 (22), Zagreb (1967), pp. 61- 63.

[43] *Some theorems concerning incomparability relations*, Glasnik matematički, 2 (22), Zagreb (1967), pp. 53-59.

[44] *On the* σ^{α} *summability of a class of asymptotic series*, Publications de l' Institut Mathématique, 7 (21), Beograd (1967), pp. 185-190.

[45] *Jedan problem o skoro apsolutno konvergentnim nizovima*, Bilten Društva matematičara, fizičara i astronoma SR BiH, 10, Sarajevo (1967), pp. 1-3.

[46] *O jednom problemu J. L. Ulmana*, Bilten Društva matematičara, fizičara i astronoma SR BiH, 10, Sarajevo (1967), pp. 4-7.

[47] *On an incomparability relation*, Matematički vesnik, 4 (19), Beograd (1967), pp. 304-306.

[48] *Compléments au traité de Kamke* I, Matematički vesnik, 4 (19), Beograd (1967), pp. 263-264.

[49] *Sur certaines équations aux dérivées partielles indéterminées*, Matematički vesnik, 4 (19), Beograd (1967), pp. 250-252.

[50] *Neki novi rezultati o* $[F, d_n]$ i $S^{\alpha,\beta}$ *transformacijama*, Matematički vesnik, 6 (21) Beograd (1969), pp. 215-219.

[51] *Primena jednog novog postupka u teoriji Fourierovih redova*, Radovi ANUBiH, XXXIII (10), Sarajevo (1969), pp. 5-15.

[52] *O Hermite-ovim transformacijama Diracove* δ *- funkcije*, Radovi ANUBiH, XXXIII (10), Sarajevo (1969), pp. 79-85.

[53] *Novi prilozi teoriji Karamata-Stirlingovih postupaka sumabilnosti*, Radovi ANUBiH, XXXIII (10), Sarajevo (1969), pp. 39-50.

[54] *Dijagram optimalnog koda srpskog štampanog teksta*, Telekomunikacije, XIX (1-2), Sarajevo (1970), pp. 13-14.

[55] *Some formulae involving double hypergeometric functions of higher order*, Matematički vesnik, 8 (23), Beograd (1971), pp. 353- 355.

[56] *Some new generating functions for the generalized Lauricella's series*, Publications de l' Institut Mathématique, 12 (26), Beograd (1971), pp. 8l- 83.

anu monografija FINAL PRINT.indd 85 6/16/2023 1:57:03 PM

[57] *Konstrukcija Shannon-Fano-vog koda srpskog štampanog teksta*, Elektrotehnika, XX (4), Sarajevo (1971), pp. l3-76.

[58] *Compléments au traité de Kamke*, Note 3, Bulletin de la Societé des Mathématiciens et Physiciens de Macédoine, XXII, Skopje (1971), pp. 25-32.

[59] *A supplement to the Anandani's paper*, Glasnik matematički, 7 (27) Zagreb (1972), pp. 67-68.

[60] *Dva primera optimizacije pomoću varijacionog računa,* Automatika, 5 (1972), pp. 345-347.

[61] *Some results involving a generalized Kampé de Férict fonction*, Publications de l' Institut Mathématique, 15 (29), Beograd (1973), pp. 101-104.

[62] *Neke relacije neuporedivosti i translativnosti za* $S^{\alpha,\beta}$ *postupke sumabilnosti*, Radovi Odjeljenja prirodnih i matematičkih nauka ANUBiH, XLV (12), Sarajevo (1973), pp. 71-84.

[63] *Prilog nekim funkcijama izvodnicama*, Radovi Odjeljenja prirodnih i matematičkih nauka ANUBiH, XLV (12), Sarajevo (1973), pp. 61-69.

[64] *O vezama između Riemann-Liouville-ovog razlomljenog integrala Meier-ove i Henkel-ove transformacije*, Radovi Odjeljenja prirodnih i matematičkih nauka ANUBiH, XLV (12), Sarajevo (1973), pp. l45-148.

[65] *O Eulerovim integralima prve i druge vrste pridruženim raznim funkcijama*, Radovi Odjeljenja prirodnih i matematičkih nauka ANUBiH, XLV (12), Sarajevo (1973), pp. 149-154.

[66] *A supplement to Karanikolov' s paper*, Publikacije Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu, Ser. Matematika i fizika, 445, Beograd (1973), pp. 165-166.

[67] *On Eulerian integrals of the first and second kind associated with multiple hypergeometric series*, Matematički vesnik, 10 (25), Beograd (1973), pp. 123-126.

[68] *A note on fractional integration*, Publications de l' Institut Mathématique,16 (30), Beograd (1973), pp. 111-113.

[69] *Neke analitičke nejednakosti*, Radovi Odjeljenja Prirodnih i matematičkih nauka, ANUBiH, LII (14), Sarajevo (1974), pp. 29-36.

[70] *O nekim integralnim nejednakostima*, Radovi Odjeljenja prirodnih i matematičkih nauka ANUBiH, LII (14), Sarajevo (1974), pp. 37- 44.

[71] *Some inequalities connected with exponential function*, Matematički vesnik,12 (17), Beograd (1975), pp. 163-166.

[72] *On some inequalities*, Matematički vesnik,12 (17), Beograd (1975), pp. 95-97.

[73] *Neke primedbe o neanalitičkim funkcijama*, Radovi Odjeljenja prirodnih i matematičkih nauka ANUBiH, LIX (16), Sarajevo (1976), pp. 117-125.

[74] *Prilog neanalitičkim funkcijama*, Odjeljenja prirodnih i matematičkih nauka ANUBiH, LIX (16), Sarajevo (1976), pp. 127 -131.

[75] *On the completeness of the nonclassical system A',* Glasnik matematički, 11 (31), Zagreb (1976), pp.187-198.

[76] *On some systems of partial differential equations and on some classes of nonanalytic functions*, Radovi Odjeljenja prirodnih i matematičkih nauka ANUBiH, LIX (16), Sarajevo (1976), pp. 133-138.

anu monografija FINAL PRINT.indd 86 6/16/2023 1:57:03 PM

[77] *On the modularity of some orderable cross-lattices*, Publications de l' Institut Mathématique, 22 (36), Beograd (1977), pp. 187-188. (sa V. Perićem)

[78] *Quelques équations fonnctionelles contenant plusieurs fonctions inconnues*, Radovi Odjeljenja prirodnih i matmatičkih nauka ANUBiH, LXI (17), Sarajevo (1978), pp. 159-163.

[79] *On some functionals equations*, Radovi Odjeljenja prirodnih i matmatičkih nauka ANUBiH, LXI (17), Sarajevo (1978), pp. 253-258.

[80] *On some solutions of partial differential equations*, Radovi Odjeljenja prirodnih i matmatičkih nauka ANUBiH, LXI (17), Sarajevo (1978), pp. 147-151

[81] *A remark on partial differential equations which are in connection with nonanalytic functions*, Radovi Odjeljenja prirodnih i matmatičkih nauka ANUBiH, LXI (17), Sarajevo (1978), pp. 21-25.

[82] *Improvement of some analytic inequalities*, Radovi Odjeljenja prirodnih i matematičkih nauka ANUBiH, LXI (17), Sarajevo (1978), pp. 85-93.

[83] *Note sur certaines inéqualités d'intégrales*, Radovi Odjeljenja prirodnih i matematičkih nauka ANUBiH, LXI (17), Sarajevo (1978), pp. 165-168.

[84] *Sur quelques généralisations des équations fonctionelles*, Publikacije Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu, Ser. Matematika i fizika, No. 602-603, Beograd (1978), pp. 223-228. (sa R. R. Janjićem)

[85] *Površina i integral*, Matematika, 2 (1979), pp. 28-30.

[86] *Prilog nekim nejednakostima*, Matematika, 4 (1979), pp. 58-59.

[87] *Mnogostrukosti grupa* I, Matematički vesnik, 3 (16) (31), Beograd (1979), pp. 33-39.

[88] *On some interpolating inequalites*, Publications de l' Institut Mathématique 26 (40), Beograd (1979), pp. 171-173.

[89] *Mnogostrukosti grupa* II, Matematički vesnik, 3 (16) (31), Beograd (1979), pp. 165-168.

[90] *Grupne mnogostrukosti* III, Radovi Odjeljenja prirodnih i matematičkih nauka ANUBiH LXVI (19), Sarajevo (1980), pp. 133-138.

[91] *Grupne mnogostrukosti* IV, Radovi Odjeljenja prirodnih i matematičkih nauka ANUBiH, LXVI (19), Sarajevo (1980), pp. 139-142.

[92] *Grupne mnogostrukosti* V, Radovi Odjeljenja prirodnih i matematičkih nauka ANUBiH, LXVI (19), Sarajevo (1980), pp.143-145.

[93] *Grupne mnogostrukosti* VI, Radovi Odjeljenja prirodnih i matematičkih nauka ANUBiH, LXVI (19), Sarajevo (1980), pp. 147-149.

[94] *Sur certaines équations fonctionnelles*, Radovi Odjeljenja prirodnih i matematičkih nauka ANUBiH, LXVI (19), Sarajevo (1980), pp. 19-23.

[95] *A note on two inequalities*, Radovi Odjeljenja prirodnih i matematičkih nauka ANUBiH, LXVI (19), Sarajevo (1980), pp. 151-154.

[96] *On a sequence of inequalities,* Radovi Odjeljenja prirodnih i matematičkih nauka ANUBiH, LXVI (19), Sarajevo (1980), pp. 129-132.

[97] *Area and integral*, The Mathematical Journal, 15 (1) (1981), pp. 51-52.

anu monografija FINAL PRINT.indd 87 6/16/2023 1:57:03 PM

[98] *O - regularly varying functions*, Publikacije Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu, Ser. matematika i fizika, No. 716-723, Beograd (1981), pp. 50-54.

[99] *On some Mercerian theorems*, Publications de l' Institut Mathématique, 30 (44), Beograd (1981), pp.113-115.

[100] *Iterative systems and diagram algorithms*, Mathematical Logic Quarterly (Formerly: Z. Math. Logik Grundlagen Math., 27 (1981), pp. 561-564.

[101] *Remark on an elementary gem concerning* Π_n . Two Year College Math. Journal, 13 (2) (1982), pp. 158-159.

[102]*On some theorems of Hardy and Karamata*, Radovi Odjeljenja prirodnih i matematičkih nauka ANUBiH, LXXIV (22), Sarajevo (1983), pp. 101-108.

[103] *Note on some Mercerian theorem*, Publications de l' Institut Mathématique, 35 (49), Beograd (1984), pp. 83-86.

[104] *A remark on a theorem of Stolz and one of Jensen*, Radovi Odjeljenja prirodnih i matematičkih nauka ANUBiH, LXXVIII (24), Sarajevo (1985), pp. 35-39.

[105] *On the notion quasi-monotone in Banach spaces*, Radovi Odjeljenja prirodnih i matematičkih nauka ANUBiH, LXXVIII (24), Sarajevo (1985), pp. 53-57.

[106] *Some investigations of an asymptotic relation*, Radovi Odjeljenja prirodnih i matematičkih nauka ANUBiH, LXXVIII (24), Sarajevo (1985), pp. 95- 99.

[107] *Stolz-Karamata Theorems,* I (*To the memory of Jovan Karamata*), Radovi Filozofskog fakulteta Pale, br. 3, Knj. 1, Pale (2007), pp. 9-18. (sa M.Vuković)

[108] *Boundary Theorems of Stolz-Karamata type,* Faculty of Philosophy, Proceedings of the papers of the Scientific Conference Pale, May 17-18, 2007, Knj. 3, Том 2, Phylosophical and Natural-Mathematical Sciences, (2009), pp. 503-539. (sa M. Vuković)

[109] *Stolz-Karamata Theorems, Part* II (*To the memory of Jovan Karamata*), Radovi Filozofskog fakulteta Pale, br. 14, Knj. 2, Pale (2012), 33–42. (sa M.Vuković).

B. STRUČNI RADOVI

[1] *Zbirka rešenih ispitnih zadataka iz Matematike* I, Sarajevo, 1958 (sa M. Maravićem)

[2] *Matematika,* Univerzitet u Sarajevu, Sarajevo, 1959.

[3] *Matematika* I*,* I deo, Univerzitet u Sarajevu, Sarajevo, 1962.

[4] *Matematika* I*,* II deo, Mašinski fakultet u Sarajevu, Sarajevo, 1962.

[5] *Matematika* II, Univerzitet u Sarajevu, Sarajevo, 1965.

[6] *Laplace-ova transformacija, Kombinatorika, Matrice,* Univerzitet u Sarajevu, Sarajevo,1965.

[7] *Matematika,* III i IV, Univerzitet u Sarajevu, Sarajevo, 1970.

[8] *Teorija Verovatnoće i Matematička statistika*, Tehnički fakultet, Banja Luka, 1971.

anu monografija FINAL PRINT.indd 88 6/16/2023 1:57:03 PM



Veselin Perić

(*Zagorič 1930 – Podgorica 2009*)

U praskozorje 3. decembra 2009. godine, u Podgorici je završio svoj životni put akademik Veselin Perić, do rata profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Sarajevu, a zatim Univerziteta Crne Gore u Podgorici i Filozofskog fakulteta Pale, član Akademije nauka i umjetnost Bosne i Hercegovine (ANUBiH), Crnogorske akademije nauka i umjetnosti (CANU) van radnog sastava, kao i član ANURS. Bio je jedan od najistaknutijih matematičara BiH i Jugoslavije u oblasti algebre i prvi moderni algebrista na prostorima BiH i bivše Jugoslavije.

Akademik Veselin Perić je rođen 20. januara 1930. godine u Zagoriču, nadomak Podgorice (Crna Gora), kao najstarije dijete u porodici *Stanka* i *Sofije Perić*. Kasnije je dobio i sestru *Vojku*. Rano je ostao bez oca. Osnovno i srednje obrazovanje stekao je u Podgorici. Iako je bio briljantan učenik, jedan od najboljih u svojoj generaciji, samohrana majka Sofija nije mogla da ga pošalje na studij da produži školovanje. Tek nakon godinu dana rada u opštini, otišao je da studira matematiku u Zagreb, gdje su u to vrijeme upućivali mlade iz Crne Gore da studiraju. Za vrijeme studija Veselin Perić se isticao kao rijetko nadaren i vrijedan student tako da je već kao student bio angažovan u nastavi, kao demonstrator.

Studij matematike je završio 15. aprila 1954. godine na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Te iste godine dobio je posao na Univerzitetu u Sarajevu, a počeo je da radi, godinu dana kasnije, nakon odsluženja vojnog roka, i to na Katedri za matematiku Prirodno-matematičkog odsjeka Filozofskog

2010 Mathematics Subject Classification: 01A70, 13- XX, 16-XX, 20-XX, 03-XX
Key words and phrases: Biographies, Bibliographies; Commutative (Associative) rings and algebras. Rings: (π-) regular, 0-dimensional, (semi)primes, anti-inverse, with polynomial identity; Commutativity of rings: s-unital, Near-rings.

anu monografija FINAL PRINT.indd 89 6/16/2023 1:57:03 PM

fakulteta u Sarajevu, koji je ubrzo prerastao u Odsjek za matematiku novoosnovanog Prirodno-matematičkog fakulteta.

Veselin Perić, jedan iz plejade prvih asistenata Katedre za matematiku Univerziteta u Sarajevu, koji je prošao strogu proceduru izbora stare, izuzetno stroge, ali vrlo principijelne i pravedne profesorice Vere Šnajder, koja je bila jedan od glavnih osnivača Odsjeka za matematiku, izrašće u prvog algebristu i jednog od najznačajnijih profesora matematike na Sarajevskom univerzitetu, u Bosni i Hercegovini i šire. Ljubav prema algebri se kod V. Perića vjerovatno rodila već tokom studija, s obzirom na to da je bio demonstrator prof. Đure Kurepe, jednog od tada najčuvenijih profesora Sveučilišta u Zagrebu i da je, pod njegovim mentorstvom, radio diplomski rad.

Pored njegove izrazite sklonosti ka toj apstraktnoj i teškoj, ali i važnoj matematičkoj disciplini, vrlo značajnu ulogu je odigrao i njegov studijski boravak u Njemačkoj na koji je otišao zahvaljujući prof. Veri Šnajder, koja mu je obezbijedila stipendiju. Prof. Perić je proveo sedam semestara na Matematičkom institutu Univerziteta u Göttingenu, najprije kao stipendista DAAD[3] i Jugoslovenske komisije za kulturne veze s inostranstvom, od septembra 1957. do jula 1958, a zatim mu je, na preporuku prof. Maxa Deuringa, dodijeljena stipendija Zadužbine „Alexander von Humboldt Stiftung“ iz Bona, za period od septembra 1958. do februara 1960.

Matematički institut u Göttingenu je do Drugog svjetskog rata bio jedan od vodećih matematičkih i najjačih algebarskih centara u Evropi i svijetu – škola apstraktne algebre, čiji je jedan od utemeljivača bila i čuvena *Amalie Emmy Nöther*. Svakako treba istaći da je uspon Göttingena trajao generacijama, kao i da je, i pored toga što je nacistička politika otjerala Jevreje – glavne zvijezde njemačkih univerziteta, između ostalih i Emmy Nöther – Univerzitet u Göttingenu još uvijek bio univerzitet visokog nivoa kada je na njega došao Veselin Perić. Susreti sa značajnim matematičarima poput Maxa Deuringa, Helmuta Hassea, Wolfganga Krulla, i drugih, bili su od velikog značaja i uticaja na Veselina Perića. Tamo se temeljito upoznao sa savremenim tokovima u matematici, a naročito u modernoj apstraktnoj algebri.

Tokom boravka u Njemačkoj prof. Perić se oženio mladom i obrazovanom Njemicom *Marianne Lehmann*. Tamo su se rodila i njihova djeca: sin *Andreas – Andrija* i kćerka *Mirjana – Janke*, koja, ne samo da su bila „dvojezična“ – govorili su perfektno i srpskohrvatski i njemački jezik – nego i odlični đaci i studenti. Andreas je završio studij medicine i jedno vrijeme (do odlaska u Njemačku) radio kao asistent na Medicinskom fakultetu u Sarajevu, dok je Mirjana završila dvije studijske grupe na Filozofskom fakultetu u Sarajevu i dobila dvije diplome: profesora anglistike i profesora germanistike.

Da prof. Perić nije osjećao veliku ljubav prema svojoj zemlji i moralnu obavezu prema Fakultetu i prof. Šnajder, koja ga je poslala u Göttingen, vjerovatno se ne bi vratio iz Njemačke.

3 Njemačka služba akademske razmjene.

anu monografija FINAL PRINT.indd 90 6/16/2023 1:57:03 PM



Grb Univerziteta u Göttingenu



Mathematisches Institut Göttingen

Postdiplomski studij Veselin Perić je završio, u Zagrebu 1965. godine, istovremeno radeći i studirajući, odbranivši magistarski rad *Teorija ideala E. Nöther i R. Dedekinda*, pod mentorstvom čuvenog prof. Đure Kurepe, a samo godinu dana kasnije (1966) odbranio je i doktorsku disertaciju *Prilog teoriji ideala*, također pod rukovodstvom prof. Kurepe.

Po povratku iz Göttingena u Sarajevo, 60-ih godina prošlog vijeka, Veselin Perić je bio jedini moderno obrazovan algebrista na području Bosne i Hercegovine, ali i tadašnje Jugoslavije. Može se slobodno reći da je bio utemaljivač moderne algebre kod nas, tako da se razvoj algebre u našoj sredini može, s pravom, vezati za njegovo ime. Zapravo, do njegovog dolaska nastava algebre se nalazila na nivou algebre s početka devetnaestog vijeka, tj. u fazi prije pojave fundamentalnih radova Évarista Galoisa, koji su doveli do rješavanja vijekovima otvorenih problema kao što su trisekcija ugla, duplikacija kocke, kvadratura kruga i rješivost algebarske jednačine pomoću radikala.

Mi studenti smo za prof. Perića čuli od studenata ponavljača i prije prvog susreta s njim. Možda su tražili opravdanje za svoj neuspjeh ili su htjeli da nas zaplaše, u svakom slučaju prije ovo drugo nego da nam pomognu. Savjetovali su nam da na ispite iz algebre ne izlazimo odmah, po završetku predavanja, jer su tada zadaci najteži, nego da algebru polažemo kasnije, recimo na proljeće, jer tada profesor ponovi po koji zadatak.

A prof. Perić, s kojim smo se sreli na drugoj godini studija, na predavanjima iz Linearne algebre, već pri prvom susretu fascinirao nas je svojom pojavom – gospodskim držanjem i manirima svjetskog čovjeka. Bio je uvijek u bijeloj košulji, s kravatom, besprijekorno ispeglanog odijela. Dolazio je sa šeširom na glavi koji je

anu monografija FINAL PRINT.indd 91 6/16/2023 1:57:03 PM

skidao da pozdravi, ne samo kolege profesore nego i studente i portire i sve ostale. Pored algebre, učio nas je i urednosti, lijepom ponašanju, ali i tome kakav bi profesor trebalo da bude.

Naoružan znanjem koje je stekao u čuvenoj školi Emmy Nöther u Göttingenu i entuzijazmom mladog čovjeka, Veselin Perić je vrlo brzo skrenuo na sebe pažnju, kako kolega, tako i nas studenata.

Što se tiče nastave, kod prof. Perića nas je najviše impresionirao njegov način predavanja, po kom se razlikovao od svih ostalih profesora. Iako njegova predavanja nisu bila „frizirana," ona su za nas studente bila posebna. Posmatrajući ga kako se nervira dok pred punom salom studenata smišlja dokaz neke teške teoreme, od njega smo učili kako matematičar treba da misli, kako se dokazuju tvrdnje, zašto ostaju jedne, a zašto odbacuju druge hipoteze ... I svi, baš svi smo željeli da budemo poput našeg profesora.

U sjećanju mi je ostalo i kako je, pokušavajući da dokaže neku teoremu, „ljuteći se na sebe" jer ne može nešto da vidi, nervozno lupkao kredom po tabli, govoreći povišenim tonom: „Pa označite ga, ako baš hoćete i sa *dž*."

Mi studenti, bili smo ponosni kada smo shvatili da se naša algebra razlikuje od algebre na drugim univerzitetima i da je naša na višem nivou od drugih. Da je prof. Perić bio veoma cijenjen algebrista, vidjelo se i po tome što je neko vrijeme, nakon povratka iz Göttingena, predavao algebru i na postdiplomskom studiju u Zagrebu.

Prof. Periću se, pored nas studenata, divio i njegov kolega i prijatelj akademik Branislav Martić. Znao bi mi reći: „Vidi ti njega, dijete. To što on radi, to su strašne stvari – da ubije čovjeka." Zatim bi, pokazujući neku knjigu iz algebre, dodao: „To ovdje niko, osim njega, ne može da razumije. Ali, nije ni čudo. On ti je to učio tamo od onih jezuita".

Da je naša algebra „jaka", potvrdilo se i kada smo i mi, poput naših profesora, krenuli u svijet, da stičemo znanje na čuvenim stranim univerzitetima, kao što su Moskovski državni univerzitet Lomonosov, u Moskvi, Univerzitet „Pierre et Marie Curie", u Parizu, itd. Bili smo ponosni, jer nismo zaostajali iz algebre ni za onima koji su dolazili sa većih i starijih univerziteta od našeg.

Lako smo se uklapali u razne oblasti algebre. I sada, kao da je bilo juče, čujem riječi Alekseja Ivanoviča Kostrikina, dopisnog člana Akademije nauka SSSR i šefa Katedre za višu algebru Moskovskog državnog univerziteta, dok u svoj tefter upisuje moje ime i predmete koje sam položila iz algebre i govori:

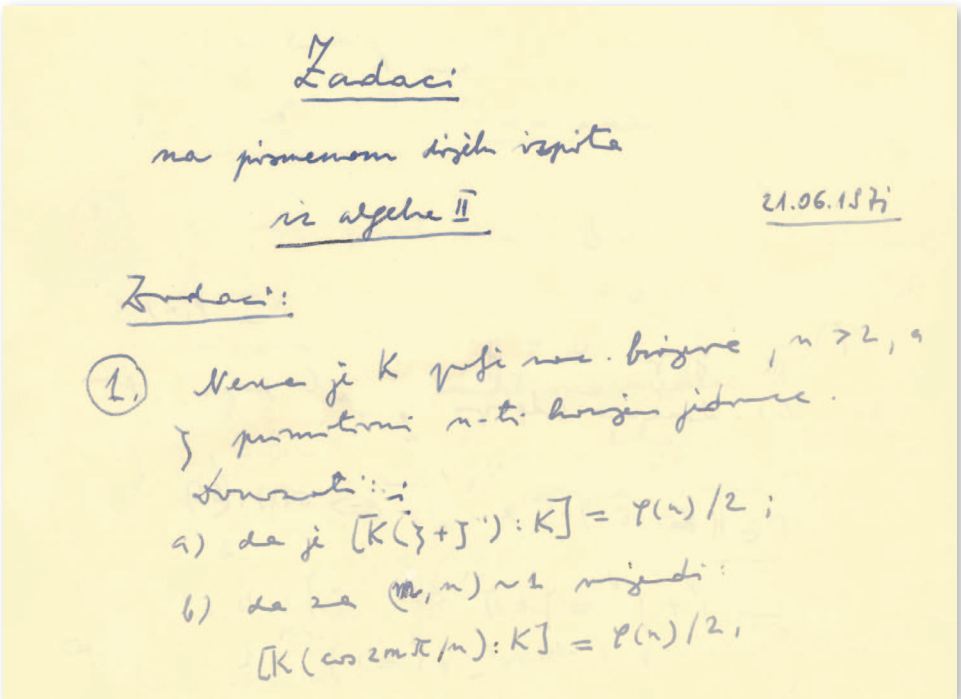
„Dosada nam iz Jugoslavije nije niko došao sa više znanja iz algebre od vas." Ja sam tek tada u Moskvi shvatila na šta je mislio prof. Perić kada nam je govorio da od nas želi da stvori dobre algebriste, poput dobrog šnajdera koji može da skroji i da sašije cijelu košulju, a ne da svako kroji samo po jedan njen dio: neko kragnu, neko rukav, odnosno prednjicu košulje ili manžetu, itd.

Time je želio da kaže da želi da nas osposobi da se svako od nas može uklopiti u bilo koju od oblasti algebre.

anu monografija FINAL PRINT.indd 92 6/16/2023 1:57:03 PM

Često se u priči s kolegama, kada pričamo o našim profesorima i našim studentskim danima ili o našim prvim učešćima na naučnim seminarima i kolokvijumima Odsjeka za matematiku, sjetimo s kakvom lakoćom je prof. Perić pratio naučna izlaganja, postavljao pitanja i uključivao se u rasprave o izloženim rezultatima, i to ne samo iz oblasti algebre nego i iz drugih oblasti matematike. A na Odsjeku za matematiku su se u to vrijeme ređali brojni gostujući predavači od kojih su neki spadali u sami vrh svjetske matematike. Spomenuću samo neke od njih: Marka Krasnera – mog drugog velikog učitelja, Paula Erdösa, Waltera Rudina i Mary Ellen Rudin, Anatolija Gardejeviča Kostjučenka, Olega Vladimiroviča Besova, Vasilija Aleksejeviča Iskovskih, Heinza Langera, Richarda Wiegandta, itd.

Prof. Perić dugo vremena nije imao asistenta, tako da nam je, pored predavanja, držao i vježbe, a sam je sastavljao i ispitne zadatke, koji su bili originalni i teški, ponekad i preteški, jer su se u njima mogli naći dijelovi teorema ili tvrdnji koje je on, pišući knjigu, upravo dokazivao, a dešavalo se i da u ispitnom zadatku uvede i neki novi, nama nepoznat pojam, što nas je dodatno zbunjivalo. Inače, u ono vrijeme, zadaci na pismenom dijelu ispita su kod većine naših profesora – posebno kod Perića i Vajzovića bili originalni i teški, a od pismenog dijela ispita, ne samo da je zavisila ocjena, nego i prolaz, jer je pismeni ispit bio eliminatoran. Od tada se puno promijenilo. U današnje vrijeme bi svi iz moje generacije bili desetkaši, jer smo svi bili odlični učenici i zaljubljenici u matematiku. Jedan od zadaka prof. Perića sa rješenjem:


Zadaci

na pismenom dijelu ispita

iz algebre II

21.06.1971

Zadaci:

1. Neka je K polje nac. brojeva, $n > 2$, a ζ primitivni n-ti korijen jedinice.

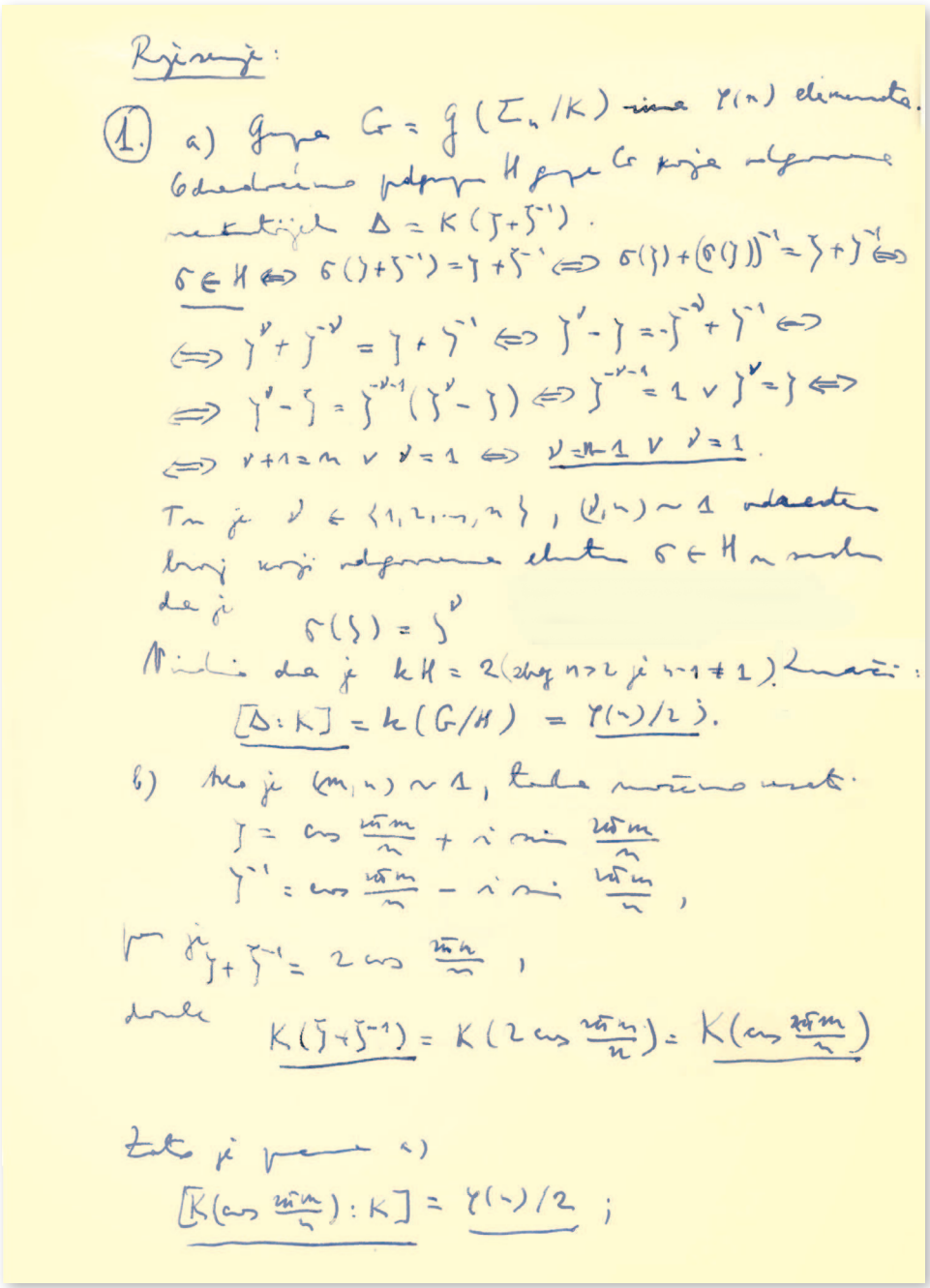
Dokazati:

a) da je $[K(\zeta+\zeta^{-1}):K] = \varphi(n)/2$;

b) da za $(m,n) \sim 1$ vrijedi:

$[K(\cos 2m\pi/n):K] = \varphi(n)/2$,

anu monografija FINAL PRINT.indd 93 6/16/2023 1:57:05 PM



Rješenje:

1. a) Grupa $G = g(\Sigma_n / K)$ ima $\gamma(n)$ elemenata. Odredimo podgrupu H grupe G koja odgovara međutijelu $\Delta = K(\zeta + \zeta^{-1})$.

$\sigma \in H \Leftrightarrow \sigma(\zeta + \zeta^{-1}) = \zeta + \zeta^{-1} \Leftrightarrow \sigma(\zeta) + (\sigma(\zeta))^{-1} = \zeta + \zeta^{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \zeta^{\nu} + \zeta^{-\nu} = \zeta + \zeta^{-1} \Leftrightarrow \zeta^{\nu} - \zeta = \zeta^{-\nu} + \zeta^{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \zeta^{\nu} - \zeta = \zeta^{-\nu-1}(\zeta^{\nu} - \zeta) \Leftrightarrow \zeta^{-\nu-1} = 1 \vee \zeta^{\nu} = \zeta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \nu + 1 = n \vee \nu = 1 \Leftrightarrow \nu = n-1 \vee \nu = 1.$

Tu je $\nu \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $(\nu, n) \sim 1$ odnosno broj koji odgovara elementu $\sigma \in H$ tako da je $\sigma(\zeta) = \zeta^{\nu}$.

Nadalje, $kH = 2$ (zbog $n > 2$ je $n - 1 \neq 1$). Znači:

$$[\Delta : K] = k(G/H) = \gamma(n)/2.$$

b) Kako je $(m, n) \sim 1$, tada možemo uzeti:

$$\zeta = \cos\frac{2\pi m}{n} + i \sin\frac{2\pi m}{n}$$

$$\zeta^{-1} = \cos\frac{2\pi m}{n} - i \sin\frac{2\pi m}{n},$$

pa je $\zeta + \zeta^{-1} = 2\cos\frac{2\pi m}{n}$,

dakle

$$K(\zeta + \zeta^{-1}) = K\left(2\cos\frac{2\pi m}{n}\right) = K\left(\cos\frac{2\pi m}{n}\right)$$

Zato je prema a)

$$\left[K\left(\cos\frac{2\pi m}{n}\right) : K\right] = \gamma(n)/2;$$

Prvi zadatak (*sa rješenjem*) *na pismenom dijelu ispita iz Algebre II održanom 21.6.1971. godine*

anu monografija FINAL PRINT.indd 94 6/16/2023 1:57:08 PM

Veselin Perić je na Odsjeku za matematiku Univerziteta u Sarajevu proveo skoro 40 godina, najprije kao asistent, zatim predavač (1961-1966), docent (1966-1971), pa vanredni profesor (1971-1977), a 1977. godine je izabran u zvanje redovnog profesora. Sa izuzetkom šest godina, koje je proveo na Mašinskom fakultetu u Sarajevu (1971-1977), predajući i tada algebarske predmete na Odsjeku za matematiku, radio je na Prirodno-matematičkom fakultetu, do novembra mjeseca ratne 1992. godine, kada je napustio Sarajevo i otišao u Njemačku. Po dolasku u Hamburg, uključio se u rad dva seminara iz algebarske teorije brojeva, kojima je rukovodio prof. Helmuth Brückner, i to *Klase polja i Aritmetička geometrija*. Ali, ubrzo nakon dolaska, podvrgnut je teškom operativnom zahvatu koji je prebolio zahvaljujući velikoj brizi i njezi supruge i kćerke. Poslije oporavka prof. Perić je otišao u rodnu Podgoricu, gdje je živio radeći na Prirodno-matematičkom fakultetu do odlaska u penziju 2001. godine.

U dugom periodu svoje univerzitetske karijere akademik Veselin Perić je veoma uspješno držao predavanja na postdiplomskom studiju Odsjeka za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta u Sarajevu na kojem je odigrao bitnu ulogu u formiranju naučnog kadra u oblasti matematike. Veselin Perić je bio jedan od prvih profesora tog postdiplomskog studija (pokrenut školske 1966/67. godine), a u periodu od skoro 25 godina i jedan ne samo od glavnih nego i ključnih njegovih profesora, posebno za algebru.

Na postdiplomskim studijima je predavao i utemeljio niz kurseva iz algebre: *Komutativnu algebru, Lokalne prstene, Teoriju valuacija, Nekomutativne prstene, Teoriju reprezentacija konačnih grupa*, kao i niz kurseva iz analize za studente tehničkih fakulteta, za koje je takođe napisao skripta. Osim toga, predavao je i dva kursa iz *Teorije valuacija* i *Teorije kohomologija*, na postdiplomskom studiju Matematičkog odjela Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu (školske 1970/71. i 1971/72. godine).

anu monografija FINAL PRINT.indd 95 6/16/2023 1:57:08 PM



Odsjek za matematiku PMF-a u Sarajevu, snimljeno poslije Seminara za algebru šk. 1985-86. godine.
slijeva: J. Alajbegović, V. Perić, J. Van Gill, M. Vuković, H. Kulosman, N. Dubrovin, M. Janjić



U šetnji Sarajevskom Baščaršijom poslije Seminara – slijeva na desno: V. Perić, H. Kulosman, J. Van Geel, M. Janjić, M. Vuković, N. Dubrovin, E. Osmanagić

Kroz *Sarajevsku* školu *algebre* prof. Perića prošli su brojni mladi algebristi: M. Arapović, V. Cigić, H. Jamak, M. Janjić, H. Kulosman, L. Mustapić, D. Pavlović, a i autorka ovog teksta M. Vuković je prve korake u algebri napravila u toj školi, a zatim produžila da stiče znanje na univerzitetima Lomonosov u Moskvi i „Pierre et Marie Curie" u Parizu.

Prof. Perića je njegov student, kasnije i asistent Hamid Kulosman opisao ovako: „Kada sam počeo studirati matematiku, imao sam priliku da vidim koliko je široko obrazovanje prof. Perića. Ne samo da je bio ekspert za algebru nego je isto tako bio veoma dobro upućen i u sve ostale važne matematičke grane. Bio mi je profesor na tri kompletno različita predmeta: *Uvod u teoriju skupova i Opštu topologiju*, *Linearno programiranje* i *Algebra* (tj. *Teorija Galois*) [...]. Prof. Perić je svojim uticajem bitno pomogao da budem primljen za asistenta na njegovom predmetu." [L: 23]. Hamid Kulosman je danas vrlo uspješan matematičar i profesor na University of Louisville, USA.

anu monografija FINAL PRINT.indd 96 6/16/2023 1:57:08 PM

Veselin Perić

Ph. D. University Zagreb 1966

Dissertation: *Prilog Teoriji ideala* (*Contribution to the theory of Ideals*)

Mathematics Subject Classification: – Algebra

Advisor 1: **Đuro Kurepa**

Name	School	Year	Descendants
Gaši, Emruš	University of Zagreb	1973	
Dašić, Vučić	University of Sarajevo	1979	
Alajbegović, Jusuf	University of Sarajevo	1983	
Lipkovski Aleksandar	University of Belgrade	1985	13
Janjić, Milan	University of Sarajevo	1987	
Jamak, Hasan	University of Sarajevo	1995	

Mathematical Genealogy Project: Veselin Perić

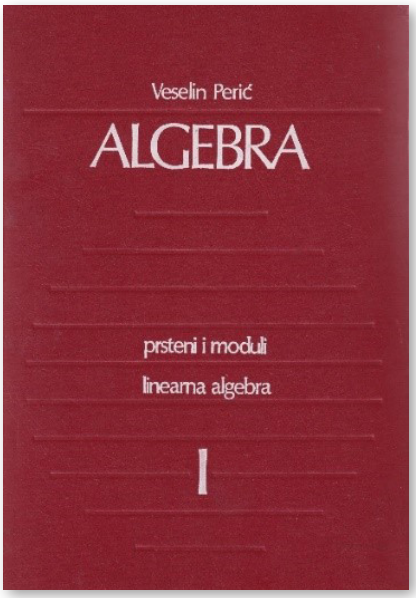
Veselin Perić je bio mentor pri izradi pedesetak diplomskih i dvadesetak magistarskih radova, kao i šest doktorskih disertacija u Sarajevu, Zagrebu, Beogradu, Podgorici i u Istočnom Sarajevu. Uz akademike Manojla Maravića i Fikreta Vajzovića, izveo je najviše doktora nauka na Sarajevskom univerzitetu, u vrijeme kada se doktorat nije sticao kroz studij, i tako zajedno sa njima najviše doprinio razvoju podmlatka iz matematike u našoj sredini.

Teško je ukratko opisati sve vidove djelatnosti akademika Veselina Perića na Univerzitetu u Sarajevu, a kasnije i na Univerzitetu Crne Gore u Podgorici i Univerzitetu u Istočnom Sarajevu, te njegovu ulogu u razvoju matematike, posebno algebre, na prostorima Bosne i Hercegovine i bivše Jugoslavije. Nije lako pobrojati sve, čak ni samo one djelatnosti Veselina Perića koje spadaju u djelokrug njegovog stručnog rada. Stoga ćemo istaknuti samo neke od njih.

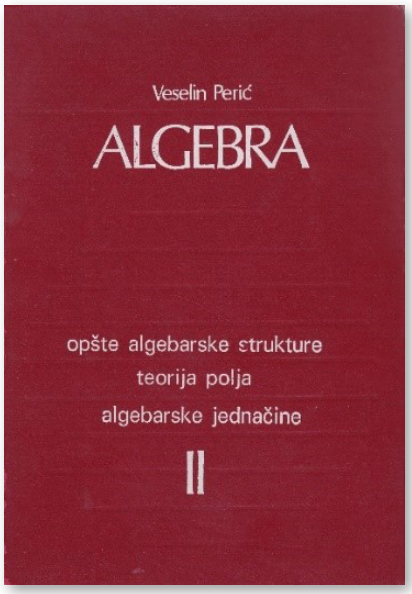
Već u vrijeme kada je bio asistent profesora Vojislava Avakumovića, napisao je skripta iz linearne algebre [B:9], po kojima su generacije studenata matematike učile linearnu algebru, a iz čijeg sadržaja se već tada moglo naslutiti kako izgleda moderna algebra.

Nastava algebre na Odsjeku za matematiku naporima prof. Perića radikalno je modernizovana i dovedena na svjetski nivo. Pri tome su važnu ulogu odigrali njegovi udžbenici, opštejugoslovenskog značaja: *Algebra* I (*prsteni i moduli*) i *Algebra* II (*teorija polja i teorija Galoisa*) [B: 1, 2], namijenjeni studentima matematike. Po njima su učile, a i danas uče generacije studenata širom bivše

anu monografija FINAL PRINT.indd 97 6/16/2023 1:57:09 PM



Veselin Perić, Algebra I (*3. izd.*)



Veselin Perić, Algebra II (*2. izd.*)

Jugoslavije. Za te knjige je prof. Perić dobio Republičku nagradu „Mitar Trifunović Učo“, koja se dodjeljivala za najbolji udžbenik godine.

Osim toga, Veselin Perić je poslije rata napisao i dvije monografije: *Galoisova teorija* (Beograd, 1997), [B: 6] i *Konačnodimenzionalne realne divizione algebre* (Podgorica, 2000), [B: 7].

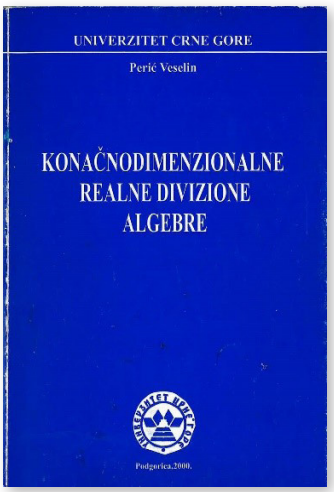
Poslije njegove smrti je iz štampe izašla i dugo pripremana *Algebra – Teorija grupa* (*Pregled teorije i Zadaci*), [B:8], koja predstavlja zbirku zadataka iz teorije grupa, a praćena je i kratkim pregledom teorije, koju je završila i objavila koautorica knjige, koja je i autorica ovog teksta. Za ovu knjigu recenzentica prof. dr Mirna Džamonja kaže: „Teoretski dio udžbenika podsjeća na legendarne i danas neprevaziđene knjige iz algebre prof. Perića.“ Konstatacija prof. Džamonja posebno me je, kao koautoricu knjige, obradovala jer sam ja napisala teoretski dio knjige.

Osim toga, Veselin Perić je, u koautorstvu s mlađim kolegama (M. Tomić i P. Karačić), napisao i tri izvrsne zbirke zadataka [B: 3-5], namijenjene studentima Mašinskog fakulteta, koje su, kao i knjige iz algebre, doživjele više izdanja, a koristili su ih i koriste i sada i studenti mate-

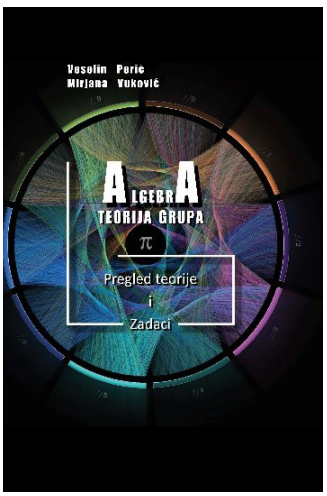
anu monografija FINAL PRINT.indd 98 6/16/2023 1:57:09 PM



V. Perić, Galoaova teorija Beograd 1997.



V. Perić, Konačnodimenzionalne realne divizione algebre, Podgorica, 2000.



V. Perić i M. Vuković, Algebra – Teorija grupa, Istočno Sarajevo, 2021.

matike, kao i svih fakulteta na kojim se u bilo kom obimu predaje matematika.

Inače, za knjige prof. Perića se slobodno može reći da se odlikuju izuzetnom strogošću teorije, kao i da predstavljaju iznimno važan doprinos matematičkoj literaturi.

Svakako treba spomenuti i skripta prof. Perića, numerisana u spisku stručnih radova sa [B:10-14], namijenjena studentima III stepena studija matematike: *Komutativna algebra, Lokalni prsteni, Teorija valuacija, Nekomutativni prsteni* i *Teorija reprezentacija konačnih grupa*. Skripta su niz godina služila onima koji su na postdiplomskom studiju proširivali i produbljivali svoja znanja iz algebre i pripremali se za naučni rad u toj oblasti.

Zajednička osobina svih ovih udžbenika je da su pisani na veoma visokom stručnom nivou i da se odlikuju konciznošću i matematičkom rigoroznošću, tako karakterističnim za akademika Perića, kao i da u sebi nose pečat njegove izvanredno široke matematičke kulture i dubokog poznavanja mnogih oblasti matematike. Slobodno se može reći da su njegovi udžbenici dostigli zavidan nivo, kao i da ni do danas nisu prevaziđeni.

Pored udžbenika i monografija, koje su odigrale veoma važnu ulogu u razvoju matematike kod nas i u širem

anu monografija FINAL PRINT.indd 99 6/16/2023 1:57:09 PM



5. Kongres Balkanskih matematičara, Beograd, 1974.
Prof. Perić u pauzi Kongresa s kolegama: Krešo Horvatić i porodica Tanović-Miller: Naza, Harry, Alica i Lejla.

okruženju, prof. Veselin Perić je napisao pedesetak naučnih radova i objavio ih u raznim veoma uglednim naučnim časopisima kod nas i u svijetu, odnosno u časopisima koje prate matematčke naučne baze podataka, kao što su: američka *Mathematical Reviews* (Math-SciNet), evropska *Zentralblatt für Mathematik* (ZbMath) i, u ono vrijeme, ruski *Referativnij Žurnal Matematika* ANSSSR.

Na osnovu ugleda koji je prof. Perić uživao, svjetski referativni časopis *Zentralblatt für Mathematik* povjerio mu je da piše prikaze naučnih radova, objavljenih u referabilnim matematičkim naučnim časopisima u svijetu, za koji je on, počev od 1967. godine, napisao oko 200 prikaza.

Njegova naučna djelatnost odvijala se uglavnom u dvije oblasti algebre, kao što su *komutativna algebra* u koju, pored radova, spadaju i njegov magistarski rad *Teorija ideala E. Nöther i R. Dedekinda* i doktorska disertacija *Prilog teoriji ideala*, kao i radovi koji se odnose na *asocijativne prstene*, gdje se uslovno mogu svrstati i radovi koji se odnose na module nad određenim prstenima, kao i radovi

anu monografija FINAL PRINT.indd 100 6/16/2023 1:57:09 PM



Učesnici 6. konferencije Algebra i logika, posvećene Đuri Kurepi, u Sarajevu, juni 1987, ispred Skupštine Grada. 1. red zdesna: V. Perić, M. Alagić, M. Vuković, Đ. Kurepa, Lj. Ostojić – potpredsjednica Grada, J. Van Geel, J. Alajbegović, 2. red slijeva: H. Fatkić, E. Gashi, D. Pagon, B. Alimpić, 3. red slijeva M. Maravić, S. Markoski, S. Milić, G. Čupona, M. Primc.

o skoro-prstenima, pisani u koautorstvu s V. Vukovićem i V. Dašićem. No Veselin Perić je pokazivao interes i radio i u drugim oblastima matematike (*topologija, teorija skupova i relacija i uređenih struktura*, itd.), što govori o širini njegove matematičke kulture i obrazovanja.

Rezultate svojih radova V. Perić je izlagao na raznim konferencijama u zemlji i inostranstvu, a na nekima od njih bio je imenovan i za predsjedavajućeg poludnevnih sesija. Navešćemo samo neke od njih, i to: tri internacionalna kongresa Balkanske matematičke unije u Bukureštu (Bucharest) (1966) i Beogradu (1974), te Kongres Bugarskih matematičara u Varni (1977).

Osim toga, prof. Perić je učestvovao i na skoro svim kongresima matematičara Jugoslavije: IV u Sarajevu (1965), V u Ohridu (1970), VII u Bečićima (1980) i VIII u Prištini (1985), kao i na svim konferencijama „Algebra i logika“ u Beogradu (1982), Zagrebu (1984), na Cetinju (1986), u Sarajevu (1987) – povodom 70 godina života akademika Đure Kurepe i u Mariboru (1989).

anu monografija FINAL PRINT.indd 101 6/16/2023 1:57:09 PM



M. Vuković i V. Perić na Seminaru u Beogradu 13-15. 12. 2006. u MI SANU povodom jubileja - 60 godina od osnivanja Instituta

Svakako treba spomenuti da je Veselin Perić održao više predavanja i u okviru Kolokvija Matematičkog odjela u Zagrebu, Naučnog seminara Instituta za matematiku u Göttingenu, Kolokvija Odsjeka za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta u Sarajevu, na kojem je dvije godine bio i voditelj, te tri predavanja u Matematičkom institutu SANU, u Beogradu, od kojih je jedno bilo jednočasovno, po pozivu (1985), a imao je i jedno gostovanje poslije rata, povodom jubileja – 60 godina od osnivanja Instituta.

Poslije rata uglavnom je učestvovao na naučnim skupovima i konferencijama koje su bile organizovane na Katedri za matematiku Filozofskog fakulteta Univerziteta u Podgorici, Istočnom Sarajevu i u Banjoj Luci, a na nekim od njih je i sam imao saopštenja. Posebno bih istakla naučni skup *80 godina života Veselina Perića*, Filozofski fakultet Pale, 22-24. maja 2009. godine, na kom su učestvovali njegovi kolege i učenici – magistranti i doktoranti iz cijele Bosne i Hercegovine, ali i iz Crne Gore i Srbije.

Skup su organizovali prof. *Milenko Pikula*, dekan Filozofskog fakulteta i prof. *Mirjana Vuković* – autorica ovog teksta, koja je priredila za štampu *Spomenicu akademika Veselina Perića*, u kojoj je objavljeno 36 radova posvećenih slavljeniku, a koji su bili prezentirani na toj konferenciji.

Aktivnosti Veselina Perića nisu bile ograničene samo na matematiku na strogo naučnom planu. Bio je uključen i u sve druge aktivnosti vezane za matematiku, kao što su: šef

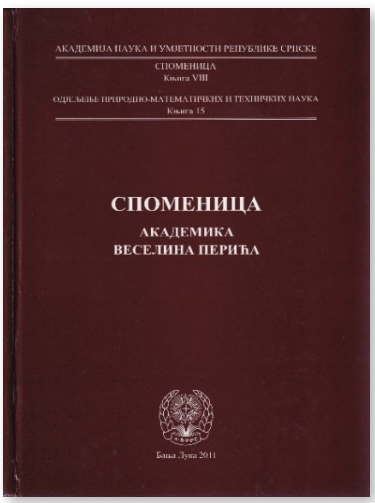
anu monografija FINAL PRINT.indd 102 6/16/2023 1:57:09 PM

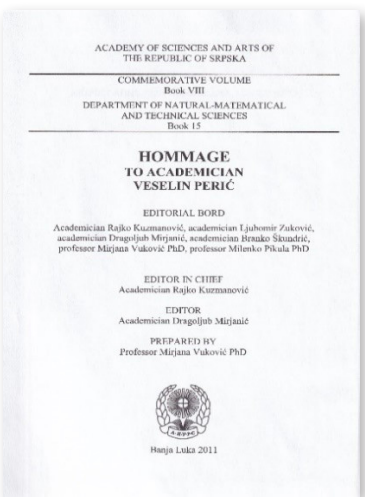


Skup posvećen jubileju prof. Veselina Perića, Filozofski fakultet, Pale 2009. 1. red: Ljubiša Kočinac; 2. red: Biljana Zeković, Veselin Perić, Svjetlana Terzić, Radoslav Milošević; 3. red: Rade Živaljević, Fikret Vajzović, Medo Pepić i Huse Fatkić; 4. red: Milan Janjić.

Katedre za algebru (odnosno matematiku i fiziku na Mašinskom fakultetu), šef Odsjeka za matematiku i dekan Prirodno-matematičkog fakulteta; rad u Društvu matematičara, fizičara i astronoma BiH, čiji je bio predsjednik u dva mandata, kao i rad u Plenumu društava matematičara Jugoslavije.

Osim toga, bio je i: odgovorni istraživač–voditelj desetak naučnoistraživačkih projekata, u okviru kojih su mnogi mladi istraživači napravili prve korake u nauci; saradnik i član redakcije stručne publikacije *Bilten*, koju je izdavalo Društvo matematičara, fizičara i astronoma BiH; odgovorni urednik jugoslovenskog stručno-metodičkog časopisa *Matematika*, u vrijeme kada je njegovo sjedište bilo u Sarajevu. Pored toga, prof. Perić je bio i član redakcionog odbora pet naučnih





Spomenica akademika Veselina Perića, u kojoj su objavljeni radovi koji su mu posvećeni povodom jubileja – 80 godina života, Filozofski fakultet, Pale 22-24. maja 2009. godine.

anu monografija FINAL PRINT.indd 103 6/16/2023 1:57:09 PM



Akademici Vojislav Marić i Veselin Perić i prof. Veljko Vuletić u razgovoru

časopisa: *Radovi* Akademije nauka i umjetnosti Bosne i Hercegovine Odjeljenja prirodnih i matematičkih nauka (od osnivanja), koji je kasnije preimenovan u *Radove matematičke*, a danas izlazi kao *Sarajevo Journal of Mathematics* Akademije nauka i umjetnosti Bosne i Hercegovine (iz Sarajeva), *Glasnik matematički* (iz Zagreba), *Punime Matematike* (iz Prištine) i *Matematika* Crne Gore, koji je preimenovan u "*Matematica Montisnigri*" (iz Podgorice).

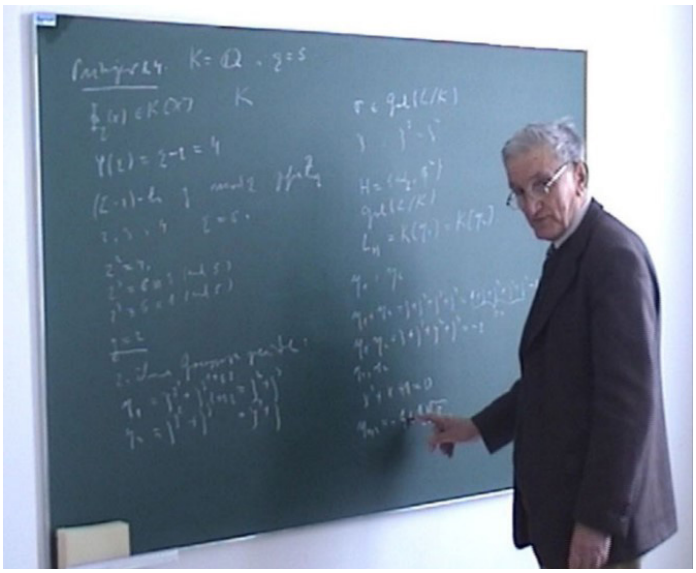
Za svoj cjelokupan rad, uključujući predan rad u nastavi, a naročito naučni rad, Veselin Perić je dobio brojne plakete, priznanja i odlikovanja, a među njima i Orden zasluga za narod sa srebrnom zvijezdom, Republičku nagradu za nauku „Veselin Masleša" (1981) i Dvadesetsedmojulsku nagradu BiH (1990).

Kao logičan rezultat ovako bogate naučne, stručne i svih drugih aktivnosti, Veselin Perić je 1987. godine postao dopisni član Akademije nauka i umjetnosti



U Akademiji nauka i umjetnosti BiH 90-tih, slijeva na desno: Manojlo Maravić, Veselin Perić i Avdo Hadžibeganović; 2. red: Uglješa Kisić i Nazif Kusturica – dekan Filozofskog fakulteta.

anu monografija FINAL PRINT.indd 104 6/16/2023 1:57:09 PM



Prof. Perić snimljen na predavanju na Katedri za matematiku Filozofskog fakulteta Univerziteta u Istočnom Sarajevu

Bosne i Hercegovine. Od osnivanja ANURS-a bio je i njen dopisni član, a zatim je izabran i za redovnog člana. Za redovnog člana Crnogorske Akademije nauka i umjetnosti (CANU), van radnog sastava, izabran je 2002. godine. U Akademiji nauka i umjetnosti Bosne i Hercegovine bio je neko vrijeme član Predsjedništva i zamjenik sekretara Odjeljenja.

Snažan uticaj na brojne generacije studenata i postdiplomaca u svim sredinama u kojima je akademik Veselin Perić predavao imali su ne samo njegov uspješan i ozbiljan naučnoistraživački i pedagoški rad nego i izuzetni udžbenici i zbirke zadataka koje je napisao za studente matematike i tehničkih fakulteta, kao i predavanja na brojnim seminarima koja je držao u organizaciji tadašnjeg Prosvjetno-pedagoškog zavoda za nastavnike i profesore matematike, doprinoseći tako permanentnom stručnom obrazovanju nastavničkog kadra u BiH. Sa znanjem i vizijom o razvoju nauke, utemeljio je brojne predmete iz oblasti algebre na osnovnom i postdiplomskom studiju, čiji je i voditelj bio sedam godina. Studenti su mu se divili i cijenili ga i pored toga što je bio vrlo strog, jer je važio za izuzetno dobrog i korektnog profesora i principijelnog čovjeka, spremnog da svakoga sasluša i pomogne, svakome kome je njegova pomoć bila potrebna.

Od pokretanja studija matematike na Filozofskom fakultetu Univerziteta u Istočnom Sarajevu i osnivanja Katedre za matematiku (ubrzo su formirane dvije katedre: Katedra za matematiku i računarstvo i Katedra za matematiku i fiziku), prof. Veselin Perić se, iako u poodmaklim godinama i narušenog zdravlja, uključio u rad te katedre, i tako svojim znanjem i iskustvom pomogao formiranju kvalitetnog nastavno-naučnog kadra. Na toj katedri je u nastavi radio do kraja školske 2007/08. godine, a na postdiplomskom studiju sve do kraja života.

anu monografija FINAL PRINT.indd 105 6/16/2023 1:57:09 PM

Akademik Veselin Perić, pored toga što je bio vrlo uspješan i ugledan naučni stvaralac u oblasti algebre, bio je i čovjek visoke matematičke i široke opšte kulture, izgrađenih naučnih i stručnih kriterija, predavač i prefinjeni intelektualac, koji je, pored matematike, bio izuzetan poznavalac i književnosti, klasične muzike, istorije i filozofije. Njegovo djelovanje u dužem periodu bilo je od presudnog značaja za cjelokupan matematički život sredina u kojima je živio i radio, posebno Bosne i Hercegovine, u kojoj je proveo najbolje godine svog života, kada je, u stvaralačkom usponu, postizao i davao najviše.

Kratak prikaz radova akademika Veselina Perića

Kao što je već spomenuto, naučna djelatnost prof. Perića se najvećim dijelom odvijala u dvije oblasti algebre, i to u:

1. *komutativnoj algebri* [5-8, 12, 16, 18], u koju spadaju: kako njegov magistarski rad *Teorija ideala E. Nöther i R. Dedekinda* [1], tako i njegova doktorska disertacija *Prilog teoriji ideala* [2], iz koje su rezultati (često poboljšani) objavljeni u radovima [5-8] i
2. *asocijativnim prstenima* [21, 23-27, 29, 33], a tu se uslovno mogu svrstati i radovi [9-11], koji spadaju u linearnu algebru, kao i radovi [17, 20], koji se odnose na module nad određenim prstenima, odnosno [30, 32, 42] (sa V. Vukovićem) i [39] (sa V. Dašićem) o skoro-prstenima.

Veselin Perić se bavio i drugim oblastima algebre, ali je isto tako pokazivao interes i radio i u drugim oblastima matematike. Tako se od preostalih radova dva odnose na *uređene strukture*, i to [13, 14], jedan na *topološke prostore* ([4]), dva su iz *teorije skupova i relacija* ([3,15]), i po jedan [28], odnosno [43] je iz oblasti *funkcionalnih jednačina*, s M. Malenicom, odnosno iz *algebarske teorije brojeva*, s M. Vuković.

Svakako treba reći da je Veselin Perić najznačajnije rezultate postigao u vezi sa *kvazi-invertibilnošću ideala*, pitanjima primarnih razlaganja i tzv. *S*-komponenti ideala u oblasti komutativne algebre, te u vezi sa pitanjima komutativnosti i subdirektnih razlaganja asocijativnih prstena.

Većina naučnih radova V. Perića pisana je na stranim jezicima: prvi na francuskom, zatim na njemačkom i engleskom, a objavio je i pet radova na našem jeziku s rezimeom na stranom jeziku.

O značaju dobijenih rezultata često govori citiranost radova. Iako rezultati V. Perića spadaju u domen teorijske – apstraktne matematike, izvjestan broj njegovih radova je citiran i to ne samo u radovima nego su neki od njegovih rezultata uključni i u poznate svjetske monografije, kao što su:

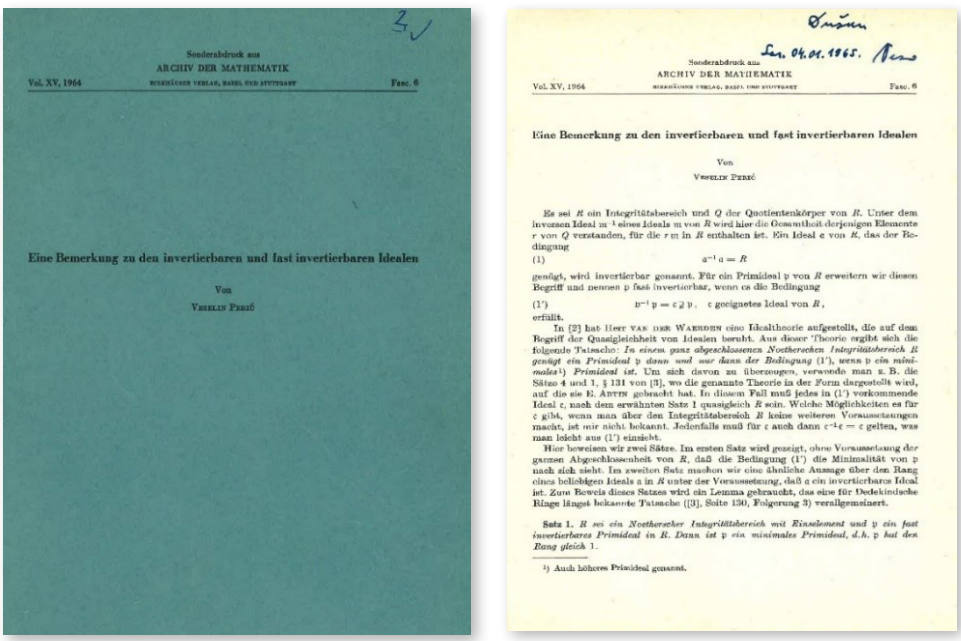
anu monografija FINAL PRINT.indd 106 6/16/2023 1:57:09 PM

- A. V. Geramita and Ch. Small, *Introduction to homological methods in commutative rings*, Queen's papers in pure and applied Mathematics, No. 43 (1978) [L: 11] ;
- R. Gilmer, *Multiplicative Ideal Theory*, Martin Dekker, New-York (1972) [L: 12] ;
- M. D. Larsen and P. J. McCarthy, *Multiplicative Theory of Ideals*, Academic Press, New-York and London (1971) [L: 25] ;
- G. Pi1z, *Near-Rings*, North Holland publishing company, Amsterdam – New-York, Oxford (1983), [L: 32]) ;
- G. Pilz, A. Oswald, *Near-Rings*, Newsletter, Johanes Kepler University, Linz (1985) [L: 33].

Prikazaćemo kratko neke od njegovih radova, pozivajući se na brojeve pod kojim su navedeni u spisku naučnih radova.

U radu [3] se poopštava jedna teorema W. Sierpinskog i S. Piccard s binarnih na *n*-arne relacije, dok je rad [4] u vezi s jednim problemom poznatog hrvatskog matematičara S. Mardešića. U njemu se dokazuje jedna teorema o lokalno povezanim *Hausdorfovim kompaktnim prostorima*, koja, kao specijalan slučaj, sadrži rješenje pomenutog problema vezanog za kompaktne metričke prostore.

Već smo rekli da u komutativnu algebru spadaju magistarski rad [1] i doktorska disertacija [2] Veselina Perića, kao i radovi [5-8] i [12, 16, 18].



Sonderabdruck aus
ARCHIV DER MATHEMATIK
Vol. XV, 1964 — Fasc. 6

Eine Bemerkung zu den invertierbaren und fast invertierbaren Idealen

Von
Veselin Perić

Sonderabdruck aus
ARCHIV DER MATHEMATIK
Vol. XV, 1964 — Fasc. 6

Eine Bemerkung zu den invertierbaren und fast invertierbaren Idealen

Von
Veselin Perić

Es sei R ein Integritätsbereich und Q der Quotientenkörper von R. Unter dem inversen Ideal $\mathfrak{a}^{-1}$ eines Ideals $\mathfrak{a}$ von R wird hier die Gesamtheit derjenigen Elemente r von Q verstanden, für die $r\mathfrak{a}$ in R enthalten ist. Ein Ideal $\mathfrak{e}$ von R, das der Bedingung

(1) $\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{a} = R$

genügt, wird invertierbar genannt. Für ein Primideal $\mathfrak{p}$ von R erweitern wir diesen Begriff und nennen $\mathfrak{p}$ fast-invertierbar, wenn es die Bedingung

(1') $\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{p} = \mathfrak{c} \supsetneq \mathfrak{p}$, $\mathfrak{c}$ geeignetes Ideal von R,

erfüllt.

In [2] hat Herr van der Waerden eine Idealtheorie aufgestellt, die auf dem Begriff der Quasigleichheit von Idealen beruht. Aus dieser Theorie ergibt sich die folgende Tatsache: *In einem ganz abgeschlossenen Noetherschen Integritätsbereich R genügt ein Primideal $\mathfrak{p}$ dann und nur dann der Bedingung* (1'), *wenn $\mathfrak{p}$ ein minimales*[1]) *Primideal ist.* Um sich davon zu überzeugen, verwende man z. B. die Sätze 4 und 1, § 131 von [3], wo die genannte Theorie in der Form dargestellt wird, auf die sie E. Artin gebracht hat. In diesem Fall muß jedes in (1') vorkommende Ideal $\mathfrak{c}$, nach dem erwähnten Satz 1 quasigleich R sein. Welche Möglichkeiten es für $\mathfrak{c}$ gibt, wenn man über den Integritätsbereich R keine weiteren Voraussetzungen macht, ist mir nicht bekannt. Jedenfalls muß für $\mathfrak{c}$ auch dann $\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{c} = \mathfrak{c}$ gelten, was man leicht aus (1') einsieht.

Hier beweisen wir zwei Sätze. Im ersten Satz wird gezeigt, ohne Voraussetzung der ganzen Abgeschlossenheit von R, daß die Bedingung (1') die Minimalität von $\mathfrak{p}$ nach sich zieht. Im zweiten Satz machen wir eine ähnliche Aussage über den Rang eines beliebigen Ideals $\mathfrak{a}$ in R unter der Voraussetzung, daß $\mathfrak{a}$ ein invertierbares Ideal ist. Zum Beweis dieses Satzes wird ein Lemma gebraucht, das eine für Dedekindsche Ringe längst bekannte Tatsache ([3], Seite 130, Folgerung 3) verallgemeinert.

Satz 1. *R sei ein Noetherscher Integritätsbereich mit Einselement und $\mathfrak{p}$ ein fast invertierbares Primideal in R. Dann ist $\mathfrak{p}$ ein minimales Primideal, d.h. $\mathfrak{p}$ hat den Rang gleich 1.*

[1]) Auch höheres Primideal genannt.

V. Perić, rezultati iz doktorske disertacije objavljeni u Archiv der Mathematik, rad [*5*].

anu monografija FINAL PRINT.indd 107 6/16/2023 1:57:09 PM

Radovi [5-8], su međusobno povezani i odnose se na problematiku vezanu za kvazi-invertibilnost ideala komutativnih (nötherinih) prstena, primarna razlaganja i S-komponente ideala. Pojam kvazi-invertibilnog prostog ideala V. Perić je uveo u svom radu [5], u slučaju nötherinih oblasti, da bi ga, u radu [6] proširio na slučaj proizvoljnog ideala komutativnog prstena, s jediničnim elementom. Nastavljajući, u radu [7], ispitivanja započeta u prethodna dva rada, V. Perić dolazi do brojnih vrlo interesantnih i značajnih rezultata: otkriva neke osobine karakteristične za kvazi-invertibilnost prostog ideala, vezu između kvazi-invertibilnosti prostog ideala P i P-primarnih idealâ Q, te cijele zatvorenosti prstena R i njegovih lokalizacija R_p, u odnosu na minimalne regularne proste ideale P.

Iako se rad [8] ne odnosi direktno na kvazi-invertibilnost ideala, on se prirodno nadovezuje na prethodna tri rada. U njemu se najprije daje apstraktna karakterizacija preslikavanja koje ideal A, komutativnog prstena R, prevodi u njegovu S-komponentu A_S, a zatim apstraktna karakterizacija ekstenzije i kontrakcije ideala, u odnosu na prirodni homomorfizam f_S, komutativnog prstena R, u njegov prsten razlomaka R_S. U vezi s jednim od uslova, koji se pri tome pojavljuje, navode se potrebni i dovoljni uslovi koje treba da ispunjava prosti ideal P, komutativnog prstena R, s jediničnim elementom, da bi, za svaku familiju prostih ideala prstena R, ideal P bio sadržan u uniji te familije (što je slučaj uvijek kada se radi o konačnoj familiji).

O značaju ovih radova i odzivu na koji su naišli u radovima drugih matematičara, najbolje svjedoči činjenica da su uvršteni u svjetski poznate, ranije navedene monografije (R. Gilmera i M. D. Larsena), namijenjene svima onima koji naučno rade u oblasti multiplikativne teorije ideala [L: 12, 25].

Radovi [9] i [10], iz linearne algebre (nad komutativnim prstenom) odnose se, barem što se tiče glavnih primjena opštih rezultata, na konstrukciju kanonske baze konačno-dimenzionalnog vektorskog prostora V, nad proizvoljnim poljem K, u odnosu na koju, dati linearni operator T prostora V, ima kanonsku Jordanovu matricu. Ta konstrukcija je provedena u radu [9] posmatranjem A-modula V, nad prstenom polinoma $A = K[\lambda]$, u jednoj varijabli, nad poljem K, tzv. modula linearnog operatora T. Primjenom te metode, u radu [10], dolazi se do novog dokaza poznate činjenice da se svaki konačno generisani modul V, nad prstenom A glavnih ideala, razlaže u direktnu sumu cikličkih podmodula V_i ($i \in I$). U specijalnom slučaju, kada je A algebra konačnog ranga, nad poljem K, iz tog razlaganja dobija se određena konačna baza vektorskog prostora V nad poljem K, koja se opet u slučaju modula V, linearnog operatora T, svodi na kanonsku bazu toga operatora.

I rad [11] spada u oblast linearne algebre. U njemu se dokazuje netačnost jedne tvrdnje V. S. Šišova i pronalaze dodatni uslovi pod kojim je ta tvrdnja tačna, a bez kojih inače ne vrijedi. Pored toga, u radu se daju mnogo jednostavniji dokazi te i nekih drugih tvrdnji Šišova.

Kao što smo već nagovijestili, radovi [12] i [14] spadaju u oblast komutativne algebre.

anu monografija FINAL PRINT.indd 108 6/16/2023 1:57:10 PM

Rad [12] je posvećen jednoj modifikaciji pojma primarnog ideala, tzv. poluprimarnim idealima. U njemu se, pored ostalog, poluprimarni prsten karakteriše kao prsten u kojem je spektar totalno uređen relacijom inkluzije. O aktuelnosti i interesantnosti ove problematike najbolje svjedoči činjenica da su se sličnim ispitivanjima bavili istovremeno i cijenjeni i vrlo poznati strani matematičari, kao što su R. Gilmer i J. Mott, R. Chaundhuri, M. Satyavarayna i dr.

U radu [14] V. Perić daje dva potrebna i dovoljna uslova da bi topologija, definisana na polju K, pomoću neke valuacije v, ispunjavala prvi uslov separabilnosti. Ti uslovi postavljaju se na pripadnu linearno uređenu grupu valuacije v. Time je poboljšana jedna tvrdnja čuvenog kanadskog matematičara P. Ribenboima.

Rad [13] pisan je u koautorstvu s *B. Martićem* i u njemu je dokazano da je svaka urediva kvazi-mreža, koja ispunjava jedan od četiri uslova distributivnosti, obavezno modularna. Time je osporena jedna pretpostavka *A. Szàsza* (A. Šaša), koji je dokazao modularnost uredive kvazi-mreže uz uslov tzv. desne distributivnosti i izrekao pretpostavku da nijedna od preostale tri distributivnosti ne implicira modularnost uredive kvazi-mreže.

Rad [15] posvećen je jednom sistemu od dvije skupovne jednačine s dvije nepoznate. U njemu su dati potrebni i dovoljni uslovi za egzistenciju rješenja i pod tim uslovima određeno opšte rješenje tog sistema. U nešto drugačijoj formulaciji, koja se takođe navodi u radu, ovaj rezultat predstavlja poopštenje jednog ranijeg rezultata Č. Stanojevića.

Rad [16] je napisan u koautorstvu s *B. Cerovićem*. U njemu se, za neke vrijednosti prirodnog broja n, Krullova dimenzija prstena polinoma $A^{(n)}$ u n varijabli nad komutativnim prstenom A, Krullove dimenzije 2, izražava kao funkcija prirodnog broja n i nekih konstanti prstena A, dok se za druge vrijednosti prirodnog broja n, daje samo procjena Krullove dimenzije $dim\ A^{(n)}$. Ovaj rezultat izvodi se iz jednog opštijeg rezulata P. Jaffarda kojim se $dim\ A^{(n)}$ izražava preko broja alki određenih težina, tzv. specijalnih lanaca prstena A konačne Krullove dimenzije, kao što se to čini u Jaffardovoj monografiji, ali u puno jednostavnijem slučaju prstena A, za koji je Krullova dimenzija $dim\ A = 1$.

Rad [18] odnosi se na (komutativne) relgularne i π-regularne prstene (s jediničnim elementom) koje je okarakterisao *M. Arapović*. U ovom radu se najprije dokazuje direktno činjenica da je prsten R π-regularan ako i samo ako je prsten R/N regularan (gdje je N skup svih nilpotentnih elemenata prstena R), a zatim se na osnovu toga iz Arapovićeve karakterizacije regularnih prstena, dobijaju Arapovićeva i neke druge karakterizacije π-regularnih prstena. U vezi s tim se razmatraju i pitanja odnosa između uslova:

- R je totalni prsten razlomaka i R/N je totalni prsten razlomaka;
- oba ta uslova ispunjena su u slučaju kada je prsten R π-regularan, ali u opštem slučaju nisu ekvivalentni.

anu monografija FINAL PRINT.indd 109 6/16/2023 1:57:10 PM

Rad [20], iz oblasti komutativne algebre, daje odgovor na pitanje koje su postavili *A. V. Geramita* i *Ch. Small* u *Introduction to homological methods in commutative rings* [L: 11], koje glasi: „Pod kojim uslovom konačan podskup $\mathcal{P}$ prostih ideala komutativnog Nötherinog prstena R predstavlja skup Ass (A) svih asociranih prostih ideala nekog prostog ideala A tog prstena R ?“ Glavni rezultat, u kome su dati potrebni i dovoljni uslovi za pozitivan odgovor na postavljeno pitanje, diskutuje se i nadopunjava nizom napomena u kojima se razmatraju ti uslovi.

Radovi [17] (pisan u koautorstvu sa *V. Dašićem*) i [19] odnose se na skoro-prstene s defektom disbributivnosti D. U radu [17] prenijeti su neki rezultati o komutativnosti sa tzv. distributivno generisanih skoro-prstena, koje su za taj slučaj ranije dokazali H. Bell i S. Light, na skoro-prstene s defektom distributivnosti. U radu [19] prenose se neki rezultati J. C. Beidlemana s distributivno generisanih na skoro-prstene s defektom distributivnosti D, uz pretpostavku da je D jako mali ideal u R. Ti rezultati se tiču kvazi-regularnosti elemenatâ R-podgrupâ i idealâ, radikalâ $J(R)$ i radikalske grupe $A(R)$ skoro-prstena R, odnosno nilpotentnih R-podgrupa i kvazi-radikala $N(R)$ skoro-prstena R, s uslovom silaznih lanaca za R-podgrupe. Zahvaljujući ovim radovima, V. Perić se našao među onim autorima koji su dali značajan doprinos teoriji skoro-prstena i tako uvršten u monografiju G. Pilza [L: 32], kao i u Newsletter Univerziteta Johanes Kepler iz Linza [L: 33], koje je G. Pilz napisao u saradnji sa A. Oswaldom.

Problematika asocijativnih prstena je predmetom radova [21, 23-27, 29, 33], prof. Veselina Perića.

Radovi [21] i [25] odnose se na mogućnosti prikaza određenih asocijativnih nenultih prstena R u obliku subdirektne sume polja, tijela ili oblasti (ev. nekomutativnih). Tako se, u radu [21] dokazuje da prsten R zadovoljava polinomni identitet:

$$x^n - x = 0 \ (n > 1), \qquad (*)$$

ako i samo ako je R subdirektna suma konačnih polja $GF(p^r)$, sa $p^r - 1 | n-1$, čime je poopšten jedan nešto ranije dobijeni rezultat Tominage, dokazan u slučaju kada je $n = 3$, za tzv. antiinverzne prstene. U radu [25] dokazuje se da je svaki strogo regularni prsten R subdirektna suma (nekomutativnih) oblasti, a da je svaki prsten R, s Jacobsonovim uslovom $(*)$, u kojem je $n = n\,(x)$, subdirektna suma polja R_i karakteristike $p_i \neq 0$, sa istim uslovom. Slično pitanje rješava se za još jednu klasu asocijativnih prstena.

U radovima [23, 24, 27] autor se bavi nenultim asocijativnim prstenima R koji ispunjavaju Hersteinov uslov $(x+y)^m = x^m + y^m$. Za takve prstene je Herstein, u slučaju $m > 1$, dokazao da skup N, nilpotentnih elemenatâ prstena R, čini ideal tog prstena i da je prsten R/N komutativan, ali taj dokaz nije nimalo jednostavan.

U radu [19], gornjem uslovu je Veselin Perić dodao uslov periodičnosti:

anu monografija FINAL PRINT.indd 110 6/16/2023 1:57:10 PM

$$x^m = x^n \ (n = n(x) \in \mathbb{N} \text{ relativno prost sa } m)$$

i dokazao da je skup N (svih nilpotentnih elemenata iz R), ideal prstena R, i to $N = 0$, ako i samo ako je prsten R lokalno unitaran i, da je osim toga, prsten R/N (u slučaju $N \neq R$) subdirektna suma polja i da ispunjava uslov:

$$(x + N)^r = x + N \ (x \in R), \text{ gdje je } r = |n(x) - m| + 1.$$

Time je pojačan jedan, nešto ranije dobiveni rezultat E. Psomopoulosa, i to bez pozivanja na spomenuti Hersteinov rezultat.

U radu [24] V. Perić uzima da je R lokalno unitaran prsten, a $m = const > 1$. Tu zatim, pored ostalog, uz dodatnu pretpostavku da m nije stepen prostog broja, odnosno da je m relativno prost sa 2^m - 2, dokazuje da je R/N subdirektna suma konačnih polja R_i karakteristike p_i, $p_i | 2^m$-2, odnosno da je, osim toga, $N = 0$. Pri tome:

$$(\exists n \in \mathbb{N}, n > 1) : x^m = x^{mn}, \text{ odnosno } x^n = x.$$

Na ovaj rad se nadovezuje rad [27], u kojem se opet uzima da je R lokalno unitaran prsten i $m = const > 1$. Ovdje se, pored ostalog, navedeni rezultat prethodnog rada poboljšava tako što se uzima da m nije stepen, odnosno da nije djeljiv ni sa jednim prostim faktorom p karakteristike $char\,(R)$ prstena R i razmatra pitanje kada je aditivno preslikavanje:

$$f_m : R \to R, \text{ definisano sa } f_m(x) = x^m \ (x \in R),$$

ujedno homomorfizam prstena R, koje je nešto prije postavio H. Bell. U radu V. Perić dokazuje da je $S := \{ x^m + y : x \in R, y \in N \}$, lokalno unitarni potprsten prstena R, a $f_m : S \to S$, homomorfizam prstena S.

I u radu [26] se pretpostalja da je prsten R lokalno unitaran, ali se Hersteinov uslov lokalizuje tako što se uzima da je u tom uslovu $m = m(x, y) > 1$ i slično, kao u radu [21], dokazuje da je opet N ideal prstena R. Pored ostalog, uz pretpostavku da za svaki nenilpotentni, odnosno nenulti element x i njegovu lokalnu jedinicu e_x, prirodni broj $m(x, e_x)$ nije stepen nijednog prostog faktora p aditivnog reda elementa x, odnosno da p ne dijeli $m\,(x, e_x)$, dokazuje se da je R/N subdirektna suma polja R_i karakteristike p_i koja, za $m = (e_x, e_x)$, dijeli 2^m- 2, odnosno da je još $N = 0$. Osim toga, tada R zadovoljava uslov:

$$x^{rs} = x^s \ (r = r(x) > 1, s = s(x) \geq 1, \text{ odnosno } s(x) = 1).$$

Rezultati ovih radova, za određene vrijednosti prirodnog broja $m = const > 1$, pokrivaju navedeni rezultat Hersteina i za te vrijednosti broja m daju, zapravo, puno više od toga, dok rezultati rada [26], koji se odnose na lokalizovani Hersteinov uslov, idu i korak dalje.

U radu [28], pisanom u koautorstvu sa M. Malenicom, ispituje se egzistencija rješenja funkcionalne jednačine $\varphi(x) + (\varphi\, f(x)) = F(x)$, koje leži u vektorskom

anu monografija FINAL PRINT.indd 111 6/16/2023 1:57:10 PM

prostoru V nad poljem $\mathbb{R}$ realnih brojeva, generisanim funkcijama 1, $F(x)$, $F(f(x)), F(f^2(x)), \ldots$. Pri tome su $f: X \to X$ i $F: X \to \mathbb{R}$ zadane funkcije, definisane na nekom nepraznom skupu X, a f^i $(i = 1, 2, \ldots)$ i-ta iteracija funkcije f, dok je $G(x)$ neka zadana funkcija iz V. U radu se razmatraju dva slučaja: slučaj kada je dimenzija prostora V beskonačna i slučaj kada je ta dimenzija konačna. U drugom slučaju posebna pažnja je posvećena promatranoj jednačini, u specijalnom slučaju kada je:

$$G(x) = F(x) \text{ i } F(x) = F(f^p(x)),$$

za neki prirodan broj p, najmanji s tom osobinom.

U prvom slučaju, $F(x)$ nije konstanta, dok se u drugom slučaju to uzma kao pretpostavka. Za sve posmatrane slučajeve dati su potrebni i dovoljni uslovi za egzistenciju rješenja koje se traži i navedena sva takva rješenja, kada ona postoje.

Radovi [30], [32] i [42] pisani su u koautorstvu s V. Vukovićem i odnose se na neasocijativne skoro-prstene. U prvom od njih istražuje se egzistencija jediničnog elementa, odnosno invertibilnost regularnih elemenata lijevog skoro-prstena S koji ispunjava određene uslove silaznih lanaca. Dobijenim rezultatima proširuju se analogni rezultati više stranih matematičara, dokazanih ranije u slučaju asocijativnih skoro-prstena. Drugi od ova dva rada, rad [32], posvećen je lokalnim neasocijativnim desnim skoro-prstenima. U njemu se asocijativnost, koja se ne pretpostavlja, nadoknađuje nekim uslovima koji se najčešće odnose na asocijatore oblika (A, B, C), gdje su A, B i C podskupovi skoro-prstena S. Dobijenim rezultatima prenijeti su, uglavnom, svi rezultati jednog Maxsonovog rada s asocijativnih desnih na neasocijativne desne skoro-prstene.

Radovi [29], [31], [33], [34] i [38], nastali su u koautorstvu sa saudijskim matematičarom Hamzom A. S. Abajubalom, odnose se na problematiku komutativnosti asocijativnih (lijevo, odnosno desno) *S-unitalnih prstena* koji, uz određeni polinomni identitet, u kome se pojavljuju komutatori, ispunjavaju i neka druga ograničenja na komutatore koja se odnose na torziju. Kao ilustraciju dobijenih rezultata, kojima se uopštavaju raniji rezultati više stranih autora, ovdje ćemo istaći samo glavni rezultat rada [29]: ako lijevo *S-unitalni prsten* R ispunjava polinomni identitet

$$x^t[x^n, y] = x^s[x, y^m], \quad \text{za date cijele brojeve } m > 1, n \geq 1, s \geq 0 \text{ i } t \geq 0$$

i komutatori u R su bez m-torzije ako je $n > 1$, tada je prsten R komutativan.

Produžavajući istraživanja iz radova [29] i [31], dokazane su teoreme za S-unitalne prstene, koji zadovoljavaju odgovarajuće polinomne identitete. Dodatne pretpostavke u ovim teoremama se odnose na torzionu slobodu komutatora u R.

I u radu [34] se proučavaju desni S-unitalni prsteni R koji zadovoljavaju uslove: za svaki podskup F od R, koji ima najviše četiri elementa, postoje nenegativni cijeli brojevi:

anu monografija FINAL PRINT.indd 112 6/16/2023 1:57:10 PM

$$m = m(F), n = n(F), r = r(F), s = s(F), t = t(F) \text{ i } t' = t'(F),$$

takvi da, za $m > 0$, ili $n > 0$, $n + t + t' \neq n = r + 1$, ili $m + s > 0$, ako je $m = n > 0$, i

$$x^{t'}[x^n, y]\, x^t = x^r [x, y^m] x^s, \ (\forall x, y \in F).$$

Uz neke dodatne uslove dokazuju se neke nove teoreme komutativnosti.

Radovi [35] i [36] se, također odnose na komutativnost asocijativnih (lijevo, odnosno desno) S-unitalnih prstena i predstavljaju produžetak tematike prethodnih radova. Ovdje se pretpostavlja da je $p(t)$ polinom s cjelobrojnim koeficijentima. T. P. Kezlan je dokazao da, u slučaju kada se radi o prstenu s aditivnim epimorfizmom α, takvom da je, za svako x iz R, $\alpha(x) - x^2\alpha(x)$ sadržano u centru od R, prsten R mora biti komutativan. Specijalno, D. Mac Hale je pretpostavio da je $t^2\, p(t) = t^n$, za neki fiksan $n > 1$, a nezavisno od njega su to dokazali i T. J. Laffey i H. Tominaga. U ovom radu, V. Perić je dokazao teoremu, sličnu, onoj koju je dokazao Kezlan, u specijalnom slučaju, s tim što je njegov dokaz jednostavniji, budući da on, umjesto Poznerovog rezultata, koristi specijalan slučaj koji je dao Sh. Amitsur.

I na kraju, u radu [43], u kautorstvu s autorkom ovog teksta M. Vuković, koji pripada oblasti algebarske teorije brojeva, autori polaze od dobro poznate činjenice da je Euklidova oblast, oblast glavnih ideala i da je svaka oblast glavnih ideala, oblast sa jednoznačnom faktorizacijom. Dok se lako može vidjeti da je svaka Euklidova oblast, oblast glavnih ideala, da bi se dokazalo da obrnuta tvrdnja ne vrijedi, obično se navodi kontraprimjer ili se poziva na jedan rad T. S. Motzkina, ali bez detalja, koji bi te primjere učinili lako razumljivim. Kontraprimjeri se nalaze među prstenima R cijelih algebarskih brojeva u kvadratnim kompleksnim poljima $\mathbb{Q}[\sqrt{-D}]$, za $D = 19, 43, 67, 163$. Naime, H. M. Stark je dokazao da su među prstenima R, cijelih algebarskih brojeva, u kvadratnim kompleksnim poljima:

$\mathbb{Q}[\sqrt{-D}]$, upravo oni, za koje je $D = 1, 2, 3, 7, 11, 19, 43, 67$ i 163,

oblasti glavnih ideala, a dobro je poznato da su prvih pet, među njima i Euklidove oblasti. Krajem 20. vijeka su J. C. Wilson, a zatim i O. A. Campoli dokazali za jedan od preostala četiri prstena (onaj za D=19) da je oblast glavnih ideala, ali da nije Euklidova oblast. Wilson je, uzimajući u obzir da su svi preostali prsteni (D=19, 43, 67 i 163) oblasti glavnih ideala, dokazao da nijedan od njih nije Euklidova oblast. U radu [43] je dat ne samo kompletan nego i potpuniji i lakše razumljiv dokaz, kojim se dokazuje da je prsten R algebarskih cijelih u kvadratnom polju $\mathbb{Q}[\sqrt{-D}]$, za $D = 19$ (kao i 43, 67 i 163) oblast cijelih, ali da nije Euklidova oblast.

Prikaz radova profesora Perića završićemo citatom akademika Đure Kurepe na kraju njegovog izvještaja za izbor V. Perića za dopisnog člana Akademije nauka i umjetnosti Bosne i Hercegovine, u kojem kaže:

„Na osnovu ovog kratkog prikaza radova V. Perića vidi se da je on odlično izgrađen algebrista i da je dao veoma lijepih, značajnih vlastitih priloga raznim

anu monografija FINAL PRINT.indd 113 6/16/2023 1:57:11 PM



Akademik V. Perić – posljednja fotografija u Sarajevu, Obala, kod „Dva ribara," snimljeno poslije rata

oblastima komutativne i asocijativne algebre, ali da je pokazivao interes i radio i u drugim oblastima matematike kao što su topologija, teorija skupova i relacija, uređenih struktura, algebarska teorija brojeva i dr., što svjedoči o njegovoj širokoj matematičkoj kulturi i obrazovanju [. . .]. Među njegovim radovima ima radova u kojim se otvaraju sasvim nova istraživanja, kao i onih u kojim se proširuju, kako klasični, tako i najnoviji rezultati poznatih svjetskih matematičara kao što su: W. Sierpinski, S. Piccard, J. C. Beidleman, P. Jaffard, H. Tominaga, I. N. Herstein, H. Bell i Light, kao i drugi. U drugim se opet pojednostavljuju dokazi ranije poznatih tvrdnji (V. S. Šišov, N. Jacobson, I. N. Herstein i dr.), daju odgovori na postavljena pitanja (A. V. Geramita i Ch. Small, H. Bell, S. Mardešić, i dr.), dokazuje netačnost tvrdnje (V. S. Šišov) i pronalazi dodatni uslov pod kojim ta tvrdnja vrijedi, dok se u jednom zajedničkom radu sa B. Martićem osporava jedna slutnja (A. Szàsz)."

Citiraću i *Nikolaja Dubrovina*, profesora Univerziteta u Vladimiru (Rusija) i učenika velikog Aleksandra Vasiljeviča Mihaljova sa čuvenog Moskovskog državnog univerziteta Lomonosov, koji u tekstu posvećenom prof. Periću kaže:

„Posrećilo mi se da tokom 1985-1986. godine radim u oblasti algebre na Univerzitetu u Sarajevu [...] do današnjih dana se sjećam toplog prijema koji mi je ukazan, sjećam se zaposlenih na Odsjeku za matematiku. Ipak, centar tog kolektiva, po mom mišljenju je bio prof. Veselin Perić, koji je bio šef Odsjeka za matematiku. Bio je to zadivljujuće inteligentan i dobar čovjek. Posebno sam zapamtio jednu crtu karaktera profesora Perića – istinski internacionalizam. Za njega religiozna pripadnost, nacionalnost, boja kože, status čovjeka u zemlji u

anu monografija FINAL PRINT.indd 114 6/16/2023 1:57:11 PM

kojoj živi bili su od drugostepenog značaja u odnosu na to kakav je čovjek, na njegove riječi, njegova djela i ponašanje“. [L: 45]

I za kraj da ispunim obećanje dato kolegi prof. *Hasanu Jamaku*.

Kada smo nedavno razgovarali o knjizi koju pišem o matematičarima – akademicima, rekao mi je da obavezno o prof. Periću napišem da smo se divili matematičkom talentu prof. Perića, širini njegovog poznavanja matematike, dubini shvatanja matematičkih ideja i lakoći s kojom je usvajao matematičke ideje, a posebno kada bi svakom predavaču postavljao vrlo kompetentna pitanja, čak i iz oblasti koje nisu spadale u djelokrug njegovog naučnog rada.

anu monografija FINAL PRINT.indd 115 6/16/2023 1:57:11 PM

Bibliografija akademika Veselina Perića

A. Naučni radovi

[1] *Teorija ideala E. Nöther i R. Dedekinda* (M. A. Thesis), Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 1965.

[2] *Prilog teoriji ideala* (Ph. D. Thesis), Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 1966.

[3] *Généralisation d'une théorème sur les relations*, Glasnik matematičko-fizički i astronomski, Ser. II, 13 (1958), pp. 39-40.

[4] *Solution of a Problem on connected topological Spaces*, Bilten Društva matematičara, fizičara i astronoma BiH, No. 7, Sarajevo (1964), pp. 10-12.

[5] *Eine Bemerkung zu den invertierbaren und fast invertierbaren Idealen*, Archiv der Mathematik, 15, Basel-Stuttgardt (1964), pp. 415-417.

[6] *Zu den fastinvertierbaren Idealen in kommutativen Ringen und Halbgruppen*, Glasnik Matmatički, Ser. III, 1 (21), Zagreb (1966), pp. 139-146.

[7] *Eine Charakterisierung der S-Komponenten der Ideale und der Halbgruppe* $(IR_S, \cap)$, Publications de l'Institut Mathématique (N.S.) 7 (21), Beograd (1967), pp. 93-98.

[8] *Fastinvertierbare Primideale der kommutativen Ringe*, Publications de l' Institut Mathématique (N.S.) 7 (21), Beograd (1967), pp. 99-109.

[9] *Zur Jordanschen kanonischen Matrix über einem beliebigen Körper,* Glasnik Matematički, Ser. III, 4 (24), Zagreb (1969), pp. 3-8.

[10] *Torsionmoduln über einem Hauptidealring und Jordansche kanonische Matrix einem beliebigen Körper*, Radovi ANUBiH, Knj. 33, Odjeljenja prirodnih i matematičkih nauka, Knj. 10, Sarajevo (1969), pp. 125-134.

[11] *Zu einem Artikel von V. S. Šišov,* Mathematica Balkanica 1 (1971), pp. 186-189.

[12] Über halbprimäre Ideale und halbprimäre Ringe, Matematički vesnik, 13 (28), No. 3 Beograd (1976), pp. 327-329.

[13] *On the Modularity of some orderable Cross-lattices*, Publications de l'Institut Mathématique (N.S.) 22 (36), Beograd (1977), pp. 187-188. (sa B. Martićem)

[14] *Sur l' existence d' une partie confinale dénombrable dans un groupe ordonné Linéairement*, Radovi Odjeljenja prirodnih i matematičkih nauka ANUBiH, 61, No. 7, Sarajevo (1978), pp. 71-73.

[15] *Die Lösung eines mengentheoretischen Gleichungssystems*, Matematički vesnik, 2 (15) (30), No. 3, Beograd (1978), pp. 273-277.

anu monografija FINAL PRINT.indd 116 6/16/2023 1:57:11 PM

[16] *Krullsche Dimension der Polynomringe über einem Ring der Dimension zwei*, Mathematica Balkanica 8 (1978), pp. 167-170. (sa B. Cerovićem)

[17] *D – Kommutativität der Fastringe mit Distributivitätsdefekt D*, Glasnik Matematički, Ser. III 15 (35), No. 1, Zagreb (1980), pp. 25-31. (sa V. Dašićem)

[18] *Eine Charakterisierung der 0-dimensionalen Ringe*, Glasnik Matematički, Ser. III 17 (37), No. 2, Zagreb (1982), pp. 241-247.

[19] *D-Quasi-Regularität und D-Nilpotenz in Fastringen mit streng kleinem Distributivitätsdefekt D*, Publications de l' Institut Mathématique, (N.S.) 33 (47), Beograd (1983), pp. 187-191.

[20] *Eine Charakterisierung der Menge Ass*(*A*) *in kommutativen Nötherschen Ringen*, Publications de l' Institut Mathématique, (N.S.) 33 (47), Beograd (1983), pp. 179-185.

[21] *On Rings with polynomial Identity* $x^n - x = 0$, Publications de l' Institut Mathématique, (N.S.) 34 (48), Beograd (1983), pp. 165-167.

[22] *Correction to the Paper*, [*A Characterization of 0-dimensional Rings*], Glasnik Matematički, Ser. III 19 (39), No. 1, Zagreb (1984), pp. 187.

[23] *On Rings with additive Power Maps*, Radovi Matematički, 1, No. 2, Sarajevo (1985), pp. 199-211.

[24] *A Note on the Nilradical N of a Ring R and a subdirect Sum Representation of the Ring R/N*, Acta Mathematica Hungarica, 46, No. 3-4, Budapest (1985), pp. 233-237.

[25] *On subdirect Sum Representation of certain Rings*, Radovi Odjeljenja prirodnih i matematičkih nauka ANUBiH, No. 24, Sarajevo (1985), pp. 21-29.

[26] *Commutativity of Rings inherited by the Localisation of a Herstein's Condition*, Radovi Matematički, 3, No. 1, Sarajevo (1987), pp. 65-76.

[27] *On additive power Maps of Rings*, Proceedings of the Conference "*Algebra and Logic*", Cetinje -1986, pp. 139-151. (Publ. Univ. Novi Sad, 1987).

[28] *A Solution of the functional Equation* $\varphi(x)+(\varphi f(x))=F(x)$, Radovi Odjeljenja tehničkih nauka ANUBiH, Sarajevo (1988), pp. 91-99. (sa M. Malenicom)

[29] *Commutativity of S-unital Rings through a Streb Result*, Radovi Matematički, 7, No. 1, Sarajevo (1991), pp. 73-92. (sa Abujabal, H.A.S.)

[30] *On nonassociative left Near-rings with certain descending Chain Condition Property,* Zbornik Radova, No. 5 (1991), pp. 5-12. (sa V. Vukovićem)

[31] *Commutativity Theorems for S-unital Rings with constraints on Commutators*, Results in Mathematics, 21, No. 3-4 (1992), pp. 256-263. (sa Abujabal, H.A.S.)

[32] *Correction to the Paper: On nonassociative left Near-rings with certain descending Chain Condition Property* [Zbornik Radova No. 5 (1991), pp. 5-12], Zbornik radova, No. 6, part 2 (1992). (sa V. Vukovićem)

[33] *Some commutativity Theorems for S-unital Rings with constraints on Commutators*, Publications de l' Institut Mathématiques, (N.S.) 52 (66), Beograd (1992), pp. 86-94 (sa Abujabal, H. A. S.)

[34] *Commutativity Theorem for S–unital Rings*, Mathematica Pannonica, 4, No. 2, Budapest (1993), pp. 181-190. (sa Abujabal, H. A. S.)

[35] *Localisation of a Commutativity Condition for S-unital Rings*, Mathematica Pannonica, 5, No. 2, Budapest (1994), pp. 281-297.

anu monografija FINAL PRINT.indd 117 6/16/2023 1:57:11 PM

[36] *Commutativity Conditions for Rings involving an additive Epimorphism*, Mathematica Montisnigri, 3, Podgorica (1994), pp. 87–94.

[37] *Remark to the Paper*: *Algebras connected with the equivalential Calculus*, [Math. Montisnigri, Podgorica, 4 (1995), pp. 13 -18] by W. A. Dudek, Math. Montisnigri 4 (1995), pp. 109-110.

[38] *Commutativity Results for Rings with certain constraints on Commutators*, Proyecionnes 14, No. 1, Antofagasta, Chile (1995), pp. 27-42. (sa Abujabal, H. A. S.)

[39] *Near-rings with a minimal Defect of Distributivity*, Mathematica Montisnigri, 7, Podgorica (1996), pp. 1-11. (sa V. Dašićem)

[40] *Some commutativity Results for S-unital Rings with constraints on four Elements Subsets*, Mathematica Montisnigri, 10, Podgorica (1999), pp. 43-57.

[41] *On Rings with special Automorphisms, resp. Derivations*, Bulletin of Society of Mathematicians, 9, Banja Luka (2004), pp. 1- 6.

[42] *On Local* (*Nonassociative*) *Near-Rings*, Zbornik radova sa Naučnog skupa povodom 25. godišnjice PMF u Podgorici, Podgorica (2005), pp. 48-56. (sa V. Vukovićem)

[43] *Some Examples of Principal Ideal Domains which are not Euclidean and some the other Counterexamples*, Novi Sad Journal of Mathematics, Vol. 38, No. 1, Novi Sad (2008), pp. 137-154. (sa M. Vuković)

B. STRUČNI RADOVI

[1] *Algebra*, I dio (*Prsteni i moduli*, *Linearna algebra*), Svjetlost, Sarajevo, 3. izd.; 1991, 422 str.

[2] *Algebra*, II dio (*Osnovne algebarske strukture*, *Teorija polja, Algebarske jednačine*) Svjetlost, Sarajvo, 2. izd.; 1989,196 str.

[3] *Zbirka riješenih zadataka iz Matematike* II, sveska I (*Diferencijalne jednačine*), Svjetlost, Sarajevo, 4. izd., 1989, 137 str. (s M. Tomićem)

[4] *Zbirka riješenih zadataka iz Matematike* II, sveska II (*Diferencijalna geometrija*, *višestruki*, *linijski i površinski integrali*, *vektorska analiza*), Svjetlost, Sarajevo, 4. izd.,1991, 251 str. (s M. Tomićem i P. Karačićem)

[5] *Zbirka riješenih zadataka iz Matematike* II, sveska III (*Funkcije kompleksne promjenljive, redovi*, *Laplasova transformacija*). Svjetlost, Sarajevo, 1991, 261 str. (s M. Tomićem i P. Karačićem)

[6] *Galuaova teorija*, Mala matematička biblioteka, Prosvetni list, Beograd, 1997, 90 str.

[7] *Konačnodimenzionalne realne divizione algebre*, Univerzitet Crne Gore, Podgorica, 2000, 146 str.

[8] *Algebra – Teorija grupa* (*pregled teorije i zadaci*), Univerzitet u Istočnom Sarajevu, Trebinje 2021, 363 str. (s M. Vuković)

[9] *Predavanja iz linearne algebre*, Univerzitet u Sarajevu, Sarajevo, 1963, 156 str.

[10] *Komutativna algebra* - skripta, Prirodno-matematički fakultet, Sarajevo, 1971, 133 str.

anu monografija FINAL PRINT.indd 118 6/16/2023 1:57:11 PM

[11] *Lokalni prsteni* - skripta, Prirodno-matematički fakultet, Sarajevo, 1972, 62 str.

[12] *Teorija valuacija* - skripta, Prirodno-matematički fakultet, Sarajevo, 1973, 93 str.

[13] *Nekomutativni prsteni* - skripta, Prirodno-matematički fakultet, Sarajevo,1979, 100 str.

[14] *Teorija reprezentacija konačnih grupa* - skripta, Prirodno-matematički fakultet, Sarajevo, 1980, 120 str.

[15] *Vera* (*Popović*) Šnajder redovni profesor (*Reljevo* 1904 – *Sarajevo* 1976), Doprinos Srba u BiH nauci i kulturi (specijalno izdanje – naučni skupovi), Filozofski fakultet, Pale, Univerzitet Istočno Sarajevo, Knj. 1, Pale (2007), pp. 537-541. (sa F. Vajzovićem i M. Vuković)

[16] *Akademik Branislav Martić, redovni profesor* (*Valjevo* 1923 – *Sarajevo* 1985), Doprinos Srba u BiH nauci i kulturi (specijalno izdanje – naučni skupovi), Filozofski fakultet, Pale, Univerzitet Istočno Sarajevo, Knj. 1, Pale (2007), pp. 505-515. (sa F. Vajzovićem)

[17] Matematika I – Proizvodno mašinstvo na postdiplomskom studiju (autorizovana skripta, generacija 1978-1980), pisao ing. Hilmija A. Nikšić, Sarajevo, 1997.

[18] *Generalizirane reciproke matrica*, Matematika 11, №1, Zagreb (1982), pp. 40-57.

[19] *Realni brojevi i njihova nastava u osnovnoj i srednjoj školi*, Matematika 15, № 3, Zagreb (1987), pp. 10–35.

[20] *Racionalni brojevi i njihova nastava u osnovnoj i srednjoj školi*, Matematika 17, Zagreb (1989), № 2, pp. 13-37; № 3, pp. 5-24; № 4, pp. 38–52.

[21] *Sedmi Hilbertov problem i transcedentnost brojeva π i e*, Matematika 19, №1, Zagreb (1990), pp. 5–22.

[22] *Osnovna teorema algebre*, Nastava matematike, 3-4, XLI, Beograd (1996), pp. 1-11.

[23] *Kako nastaju algebarske strukture*, Predavanje na Seminaru za nastavnike i profesore matematike, Mostar, 30. januar 1969.

[24] Školski riječnik terminoloških višestrukosti, Institut za jezik i književnost, Sarajevo (1979), 215 str. (V. Perić agažovan kao stručni saradnik za matematiku)

[25] *Dugoročni plan naučnog razvoja i obrazovanja naučnog kadra u matematici*, ANU BiH (Savjetovanje: O naučnom radu u oblasti matematike), Knj. KLVI, Odjeljenje prirodnih i matematičkih nauka ANUBiH, Knj. 7, Sarajevo (1979), pp. 39-49 (sa F. Vajzovićem)

[26] *Rješenja problema postavljenih u: The American Mathematical Monthly,* u periodu 1962-64 (18 advanced problems) – posebno izdvojeni u [27] i [28]:

[27] *Advanced Problems and Solution*: *Solution* of Problem 5087, u: Amer. Math. Monthly, 71 (1964), No. 3, 330 (Warner, Seth)

[28] *Advanced Problems and Solutions*: Solution of Problem 5122, u: Amer. Math. Monthly, 71 (1964), No.7, 805-806 (Flanders, Harley)

[29] V. Perić od 1967. godine, *za Zentralblatt für Mathematik – njemački referativni žurnal* je prikazao preko 200 naučnih članaka i knjiga

anu monografija FINAL PRINT.indd 119 6/16/2023 1:57:11 PM

anu monografija FINAL PRINT.indd 120 6/16/2023 1:57:11 PM



Fikret Vajzović

(*Konjic 1928 – Sarajevo 2017*)

Fikret Vajzović je bio prvi asistent na Katedri za matematiku, iz plejade prvih studenata matematike na Univerzitetu u Sarajevu koji je izrastao u jednog od najboljih i najznačajnijih profesora matematike na tom Univerzitetu. Može se slobodno reći da je stasao i razvijao se istovremeno s Univerzitetom i da je uz njegov veoma značajan uticaj i doprinos, tekao i sveukupan razvoj matematike, kako na Univerzitetu u Sarajevu, tako i u BiH. Po doprinosu univerzitetskoj nastavi i nauci prof. Vajzović je predstavljao jednu od najznačajnijih figura našeg Univerziteta. Njegova nastavna djelatnost trajala je skoro pet decenija, a naučna, neprekidno, skoro do kraja života.

Fikret Vajzović je rođen 1. maja 1928. godine u Konjicu, u porodici trgovca *Ibrahima* i *Fatime* Vajzović, kao najstarije od troje djece. Poslije njega na svijet su došli brat *Derviš – Dervo* i sestra *Abida – Bida*. Fikret je, u rodnom Konjicu, završio samo 4 razreda osnovne škole, a zatim je, njegova majka Fatima, rođena Mostarka, nakon ranog gubitka supruga, odlučila da se s djecom, vrati u rodni Mostar. Takvoj odluci njegove majke je, sigurno, doprinio i savjet hodže – Fikretovog učitelja, koji je prvi uočio da je on veoma bistar i nadaren dječak. Njegovo školovanje i odrastanje u Mostaru duboko ga je povezalo sa tim gradom, tako da se osjećao Mostarcem.

Tako je Fikret u Mostaru završio niže razrede gimnazije, a zatim i *Učiteljsku školu* (1947). Od februara do novembra 1945. godine bio je u JNA. Od 1947. do 1953. godine radio je kao učitelj, u raznim školama u BiH, a od 1953. do 1955. godine radio je i istovremeno studirao na Višoj pedagoškoj školi u Sarajevu – grupa matematika i fizika.

2010 Mathematics Subject Classification: 01A70, 01A65, 46-XX, 47-XX, 39-XX, 34-XX
Key words and phrases: Biographies, Bibliography; Functional analysis, Theory of operators, One parameter semigroups, Operator sine (cosine) function, Integrated semigroups, Functional equation, Fixed-point theorems.

anu monografija FINAL PRINT.indd 121 6/16/2023 1:57:11 PM

Poslije završetka Više pedagoške škole, Fikret Vajzović se zaposlio kao nastavnik matematike, ali je produžio i da dalje vanredno (uz rad) studira matematiku, na Prirodno-matematičkom odsjeku Filozofskog fakulteta u Sarajevu. Studij je završio 1959. godine.

Odmah po završetku studija izabran je za asistenta na toj istoj Katedri Filozofskog fakulteta, koja je vrlo brzo postala jednim od pet odsjeka novoosnovanog Prirodno-matematičkog fakulteta u Sarajevu (1960). Već tada, prema priči njegovih profesora, on je pokazivao izuzetne sposobnosti za matematiku i matematičku misao.

Na Odsjeku za matematiku sreće mladu bibliotekarku *Milicu Krstić*, inače nastavnicu, koju je zapazio još u vrijeme kada su oboje bili studenti na Višoj pedagoškoj školi. Ubrzo se žene i dobijaju dvoje lijepe i pametne djece: dječaka *Igora* i djevojčicu *Sanju*. Bio je to sretan brak dvoje ljudi srodnih duša, dvoje mladih koji su se u svakom pogledu dopunjavali. Igora je, iako je stigao do kraja studija matematike, rat omeo da ga završi i krene očevim stopama, dok je Sanja počela da studira filozofiju u Beču, a završila ju je u Sarajevu.

Prof. Perić, jedan od najstrožijih profesora na Odsjeku za matematiku, nakon što je Igor kod njega položio ispit iz algebre, rekao mi je: „Vidi se da je Fikrecijusov sin“ – kako bi ponekad zvao kolegu i prijatelja Fikreta Vajzovića.

U periodu od 1962-1964. godine Fikret Vajzović je pohađao nastavu trećeg stepena studija matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu, na kojem je titulu magistra matematičkih nauka stekao u martu 1965. godine, odbranivši rad *Funkcionalne jednadžbe u vektorskim prostorima*, a samo koji mjesec kasnije (u septembru 1965.) odbranio je i doktorsku disertaciju pod naslovom *Funkcionalne jednadžbe u Fréchet-ovim prostorima*, pod mentorstvom čuvenog profesora *Svetozara Kurepe*, koji je Fikreta Vajzovića, i pored brojnih vrlo uspješnih učenika, kasnije rasutih širom svijeta, smatrao jednim od svojih najboljih učenika. Kao što to često biva, ta prva oblast, koju je temeljno savladao, ostala je njegova trajna ljubav. Proširujući dalje svoje naučne interese, Fikret Vajzović je kod nas, u Sarajevu i u BiH, otvorio vrata funkcionalne analize.

Karijeru univerzitetskog nastavnika Fikret Vajzović započeo je 1965. godine, odmah poslije odbrane doktorata, izborom u zvanje docenta. 1972. godine je izabran za vanrednog profesora, a 1976. za redovnog profesora na Mašinskom fakultetu u Mostaru. Od 1979. bio je u zvanju redovnog profesora na Univerzitetu u Sarajevu, na koji se, u međuvremenu, vratio. Posebno treba naglasiti da je prof. Vajzović bio prvi nastavnik na Odsjeku za matematiku koji je i sam završio studij i stekao obrazovanje na tom Odsjeku, pa tako možemo reći da je bio dijete tog Odsjeka koje je od studenta izraslo u izvrsnog naučnika i nastavnika.

Kao što smo već vidjeli, školovanje Fikreta Vajzovića nije bilo ni lako, ni jednostavno – odvijalo se u etapama, nakon završene srednje škole i uz redovan posao. Usprkos tome, zahvaljujući nadarenosti i istinskoj ljubavi prema matematici, kao i ozbiljnom interesu za opštu kulturu, on je, neprekidnim i istrajnim

anu monografija FINAL PRINT.indd 122 6/16/2023 1:57:11 PM

radom, stekao izuzetno bogato i vrlo solidno, kako matematičko, tako i široko opšte obrazovanje.

U isto vrijeme se u vrlo uspješnoj i bogatoj nastavničkoj djelatnosti, prolazeći kroz sve faze – od učitelja i nastavnika osnovne i profesora srednje škole do redovnog profesora fakulteta – sigurnim, širokim, ali i dubokim obrazovanjem i izuzetno odgovornim pristupom nastavi, na svim nivoima, formirao u zrelog naučnika i serioznog intelektualca, vrlo izgrađenih kriterija i visokih moralnih vrijednosti, u jednog od najuglednijih profesora Odsjeka za matematiku. Njegova neprekidna i aktivna naučna djelatnost i naročita spremnost za pomoć i saradnju, učinili su ga jednim od nastavnika daleko najuspješnijih i najzaslužnijih za podizanje naučnog podmlatka u oblasti matematike na bosanskohercegovačkom prostoru.

Svakako treba istaći da je Fikret Vajzović obrazovanje sticao i na Moskovskom državnom univerzitetu (MGU), poznatom kao Lomonosov i da zasluga za njegov odlazak na nadaleko poznati *Lomonosov*, pripada tadašnjem šefu Odsjeka za matematiku prof. *Veri Šnajder*, ženi koja je vizionarski, pored Fikreta Vajzovića, poslala i Mahmuta Bajraktarevića na pariško Sorbonu (*Sorbonne*), a Veselina Perića u čuvenu *školu algebre Emmy Nöther*, u Götingen. Tako su, matematičari, iz Sarajeva, zahvaljujući prof. Šnajder, otišli na najznačajnije univerzitete, ne samo u Evropi nego i u svijetu, a Sarajevo je polako, ali sigurno, hvatalo korak s drugim jugoslovenskim centrima, u kojim se matematika počela puno ranije razvijati. Boravak na Lomonosovu je bio prelomni događaj u životu Fikreta Vajzovića, koji ga je doveo do velikana i stuba moderne matematike u BiH, posebno funkcionalne analize. Bio je to u isto vrijeme i prelomni momenat za razvoj matematike kao naučne discipline u BiH.



Lomonosov Moscow State University

Moskovski Državni Univerzitet – Lomonosov. Osnovao ga je Mihail Vasiljevič Lomonosov (1755).

Tako je, naoružan znanjem koje je stekao na Sveučilištu u Zagrebu i na Lomonosovu – u poznatim školama funkcionalne analize *Svetozara Kurepe* i

anu monografija FINAL PRINT.indd 123 6/16/2023 1:57:11 PM

Anatolija Gardejeviča Kostjučenka, kao i entuzijazmom mladog naučnika, Fikret Vajzović vrlo brzo skrenuo pažnju na sebe. Inače, moja generacija je bila prva generacija, kojoj je prof. Vajzović držao predavanja iz Diferencijalnih jednačina, nakon povratka iz Moskve.

Nama, studentima treće godine studija, od prvog dana svidjela su se predavanja prof. Vajzvića: bio je tih, povučen, čak i pomalo stidljiv. Dok je predavao i istovremeno pisao po tabli, gledao je u tablu. Što se tiče nastave, nas studente je najviše fascinirao njegov način predavanja. Njegova predavanja su bila *jasna, maksimalno dotjerana i u svakom pogledu besprijekorna*. Od njega smo naučili da se i najkomplikovanije tvrdnje mogu izložiti jednostavno i učiniti svima jasnim i lako razumljivim. Tako su nam se i najteže teoreme i leme, kada ih je on navodio i dokazivao, činile jednostavne i lake. Predavanja prof. Vajzovića su nas veoma podsjećala na predavanja akademika Mahmuta Bajraktarevića. I uopšte, i on sam u svemu nas je podsjećao na Mašu. Poneko od kolega studenata bi znao reći: „Vidi se da je bio Mašin asistent“, a poneko bi išao i dalje, pa bi rekao: „Podsjeća na Bajraka, kao da mu je sin.“

Veoma plodan naučni rad i interes akademika Vajzovića pripada dvjema izrazito važnim oblastima matematičke analize: *funkcionalnoj analizi* i *teoriji funkcionalnih jednačina*. Međutim, naučni radovi, koje je napisao, mogli bi se svrstati u više oblasti: *teorija sumabilnosti, teorija funkcija, teorija mjere, teorija operatora na Hilbertovom i Banachovom prostoru, Banachova algebra* i *Banachovi prostori*, *teorija polugrupa u Fréchetovim prostorima*, itd.

Već smo spomenuli da je akademik Fikret Vajzović bio ne samo jedan od glavnih utemeljivača moderne matematičke analize, pa tako i matematike kod nas, nego i jedan od najboljih matematičara koje je Odsjek za matematiku imao – naučnik koji je obilježio čitavu jednu epohu, što je uistinu značilo mnogo za matematiku u BiH i šire.

Značaj Fikreta Vajzovića ogleda se i u tome što je odigrao važnu ulogu u odgoju i podizanju mladog matematičkog kadra i imao ogroman uticaj na naučni rad, u oblasti matematičke analize, a naročito funkcionalne analize. Zapravo bi se moglo reći da je najdublji trag ostavio upravo među svojim učenicima – magistrantima i doktorantima, u koje ću ubrojati i sebe, s obzirom da sam, kao njegova asistentica, bila dugo njegova bliska saradnica, a zatim i kolegica – do kraja njegovog života.

Tokom dugogodišnje karijere akademik Vajzović je bio mentor za izradu oko 50 diplomskih radova, preko 20 magistarskih i sedam doktorskih disertacija, od kojih su dvije započete na Moskovskom državnom univerzitetu, pod rukovodstvom poznatog ruskog matematičara A. G. Kostjučenka, kod kojeg je i on, svojevremeno, proveo godinu dana. Tako su mnogi od naučnih radova akademika F. Vajzovića urađeni u koautorstvu s mladim matematičarima, njegovim učenicima – magistrantima i doktorantima.

anu monografija FINAL PRINT.indd 124 6/16/2023 1:57:11 PM

Fikret Vajzović

MathSciNet

Ph.D. University of Zagreb 1965 

Dissertation: *Funkcionalne jednadžbe u Frechet-ovom prostoru (Functional Equations in Frechet Space)*

Mathematics Subject Classification: 46—Functional analysis

Advisor 1: Svetozar Kurepa

Students:
Click here to see the students listed in chronological order.

Name	School	Year	Descendants
Drljević, Hamid	University of Sarajevo	1986	
Mandić, Momčilo	University of Sarajevo	1990	
Pikula, Milenko	University of Sarajevo	1983	2
Radić, Mirko	University of Sarajevo	1990	
Šahović, Amina	University of East Sarajevo	2008	
Šehu, Islam	University of Pristina	1985	
Vugdalić, Ramiz	Univerzitet u Tuzli	2006	

Mathematics Genealogy Project: Fikret Vajzović

Fikret Vajzović je, od osnivanja Prirodno-matematičkog fakulteta do penzionisanja 1999. godine, ostao vjeran svom Fakultetu, s izuzetkom perioda od 1976-1979. godine, kada je, da bi pomogao osnivanju mostarskog Univerziteta „Džemal Bijedić“, prešao na Mašinski fakultet u Mostaru, ali je i tada držao nastavu i na Odsjeku za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta u Sarajevu, gdje je tradicionalno predavao *Diferencijalne jednačine i Funkcionalnu analizu*. Kao Mostarac, odigrao je vrlo važnu ulogu u pokretanju ne samo studija mašinstva nego i u formiranju Univerziteta „Džemal Bijedić“, s obzirom na značaj matematike za studij tehnike i činjenicu da je on, u to vrijeme, bio jedini doktor matematičkih nauka u Mostaru.

Iz dosada izloženog vidjeli smo koliko je značajan bio doprinos akademika Fikreta Vajzovića za unapređenje naučnog rada i formiranje, kako stručnog, tako i naučnog podmlatka, u oblasti matematike u BiH i šire. Ali svakako treba istaći i njegov doprinos u podizanju kvaliteta i nivoa nastave matematike, kako na drugom, tako i na trećem stepenu studija matematike, na kojem je predavao skoro 50 godina.

Za izvanredan doprinos razvoju matematike, u BiH, Fikret Vajzović je u toku svog dugogodišnjeg rada dobio brojna priznanja od kojih među najznačajnija spadaju: najveća Republička nagrada za doprinos razvoju nauke „Veselin Masleša” za 1979. godinu i „Dvadesetsedmojulska nagrada“ za 1987. godinu. Uz

anu monografija FINAL PRINT.indd 125 6/16/2023 1:57:11 PM

nagrade, svakako, kao najznačajnije priznanje treba posebno istaći izbor profesora Vajzovića najprije za dopisnog (1991), a zatim i za redovnog člana Akademije nauka i umjetnosti Bosne i Hercegovine (1995). Počasno naučno-nastavno zvanje profesor emeritus Univerziteta u Sarajevu akademik Vajzović je dobio kao redovni član Akademije nauka i umjetnosti Bosne i Hercegovine.

Ako se upitamo šta bi se moglo reći za akademika Fikreta Vajzovića, odgovor bi bio: obilježio je cijelu jednu epohu, što, zaista, znači mnogo za bosanskohercegovačku matematiku. Plijenio je svojom jednostavnošću, skromnošću, toplinom i ljudskošću, a sa druge strane mudrošću i znanjem. Živio je tiho, skromno i nenametljivo, okružen knjigama i naučnim radovima, sa željom da što više nauči i sazna, i to svoje znanje je nesebično dijelio sa drugima. Bio je spreman da svojim savjetima pomogne svakome ko bi mu se obratio za pomoć. Zato je ostavljao dubok i neizbrisiv trag u svim sredinama i na svim prostorima na kojima je radio, kako na Univerzitetu u Sarajevu, tako i na univerzitetima u Mostaru, Bihaću i Istočnom Sarajevu.

Akademik Fikret Vajzović je objavio oko 40 naučnih radova, dva udžbenika, a napisao je i skripta za većinu predmeta koje je predavao, kako na II, tako i na III stepenu studija, i to tako dobro, da su svaka od njih mogla odmah da idu u štampu kao udžbenik.

Svi naučni radovi Fikreta Vajzovića objavljeni su, kako u najuglednijim časopisima bivše Jugoslavije, tako i u nekim od inostranih časopisa i vrlo su pozitivno prikazani od poznatih matematičara raznih zemalja svijeta, i to u sva tri svjetska referativna časopisa, kao što su časopisi: Američkog matematičkog društva (AMS) *Mathematical Reviews* (MathSciNet), *Zentralblatt für Mathematik* (ZbMath), tadašnje SR Njemačke, danas Evropskog matematičkog društva (EMIS) i ruski *Referativnij* Žurnal *Matematika* Akademije nauka SSSR. Ali o značaju jednog naučnika ne govore samo podaci koji se mogu naći na *MathSciNet*u i *ZbMathu*. O značaju autora i dobijenih rezultata, u ono vrijeme kada nije bilo kompjutera, najrječitije su govorila uključivanja njihovih radova u poznate monografije. Tako su u monografiju M. Kuczma *Functional Equations in a single Variable, Monografie Matematiczne*, 1968 [L: 22], u izdanju Poljske Akademije nauka, uključeni svi radovi Fikreta Vajzovića, objavljeni do pojave ove monografije. Osim toga, u Bibliografiji – dijelu koji se odnosi na funkcionalne jednačine, koja je objavljena u matematičkom časopisu *Aequationes Mathematicae* (1969), kao dopuna J. Aczelovoj monografiji *Vorlesungen über die Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen* [L: 1], takođe su navedeni svi radovi F. Vajzovića koji pripadaju oblasti funkcionalnih jednačina, objavljeni do pojave te bibliografije.

Naučni radovi F. Vajzovića su u vrijeme kada su nastajali bili, u prvom redu, od teorijskog značaja, ali svakako treba naglasiti da je među njima bilo i onih koji su bili od značaja i za primjenu. Tako su, na primjer, atomski fizičari E. D. Cashwell i C. J. Everett svoje rezultate, dobijene u radu *Extension of Riesz Representation Theorem and Solution of the Maxwell-Bolzmann functional Equation* [L: 5], koji se

anu monografija FINAL PRINT.indd 126 6/16/2023 1:57:11 PM

odnosi na centralni problem *Bolzmannove H-teoreme u klasičnoj kinetičkoj teoriji gasova*, bazirali na jednom poopštenju *Rieszove teoreme reprezentacije* pozivajući se pritom bitno na rezultate do kojih je F. Vajzović došao ranije, u svom radu [3].

Spomenućemo samo još neke od matematičara kojima su, kao polazna tačka, poslužili radovi i rezultati F. Vajzovića. Jedan takav rad je rad K. Lajkóa *On the Solution of a Functional Equation of F. Vajzović* [L: 24], u kome se F. Vajzović spominje čak u naslovu, a u radu se proširuje ispitivanje jedne funkcionalne jednačine koju je F. Vajzović ispitivao u svom radu [5]. Pominjanje F. Vajzovća u naslovu rada potvrđuje koliki je bio značaj Vajzovićevog rada za pomenuti Lajkóov rad. Zatim treba pomenuti: rad J. A. Bakera *On the Functional Equation* $f(x) \cdot g(x) = \prod_{i=1}^{n} h(a_i x + b_i)$ [L: 4], u kom se i on bavio istom problematikom kao F. Vajzović u svom radu [2]; rad *Functional Equations* on ordered Fields [L: 9], grupe autora Z. Daróczy – K. Lajkó – L. Székelyhidi, koji su ispitivali neke funkcionalne jednačine na uređenim poljima, između ostalog i jednačinu koju su najprije F. Vajzović, a kasnije i K. Lajkó, proučavali na skupu realnih brojeva (Jedan dio tog rada se pojavljuje pod naslovom *On the Vajzović-equation*). I na kraju rad *On the abstract Cauchy Problem for the Operator* $\frac{d^2}{dt^2} - A$ [L: 6], I. Cioranescua, koji je proučavao Cauchyev problem za apstraktnu diferencijalnu jednačinu $\frac{d^2}{dt^2} - Ax = 0$, koristeći pritom rezultate F. Vajzovića iz rada [6].

Svakako treba naglasiti da, kao što su radovi F. Vajzovića bili podsticaj za nastanak radova drugih matematičara, tako su i neki od radova F. Vajzovića bili inicirani radovima drugih matematičara. Tako je, recimo, F. Vajzović u radu [10] dokazao tačnost hipoteze velikog sovjetskog matematičara M. G. Kreina, u vezi sa spektrom cijelih operatora u Hilbertovom prostoru, koju je Krein izrekao u svom radu *Osnovnye položenija teorii predstavlenija operatorov s indeksom defekta* (m, m) [L:20]. Pored toga, u radu [8], F. Vajzović je riješio jedan problem kojeg su postavili E. D. Cashwell i C. I. Everett, na osnovu kojeg je dobio, koliko mi je poznato, prvo matematički strogo rješenje *Maxwell-Jüttnerove jednačine* koja se pojavljuje i ima važnu ulogu u teoriji elastičnog sudara molekula idealnog relativističkog gasa, u ravnoteži.

Sada ćemo dati kratak prikaz naučnih radova F. Vajzovića posebno, a zatim iznijeti i globalnu ocjenu tih radova pozivajući se pritom na brojeve pod kojim su navedeni u priloženoj Bibliografiji njegovih naučnih radova.

Svi naučni radovi Fikreta Vajzovića spadaju u vrlo važnu i aktuelnu oblast funkcionalne analize, s izuzetkom radova [1] i [7], u kojim se posmatra obična funkcionalna jednačina $f(x) \cdot f(x+1) \cdots f(x+n) = R(x)$, odnosno rada [5], u kojem se određuje oblik rješenja jedne obične funkcionalne jednačine, te rada [11], u kojem se dokazuje jedna inkluzija određenih postupaka sumabilnosti.

Prvih 12 radova F. Vajzovića odnosi se na funkcionalne jednačine, jednoparametarske polugrupe, spektar određenih operatora i određenu familiju nelinearnih funkcionala, izuzev spomenutog rada [11], koji se odnosi na teoriju sumabilnosti.

anu monografija FINAL PRINT.indd 127 6/16/2023 1:57:11 PM

U radu [1] rješava se već spomenuta jednačina $f(x) \cdot f(x+1) \cdots f(x+n) = R(x)$, uz određene pretpostavke o nepoznatoj funkciji f, u slučaju kada je $R(x)$ količnik dvaju polinoma. Rezultatima rada [1] Fikret Vajzović je znatno proširio i poopštio ranije rezultate J. Anastasiadasa, M. Bajraktarevića i M. Kuczme, dok, je u radu [7], našao eksplicitno rješenje te funkcionalne jednačine, u slučaju kada je njena desna strana, tj. funkcija $R(x)$, količnik jednog polinoma i jednog konvergentnog beskonačnog proizvoda linearnih funkcija, uz određene uslove. Time je pokazao da je to jedino rješenje koje zadovoljava te uslove. Tako je poboljšao rezultate spomenutih autora, kao i rezultate svog rada [1].

Radovi [2], [6] i [12] vezani su za važnu problematiku jednoparametarskih grupa i polugrupa, kao i kosinusnih operatorskih funkcija.

U radu [2] F. Vajzović posmatra funkcije $T_i\,(i = 1, 2, 3, 4)$ na skupu realnih brojeva s vrijednostima u Banachovoj algebri A. Uz petpostavku da $T_i(t)$ i $T_j(t)$ komutiraju i da su funkcije T_i izmjerive, na svakom intervalu, najprije dokazuje da je:

$$T_i(t) = T_i(0)\, e^{(a_i t T + t u_i)},$$

gdje su a_i konstante, a T i u_i elementi algebre A.

Zatim uzima da je A algebra ograničenih operatora na Hilbertovom prostoru i pretpostavlja da su funkcije T_i slabo izmjerive i, u tom slučaju, dolazi do analognih rezultata. Time je bitno poopštio neke od rezultata *S. Kurepe*, iz 1963. godine. U specijalnom slučaju, kada je

$$T_2(t) = T_3(t) = T_4(t) = 1\ (\forall t),$$

posmatrana problematika uključuje teoriju jednoparametarskih grupa i polugrupa.

U obimnom radu [6], koji se sastoji iz tri dijela, F. Vajzović dobija više rezultata. U prvom dijelu rada posmatraju se polugrupe $(T(t),\ t > 0)$ neprekidnih linearnih operatora na *Fréchetovom prostoru* ((F)-prostor) X (koji predstavlja inverzni limes Banachovih prostora $(X_k, \|\cdot\|)$, i dokazuje, da jaka izmjerljivost funkcije $t \to T(t)\,x\ (\forall x \in X)$, na svakom intervalu, implicira lokalnu ograničenost i lokalnu neprekidnost polugrupe $(T(t)\,,\ t > 0)$. Uz ograničenje:

$$\| T(t)x \|_k \le M_k \alpha_k^t \quad (t > 0), \quad \text{na rast ove polugrupe,}$$

dokazuje se da se operator $T(s)$ - $1/s$, na granici, ponaša kao infinitezimalni generator polugrupe $T(t)$, pri čemu, navedeno ograničenje na rast posmatrane polugrupe, slijedi iz pretpostavke:

$$\| T(t_0)x \|_k \le N_k \| x \|_k, \quad \text{za neko} \quad N_k = const \text{ i bar jedno } \quad t_0.$$

anu monografija FINAL PRINT.indd 128 6/16/2023 1:57:12 PM

Ovdje $\| x \|_k$ znači normu u k-tom Banachovom prostoru X_k, a X inverzni limes niza (X_k).

U drugom dijelu rada dobijaju se analogni rezultati za funkcije T_i $(i=1,2,3,4)$, za koje je:

$$T_1(t+s)\,T_2(t-s) = T_3(t)\,T_4(s),$$

gdje je $T_i(x)$ neprekidan operator na $(F)-$ prostoru X.
U trećem dijelu rada, posmatra se funkcionalna jednačina

$$T(t+s)\,T(t-s) = 2T(t)\,T(s)\ (t,s \in \mathbb{R}),$$

gdje je $T(t)$ neprekidan linearan operator na (F)-prostoru X. Ovim rezultatima je dokazana egzistencija infinitezimalnog operatora kosinusne funkcije T u (F) – prostorima i tako otvoren put prema primjenama na diferencijalne jednačine. Češki matematičar I. Sowa je nešto kasnije dokazao egzistenciju infinitezimalnog operatora A, ali samo u slučaju Banachovog prostora X [L: 36] i tako dobio nešto slabiji rezultat od spomenutog rezultata F. Vajzovića, koji mu je, inače, prethodio. Rezultat Sowinog rada je teorema tipa Hille-Philips-Yoside, koja daje potrebne i dovoljne uslove, pod kojim operator A generiše kosinusnu funkciju, koju on dokazuje na drugi način, na osnovu reprezentacije rezolvente pomoću *Laplaceova transformata* kosinusne funkcije *T–Tu*, koja je, inače, sadržana u Vajzovićevom radu [6].

U radu [12] je naveden kraći dokaz osnovne teoreme u teoriji kosinusnih operatorskih funkcija.

Radovi [3] i [4] odnose se na neprekidni funkcional F, definisan na Hilbertovom prostoru X, s tim što se u radu [3] nalazi opšti oblik funkcionala F, uz pretpostavku da je on aditivan na A-ortogonalnim parovima, pri čemu je A neki ograničeni hermitski operator prostora X, dok se u radu [4] razmatranja vrše u slučaju kada je funkcional F kvadratan na ortogonalnim parovima.

U radu [5] F. Vajzović dokazuje da izmjerivo rješenje f funkcionalne jednačine:

$$2f(t/2) = f(tc/(1+c)) + f(c/(1-c)) - f(1/(1+c))\ \ (t,\ c>0)$$

mora da bude oblika $f(x) = \alpha \cdot ln\, 2x + b\cdot(x-1/2)$.

Problematiku ovog rada nastavili su da izučavaju mađarski matematičari Z. Daróczy, K. Lajkó, L. Székelyhidi (vidi npr. [L: 9]).

U radu [8] F. Vajzović najprije dolazi do zaključka da svaki funkcional F, definisan na Hilbertovom prostoru H $(dim\, H \geq 1)$, koji je aditivan na nekom podskupu S od H^2, mora biti oblika:

$$F(x) = \alpha \cdot K(x) + f(x)\ \ (\alpha \in \mathbb{R}),$$

gdje je f linearan, neprekidan funkcional na H i $K(x) = (1 + |x|^2)^{1/2} - 1$.

anu monografija FINAL PRINT.indd 129 6/16/2023 1:57:12 PM

Zatim, dalje dokazuje da svako neprekidno rješenje tzv. *Maxwell-Jüttnerove funkcionalne jednačine* ima određeni oblik.

F. Vajzović, u radu [9] posmatra familiju K realnih, nelinearnih funkcionala na Hilbertovom prostoru H beskonačne dimenzije i uvodi pojmove: bitno linearne nezavisnosti n funkcionalâ familije K, te bitno linearne nezavisnosti familije K i zatvorenosti familije K. Zatim dokazuje teoremu kojom su određeni potrebni i dovoljni uslovi za zatvorenost familije K, koja se sastoji samo od funkcionala oblika $k(x) = \varphi(|x|^2)$ $(x \in H)$, gdje je funkcija $\varphi(u)$ definsana i neprekidno diferencijabilna na $[0,+\infty)$. Dalje pokazuje da je, u toj teoremi, dovoljno pretpostaviti da je $dim\, H \geq 5$ i navodi jedno njeno poopštenje. Konačno, dokazuje da za svako $m = 1, 2, ..., +\infty$, postoji zatvorena linearno nezavisna familija K_m koja se sastoji od m (nelinearnih) funkcionala.

U radu [10] su dokazane tri teoreme koje se odnose na spektar i broj $N(\lambda)$ svojstvenih vrijednosti određenih operatora, u intervalu $(-\lambda, \lambda)$, $\lambda > 0$. Pri tome se u prvoj teoremi dokazuje tačnost jedne hipoteze poznatog ruskog matematičara M. G. Kreina, iz 1949. godine, u kojoj se tvrdi da se spektar cijelog prostog operatora A sastoji od svih nula neke determinante $D(\lambda)$, pri čemu se svaka nula i svaka svojstvena vrijednost računaju onoliko puta kolika je njihova višestrukost. U Teoremi 2. se dokazuje da se spektar svakog hermitskog proširenja $\tilde{A}$, operatora A, sastoji upravo od svih nula determinante $D(\lambda)$, ukoliko je, bar za jedno z_0, $D(z_0) \neq 0$. Teorema 3. tvrdi da za bilo koja dva različita hermitska proširenja $\tilde{A}_1$ i $\tilde{A}_2$, simetričnog zatvorenog operatora A, koji djeluje u Hilbertovom prostoru H s indeksima defekta jednakim nekom prirodnom broju m, vrijedi:

$$|N_2(\lambda) - N_1(\lambda)| \leq m, \quad \text{dakle} \quad \lim_{\lambda \to \infty} (N_1(\lambda)) / (N_2(\lambda)) = 1.$$

Pri tome se još pretpostavlja da bar jedno hermitsko proširenje $\tilde{A}$, operatora A ima diskretan spektar.

U radu [12] je dokazana jedna teorema inkluzije za $S^{\alpha,\beta}$- postupak sumabilnosti, čime je poopšten jadan raniji rezultat B. Martića (iz 1962. godine).

U svim ostalim radovima, od [15] do [24], s izuzetkom radova [17] i [23], F. Vajzović se bavio problematikom vezanom za fiksnu tačku određenih operatora.

Tako u radu [15] dokazuje egzistenciju fiksne tačke operatora A, koji djeluje sa K u K, gdje je K neprazan, slabo kompaktan, konveksan podskup Banachovog prostora X koji ima normalnu strukturu, ako operator A zadovoljava uslov:

$$\|Ax-Ay\| \leq Max\{\|x-y\|, 1/2\,[\|x-Ax\|+\|x-Ay\|], 1/2\,[\|x-Ay\|+\|y-Ax\|]\}.$$

Ovaj rezultat predstavlja poopštenje jednog rezultata W. A. Kirka i odnosi se na rezultate K. Göbela, W. A. Kirka i T. N. Shima.

U radu [14] F. Vajzović je posmatrao operator A, koji djeluje na Banachovom prostoru X, koji na nekom njegovom podskupu K, i za neke realne brojeve $a, b, c \geq 0$, $a + 2b + 2c \geq 1$, zadovoljava uslov:

anu monografija FINAL PRINT.indd 130 6/16/2023 1:57:12 PM

$$\| Ax - Ay \| \leq a \| x - y \| + b [\| x - Ax \| + \| y - Ay \|] + c[\| x - Ay \| + \| y - Ax \|].$$

Uz pretpostavku da je: $a + b > 0$, $A : K \to H$, $A : \partial_H K \to K$, pri čemu je H neki zatvoren konveksan skup u X, a K neprazan slabo kompaktan konveksan podskup skupa H, koji ima normalnu strukturu, F. Vajzović je dokazao da tada A ima fiksnu tačku i da se pretpostavka $a+b > 0$ može izostaviti, ukoliko i H ima normalnu strukturu.

U radu [15] su, pomoću nekih rezultata W. Kirka, dokazane dvije interesantne teoreme o egzistenciji fiksne tačke, određenog neprekidnog operatora, dok se u radu [16] dobijaju analogni rezultati, ali uz bitno drukčije pretpostavke.

U radu [17] F. Vajzović je dokazao dvije teoreme o egzistenciji fiksne tačke, neprekidnog operatora $A : K \to K$, koji je podvrgnut određenom uslovu. U prvoj teoremi se pretpostavlja da je podskup $K \subseteq X$ neprazan, slabo kompaktan konveksan skup koji ima normalnu strukturu, a u drugoj da je podskup $K \subseteq X^*$ neprazan, konveksan i X^*– kompaktan skup, pri čemu je X Banachov prostor, a X^* adjungovan prostor prostora X. U ovim teoremama se, na operator A, postavljaju različiti uslovi.

U radu [18] je dokazana teorema o egzistenciji fiksne tačke operatora $A: K \to H$, gdje su K i $H (\supseteq K)$ neprazni konveksni skupovi i K slabo kompaktan, a H s normalnom strukturom, u Banachovom prostoru X, pri čemu operator $A: \partial_H K \to K$ zadovoljava i nejednakost iz rada [13].

U radu [21] se dokazuje egzistencija fiksne tačke nelinearnog operatora $A: K \to H$, gdje su K i $H (\supseteq K)$ konveksni, a H, pored toga, i slabo kompaktan skup s normalnom strukturom u Banachovom prostoru X. Pri tome se pretpostavlja da $A: \partial_H K \to K$ $(\partial_H K \neq \emptyset)$ i da operator A zadovoljava nejednakost iz rada [14].

U radovima [19] i [20] F. Vajzović se vraća na operatorsku kosinusnu funkciju. Glavni rezultat rada [19], u kom je dokazano sedam teorema, odnosi se na ograničenu operatorsku kosinusnu funkciju u Banachovom prostoru. Za infinitezimalni operator te funkcije se, pod određenim uslovima, dobija familija projektora koja je analogna spektralnoj familiji hermitskog operatora u Hilbertovom prostoru, a zatim se pomoću ove familije dobijaju rezultati koji se odose na spektar infinitezimalnog operatora i razvija funkcionalni račun za taj operator, te na osnovu toga dokazuje izometričnost *Cayleyeve transformacije* infinitezimalnog operatora kosinusne funkcije, koja je hermitska u Vidavovom smislu.

U radu [20] se pomoću određenih jednakosti definiše familija operatorâ $F_a (a \geq 0)$ koja postoji, za svaku ograničenu kosinusnu funkciju. Zatim se za kosinusnu operatorsku funkciju $C(t)$, koja je ograničena i jako neprekidna, dokazuju dvije teoreme i to, da uz pretpostavku da je $0 \leq a \leq b$:

1) vrijedi $F_a F_b x = F_b F_a x = 2 \int_a^b F_u x \, du + (b - a) F_a x \ (x \in X)$;

anu monografija FINAL PRINT.indd 131 6/16/2023 1:57:12 PM

2) i da je $2\int_a^b F_t\,dt = (b-a)(F_a + F_b)$, tada u intervalu $(-b^2, -a^2)$, nema tačaka rezidualnog i punktualnog spektra infinitezimalnog operatora funkcije $C(t)$.

U ovom radu se, između ostalog, dokazuje i da za kosinusnu funkciju $C(t)$ hermitskih operatora, striktno konveksnog prostora X, čija je norma diferencijabilna u Gâteauxovom smislu, infinitezimalni operator funkcije $C(t)$, nema rezidualnog spektra.

Tehnika razvijena u radovima [19] i [20] uspješno je primjenjena i u radu [21] u dokazu dvije ergodične teoreme. Problematika i rezultati ovog rada povezani su s radovima japanskog matematičara R. Satoa i matematičara Sen-Yen Shawa s Taiwana.

U radu [24] se uvode i analiziraju α-puta integrisane polugrupe $(\alpha > 1)$. Pokazuje se da pogodni diferencijalni operatori generišu α-puta integrisane polugrupe za $\alpha \in (1/2, 1)$ (rad je objavljen sa M. Mijatovićem i S. Pilipovićem).

U radu [31] se proučavaju različite klase distribucija polugrupa na prostorima funkcija F_r, $r \in \mathbb{R}$ koje su okarakterisane njihovim ponašanjem u koordinatnom početku. Uvodi se skala *Fréshetovih* prostora F_r, $r \in \mathbb{R}$ i posmatraju polugrupe koje imaju proširenja na takve prostore. U glavnoj tvrdnji sekcije 3 okarakterisane su r-stroge distribucije polugrupa oblika $G(t, x) = (t^{k-r} F)^{(k)}$ kao polugrupa nad F_r s dodatnim uslovima po tačkama. Primjetimo da je M. Kostić posmatrao globalnu verziju takvih prostora u slučaju kada je $r \geq 0$, a da se ovaj rad odnosi na lokalnu verziju polugrupa, za koje je $r \geq 0$. I, na kraju, najinteresantniji slučaj u ovom radu je slučaj $r < 0$ (rad sa S. Pilipovićem i M. Vuković).

U radovima [28, 30, 33, 35-37] Fikreta Vajzovića (napisanim u koautorstvu s njegovom doktoranticom A. Šahović, a [33] i [37] i sa S. Pecom), proučava se Hilbertova transformacija, inače, integralna transformacija s dugom tradicijom, koju su proučavali brojni matematičari i koja je, zahvaljujući japanskim matematičarima S. Koizuima i S. Ishikawa, ponovo predmetom proučavanja.

Tako autori u radu [28] proučavaju Hilbertovu transformaciju u generalizovanom obliku, koji je uveo japanski matematičar S. Ishikawa u radu *Hilbert Transforms on one-parameter Groups of Operators* [L:16], pomoću proizvoljne neprekidne grupe $U(t)$ linearnih operatora, koja djeluje u nekom Banachovom prostoru. Autori takvu transformaciju proučavaju u refleksivnom, striktno konveksnom Banachovom prostoru s Gâteaux-diferencijabilnom normom i daju odgovor na pitanje na koji način Hilbertova transformacija zavisi od infinitezimalnog generatora A, grupe $\{U(t)\}_{t\in R}$, koja generiše posmatranu Hilbertovu transformaciju. Slobodnije govoreći, pokazali su da je Hilbertova transformacija količnik infinitezimalnog generatora A i pozitivnog kvadratnog korijena A_+ iz $-A^2$. Kao posljedica tog rezultata dobivena je nova jednostavna formula za Hilbertovu transformaciju na Hilbertovim prostorima, koja je ujedno i poopštenje poznatog Hilbertovog rezultata za prostor $L^2(R)$.

anu monografija FINAL PRINT.indd 132 6/16/2023 1:57:13 PM

Rad [35] se nadovezuje na rad [28]. Dok je u radu [28] data veza između Hilbertove transformacije i infinitezimalnog generatora A grupe $\{U(t)\}_{t\in R}$, koja generiše posmatranu Hilbertovu transformaciju i pozitivnog kvadratnog korijena A_+ iz $-A^2$, u radu [35] se dokazuju neke osobine navedenog operatora A_+. Pored toga, autori uvode i jednu novu familiju operatorâ $\{T(\lambda);\ 0 \le \lambda < \infty\}$ za koju dokazuju da obrazuje holomorfnu, jako neprekidnu polugrupu kontrakcijâ u $\mathcal{B}(X)$, gdje je X Banachov prostor, s infinitezimalnim generatorom $-A_+$. Osim toga, dokazali su da $T(\lambda)f$, $0 \le \lambda < \infty, f \in X$, u slučaju kada je X jedan od Lebesgueovih prostora $L^p(R)$, predstavlja čuveni *Cauchy-Poissonov singularni integral*.

U radu [30] su, kao glavni rezultat, dobiveni potrebni i dovoljni uslovi pod kojim je infinitezimalni generator jako neprekidne kosinusne operatorske funkcije:

$$\mathrm{C}(t),\ t \in R,\ \text{za koju je}\ \ \|\mathrm{C}(t)\| \le 1\ (\forall t \in R),$$

na refleksivnom, striktno konveksnom (kompleksnom) Banachovom prostoru s Gâteaux-diferencijabilnom normom, spektralni operator sa spektralnom familijom koja se sastoji od hermitskih ograničenih linearnih projektora. U radu [33], autori su došli do potrebnih i dovoljnih uslova za neprekidnost Hilbertove transformacije, na kompleksnim kvazi-Hilbertovim prostorima, tj. na kompleksnim, refleksivnim, striktno konveksnim Banachovim prostorima s Gâteaux-diferencijabilnom normom, na kojim je zadan generalisani skalarni proizvod.

U radu [36] se uvodi nova definicija generalisanog skalarnog proizvoda, u prostorima funkcija $X = L^p(R)$, $1 < p < \infty$, i na osnovu nje se dolazi do novog dokaza poznate Rieszove teoreme o neprekidnosti Hilbertove transformacije H na X. Pored toga, u radu se dolazi i do novog dokaza za egzistenciju neprekidnih projektora P_- i P_+, prostora X, takvih da za svako $f \in X$ vrijedi:

$$Hf = i(P_-f - P_+f),\quad f = P_-f + P_+f,\quad P_-P_+f = P_+P_-f = 0.$$

U radu su, uz to, razmatrani i prostori funkcija $W^p(R)$, $1 < p < \infty$ i, isto tako, na novi način dokazani i kompletirani neki od rezultata za generalizovanu Hilbertovu transformaciju, na prostoru funkcija $W^2(R)$, do kojih je došao japanski matematičar S. Koizumi.

U radu [37] je data nova jednostavna formula za Hilbertovu transformaciju na *Schwartzovom prostoru* $S(R)$ brzoopadajućih funkcija iz C^∞. Koristeći dobijeni rezultat također na novi način, dobija se jednostavna formula za Hilbertovu transformaciju, na prostorima $X = L^p(R)$, $1 < p < \infty$. Na kraju rada se navodi opet novi rezultat – „jači“ od ranije dobijenog rezultata za Hilbertovu transformaciju na Hilbertovim prostorima.

I na kraju, u radu [38], F. Vajzović, zajedno sa svojim učenicima A. Šahović i S. Pecom, proučava kosinusne operatorske funkcije i dokazuje tri ergodičke teoreme kojim je data veza između operatora, koji se pojavljuju u ergodičkim limesima, i pozitivnog kvadratnog korijena iz infinitezimalnog operatora

anu monografija FINAL PRINT.indd 133 6/16/2023 1:57:13 PM

ograničene, jako neprekidne, kosinusne operatorske funkcije u kompleksnom Banachovom prostoru, i to na jednoj užoj klasi Banachovih prostora.

Među one koji su se pozivali na radove i koristili rezultate akademika Fikreta Vajzovića spadaju i neki bosanskohercegovački i jugoslovenski matematičari, uključujući njegove brojne magistrante i doktorante, od kojih su neki, zajedno s njim, objavili i svoje prve naučne radove. Tako je, više od polovine radova F. Vajzovića, rađeno u koautorstvu. Navešću samo neke od koautora u koje spadaju kolege: K. Suruliz, K. Finci, V. Perić, S. Pilipović, M. Vuković, te učenici: M. Mijatović, M. Radić, M. Stevanović, R. Vugdalić, A. Šahović, S. Peco, i dr.

Fikret Vajzović je učestvovao sa saopštenjem na brojnim domaćim i inostranim konferencijama. Neke od domaćih konferencija su, recimo: IV, V, VI, VII i VIII kongres matematičara, fizičara i astronoma Jugoslavije – u Sarajevu (1965), Novom Sadu (1975), Bečićima (1980) i Prištini (1985); kongresi Balkanske unije u Beogradu (1974) i Varni (1977), s tim što su, na nekim od kongresa, radove izlagali njegovi učenici – koautori.



Kongres Balkanske unije matematičara, Varna 1977.
A. Rašidagić-Finci, S. Šlaković, M. Vuković.
M. Vajzović, V. Vuletić, K. Finci, F. Vajzović,
Sanja i Igor Vajzović – djeca prof. Vajzovića

Zahvaljujući interesovanju drugih matematičara za njegov naučni rad, dobijao je pozive za učešće i na veoma značajnim međunarodnim konferencijama i skupovima matematičara, kao što su:

1. *Simpozium o funkcionalnim jednačinama* (Šarószpatak, Mađarska, 1965);
2. *Tagung* über *Funktionalgleichungen* (Oberwolfach, SR Njemačka);
3. *Fifth Annual Meeting on Functional Equations* (Waterloo, Ontario, Canada, 1967);
4. *Conference on Functional Equations* (Katowice, Poljska, 1967);
5. *Symposium on Functional Equations and Inequalities* (Debrecen, Mađarska, 1973) i još nekim.

Iako nije prisustvovao ovim skupovima, u više navrata je slao svoje radove koje su, umjesto njega, izlagali drugi matematičari.

Pored učešća na kongresima i konferencijama F. Vajzović je održao više predavanja u okviru Kolokvijuma Matematičkog odjela Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu, kao i u okviru Kolokvijuma za matematiku Prirodno-matema-

anu monografija FINAL PRINT.indd 134 6/16/2023 1:57:13 PM

tičkog fakulteta u Sarajevu, čiji je voditelj bio tokom dvije godine. Za vrijeme boravka na specijalizaciji kod čuvenog sovjetskog matematičara A. G. Kostjučenka, izlagao je svoje rezultate i u Seminaru za analizu moskovskog Mehaniko-matematičkog fakulteta Moskovskog državnog univerziteta, koji nosi ime Lomonosov po svom osnivaču M. V. Lomonosovu. Pred rat (1990), po pozivu, održao je i jedno jednočasovno predavanje u Matematičkom institutu Srpske akademije nauka i umjetnosti (SANU) u Beogradu.

Poslije rata, učestvovao je uglavnom na koferencijama organizovanim na Odsjeku za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta u Sarajevu i u Akademiji nauka i umjetnosti BiH (ANUBiH), kao i na Katedri za matematiku Filozofskog fakulteta Univerziteta u Istočnom Sarajevu [35-38], ili su radove izlagali njegovi učenici. Spomenućemo samo neke od njih:

- III *Congress of Mathematicians of Macedonia*, Skopje, 2005;
- III *Naučni skup bosanskohercegovačkih matematičara*, ANUBiH, Sarajevo, 26. april 2007. godine;
- IV *Naučni skup bosanskohercegovačkih matematičara*, koji mu je bio posvećen povodom 80 godina života, ANUBiH, Sarajevo, 11. maja 2008. godine;
- Naučni skup 80 godina života *Veselina Perića*, Filozofski fakultet Pale, 22-24. maja 2009;
- *Electronic International Interdisciplinary Conference*, 2012;
- *The Third Mathematical Conference of the Republic of Srpska*, Trebinje 2013;
- *The Fourth Mathematical Conference of the Republic of Srpska*, Trebinje, 2014.

Na spomenutom IV *Naučnom skupu bosanskohercegovačkih matematičara*, posvećenom jubileju – 80 godina života prof. Vajzovića učestvovali su njegovi bivši studenti, magistranti i doktoranti, od kojih su neki došli iz raznih zemalja svijeta, a organizatori skupa su bili prof. H. Miller i autorka ovog teksta prof. M. Vuković.

Fikret Vajzović je, prije rata, bio glavni istraživač u petnaestak naučno-istraživačkih projekata, koje je Odsjek za matematiku ugovarao sa SIZ-om za nauku BiH, a čiji je korisnik uglavnom bila Akademija nauka i umjetnosti Bosne i Hercegovine. Na nekim od tih projekata Fikret Vajzović je bio i voditelj. Bio je uključen i u neke od projekata poslije rata, a na dva je bio kovoditelj (sa M. Vuković) i to:

- *Neki problemi analize i algebre s primjenama*, Ministarstvo za nauku, visoko obrazovanje i mlade Kantona Sarajevo, 2006-2008;
- *Neki savremeni problemi funkcionalne analize i algebre s primjenama*, Federalno ministarstvo obrazovanja i nauke, 2006–2008. godine.

U rad na projektima bili su uključeni i kolege, ali isto tako i magistranti i doktoranti sa Univerziteta u Sarajevu i Univerziteta u Istočnom Sarajevu, sa Univerziteta „Džemal Bijedić“ i Sveučilišta u Mostaru, te sa univerziteta u Tuzli,

anu monografija FINAL PRINT.indd 135 6/16/2023 1:57:13 PM



Poslije III naučnog skupa matematičara u ANUBiH, u bašti kafića: K. Lonza, F. Vajzović, M. Vuković, S. Spužević Tipurić, M. Pepić, H. Fatkić, B. Mesihović, A. Halilović, M. i Z. Nurkanović i K. Pjanić



IV naučni skup matematičara, posvećen akad. F. Vajzoviću, ANUBiH, Sarajevo, 2008 slijeva: R. Vugdalić, H. Miller, M. Vuković, F. Vajzović, A. Šahović, A. Mašić i H. Fatkić



Naučni skup posvećen akad. V. Periću, Filozofski fakultet Pale, 2009. 1. red: B. Zeković, V. Perić, S. Terzić, S. Pilipović; 2. red: F. Vajzović, M. Pepić i H. Fatkić

anu monografija FINAL PRINT.indd 136 6/16/2023 1:57:13 PM

Zenici i Bihaću, dakle sa univerziteta iz oba entiteta BiH, kao i sa Veleučilišta u Dubrovniku.

Veoma bogat je bio i stručni rad Fikreta Vajzovića, uglavnom vezan za razne oblasti savremene matematičke analize. Objavio je dvije knjige u koautorstvu s M. Malenicom, i to: *Diferencijalni račun funkcija više promjenljivih* [B: 1] i *Integralni račun funkcija više promjenljivih* [B: 2], a napisao je i skripte za većinu predmeta koje je predavao, kako na II, tako i na III stepenu studija.

Posebno bih istakla *Funkcionalnu analizu* – skripta za unutrašnju upotrebu, koja imaju sve odlike pravog udžbenika i svojim kvalitetom su sigurno zasluživala da budu publikovana. Nažalost, Fikreta Vajzovića je u tome spriječio rat. Inače taj udžbenik se sastoji iz tri dijela: *Funkcionalna analiza* I (1972) [B: 3], *Funkcionalna analiza* II (1973) [B: 4] i *Funkcionalna analiza* III (1973) [B: 5]. Ovaj udžbenik–skripta pisan je vrlo stručno, pregledno i jasno, na visokom i savremenom nivou, i to tako dobro da bi svaka sveska mogla odmah da ide u štampu. U njemu se ogleda širina matematičke kulture i dubina poznavanja problematike funkcionalne analize od strane autora, koji jasnoćom svog izlaganja, često postiže da i veoma teške materije postanu jednostavne i lake. Studenti su ovaj udžbenik prihvatili kao važno sredstvo za uspješno studiranje na III stepenu studija, a doprinio je i lakšem i mnogo bržem završavanju tog studija. Iste pohvale bi se mogle izreći i za udžbenik–skripta *Linearni topološki prostori* (1980) [B: 6].



Analiza II - Diferencijalni račun funkcija više promjenljivih i Integralni račun funkcija više promjenljivih, Sarajevo, 2002.

Fikret Vajzović je dao veliki doprinos i pišući recenzije za udžbenike iz matematike, kako za fakultetske, tako i za srednjoškolske, ali i one za osnovne škole. Neke od recenzija su toliko doprinosile poboljšanju kvaliteta udžbenikâ da su, zapravo, imale u velikoj mjeri i koautorski karakter. Akademik Vajzović je značajan doprinos dao i kao recenzent velikog broja naučnih članaka objavljenih u domaćim, ali i u stranim časopisima, posebno za časopis *Radovi matematički*, u čije Uredništvo je izabran od prvog dana pokretanja, koji danas izlazi kao *Sarajevo Journal of Mathematics*.

Fikret Vajzović je držao i više vrlo instruktivnih i korisnih predavanja na seminarima iz matematike za nastavnike i profesore matematike osnovnih i srednjih škola, a bio je i član Odbora za organizovanje Savjetovanja o naučnom radu u oblasti matematike u BiH, u organizaciji Akademije nauka i umjetnosti Bosne i Hercegovine,

anu monografija FINAL PRINT.indd 137 6/16/2023 1:57:13 PM



Fikret Vajzović i Mirjana Vuković, snimljeno 90-tih u Akademiji nauka i umjetnosti Bosne i Hercegovine



B. Ćurguz, F. Vajzović, M. Vuković i M. Pikula u bašti restorana Kula, Istočno Sarajevo, poslije rata.

na kojem je, zajedno s prof. Perićem podnio referat *Dugoročni plan razvoja i obrazovanja naučnog kadra u matematici* [B: 7].

I na kraju, šta reći o akademiku Fikretu Vajzoviću? Bio je čovjek visoke matematičke i široke opšte kulture, izgrađenih naučnih i stručnih kriterija i izuzetnih ljudskih kvaliteta, izvrstan predavač i humanista. Bio je prefinjeni intelektualac koji je pored matematike bio izuzetan poznavalac, kako književnosti (posebno

anu monografija FINAL PRINT.indd 138 6/16/2023 1:57:13 PM

ruskih klasika) i klasične muzike, tako i filozofije i istorije. Njegovo cjelokupno djelovanje u dužem periodu bilo je od presudnog značaja za cjelokupan matematički život Odsjeka za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Sarajevu, kao i cijele BiH i šire.

Opraštajući se od akademika Fikreta Vajzovića, velikana među našim profesorima koji nas je posljednji napustio, s kojim sam dijelila brojne ratne i poratne nedaće, dala sam obećanje, u ime svih nas njegovih učenika, kolega i poštovalaca, da nikada nećemo zaboraviti njegova izvanredna predavanja, u kojim nikada nije bilo ništa nejasno, kao i da ćemo ga se sjećati s poštovanjem i ljubavlju po blagosti, dobronamjernosti i očinskim savjetima.

anu monografija FINAL PRINT.indd 139 6/16/2023 1:57:13 PM

Bibliografija akademika Fikreta Vajzovića

A. Naučni radovi

[1] *Funkcionalne jednadžbe u vektorskim prostorima* (*Functional equations in vector spaces*), Masters thesis, Odjel za matematiku, Prirodoslovno-matematički fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, Mart 1965, 1+71 str.

[2] *Funkcionalne jednadžbe u Fréchet-ovim prostorima* (*Functional equations in Fréchet spaces*), Ph. D. thesis, Odjel za matematiku, Prirodoslovno-matematički fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, Septembar, 1965, 4+61 str.

[3] *On the functional equation*: $T_1(t+s)T_2(ts) = T_3(t)T_4(s)$, Publications de l' Institut Mathématique, (N.S.), 4 (18), Beograd (1964), pp. 21−27.

[4] *On a functional equation*, Glasnik matematičko-fizički i astronomski, Ser. II, 19, Zagreb (1964), pp. 217-224.

[5] *On a functional equation which is additive on A-orthogonal pairs*, Glasnik Matematički, Ser. III, 1 (21), Zagreb (1966), pp. 75-81.

[6] *Über das Funktional mit der Eigenschaft* $(x, y) = 0 \Rightarrow H(x+y) + H(xy) = 2H(x) + 2H(y)$, Glasnik Matematički, Ser. III, 2 (22), Zagreb (1967), pp. 73-81.

[7] *On solution of one functional equation*, Matematički vesnik, 5 (20), Beograd (1968), pp. 25-28.

[8] *Einige Funktionalgleichungen im Fréchetschen Raum*, Glasnik Matematički, Ser. III, 3 (23), Zagreb (1968), pp. 19-40.

[9] *The functional equation* $\prod_{ni=1} f_i(x+1) = R(x)$, Radovi Odjeljenja prirodno-matematičkih nauka ANUBiH, Vol. 33, No. 10, Sarajevo (1969), pp. 51−60.

[10] *On solutions of the Maxwell-Jüttner functional equation*, Radovi Odjeljenja prirodno-matematičkih nauka ANUBiH, Vol. XLV, No. 12, Srajevo (1973), pp. 139-144. (sa K. Surulizom)

[11] *On functionals which are additive on a symmetric set*, Radovi Odjeljenja prirodno-matematičkih nauka ANUBiH, Vol. LII, No. 14, Sarajevo (1974), pp. 45-57. (sa K. Fincijem)

[12] $S^{\alpha,\beta}$*-inclusion of summability methods*, Radovi Odjeljenja prirodno-matematičkih nauka ANUBiH, Vol. LXI, No. 17, Srajevo (1978), pp. 137-145.

[13] *Self adjoint extensions of some symmetric operators*, Radovi Odjeljenja prirodno-matematičkih nauka ANUBiH, Vol. LXI, No. 17, Sarajevo (1978), pp. 241-251.

[14] *Life and work of Academician Mahmut Bajraktarević*, Radovi Odjeljenja prirodno-matematičkih nauka ANUBiH, No. 19, Sarajevo (1980), pp. 5-17 (s M. Mara-vićem i V. Perićem)

anu monografija FINAL PRINT.indd 140 6/16/2023 1:57:13 PM

[15] *Two fixed-point theorems for a nonlinear operator*, Radovi Matematički 1, No. 1, Sarajevo (1985), pp. 49-59.

[16] *Branislav Martić*, Radovi Matematički 1, No. 2, Sarajevo (1985) pp. 308-316. (s V. Perićem)

[17] *Two fixed point theorems*, Radovi Odjeljenja prirodno-matematičkih nauka ANU-BiH, No. 24, Sarajevo (1985), pp. 63-71. (sa M. Stevanovićem)

[18] *Some fixed point theorems,* Radovi Odjeljenja prirodno-matematičkih nauka ANUBiH, No. 24, Sarajevo (1985), pp. 73-81. (sa M. Stevanovićem)

[19] *On fixed points of some nonlinear operators.* Matematički vesnik, 38, No. 3, Beograd (1986), pp. 343-350. (sa M. Stevanovićem)

[20] *On the bounded cosine operator function in Banach space*, Matematički vesnik 39, No. 2, Beograd (1987), pp. 187-204. (sa M. Radićem)

[21] *On the cosine operator function,* Glasnik Matematički, Ser. III, 22 (42), Zagreb (1987), pp. 381-406.

[22] *In honor of the 70th birthday of Academician Manojlo Maravić*, Radovi Matematički 5, (2), Sarajevo (1989), pp. 333-343. (sa V. Perićem, prevela N. Tanović–Miller)

[23] *Two mean ergodic theorems for cosine operator functions and semigroups*, Glasnik Matematički, Ser. III, 24 (44), No. 2-3, Zagreb (1989), pp. 305-325. (sa M. Radićem)

[24] α-*times integrated semigroups* ($\alpha \in R^+$), J. Math. Anal. Appl. 210 (1997), No. 2, pp. 790-803. (sa M. Mijatovićem i S. Pilipovićem)

[25] *Academic Manojlo Maravić* (1919 - 2000) *Obituary*, Radovi Matematički 10 (2000/01), No. 1, pp. 121-129. (sa M. Vuković, prevod N. Tanović-Miller)

[26] *Exponential formula for one−time integrated semigroups*, Novi Sad Journal of Mathematics, 33, No. 2, Novi Sad (2003), pp. 77-88. (sa S. Kalabušić)

[27] *Two exponential formulas for α-times* ($\alpha \in R^+$) *integrated semigroups,* Sarajevo Journal of Mathematics, 1 (13), No. 1, Sarajevo (2005), pp. 93-116. (sa R. Vugdalićem)

[28] *Cosine operator functions and Hilbert transforms*, Novi Sad Journal of Mathematics, 35, No. 2, Novi Sad (2005), pp. 41−55. (sa A. Šahović)

[29] *The method of stationary phase for once integrated group*, Publications de l' Institut Mathématique, (N.S.) 79 (93), Beograd (2006), pp. 73−93. (sa R. Vugdalićem)

[30] *A spectrality condition for infinitesimal generators of cosine operator functions,* Matematički vesnik, 60, No. 3, Beograd (2008), pp. 193-206. (sa A. Šahović)

[31] *Distribution semigroups on function spaces with singularities at zero*, Novi Sad Journal of Mathematics, 38, No.1, Novi Sad (2008), pp.127-135. (sa S. Pilipovićem i M.Vuković)

[32] *Obituary – Academician Veselin Perić* 1930-2009, Sarajevo Journal of Mathematics 6 (18), No. 1, Sarajevo (2010), pp. 137-143. (sa M. Vuković)

[33] *Continuity conditions for the Hilbert transform on quasi-Hilbert spaces*, Sarajevo Journal of Mathematics, 10 (22), No. 1, Sarajevo (2014), pp. 111-120. (sa A. Šahović i S. Pecom)

[34] *Remembering academician Mahmut Bajraktarević*, Sarajevo Journal of Mathematics, 12 (25), No. 2, Sarajevo (2016), pp. 143-150. (sa M. Vuković, preveo H. Miller)

anu monografija FINAL PRINT.indd 141 6/16/2023 1:57:14 PM

[35] *Cosine Operator Functions and Hilbert Transforms* II, Proceedings of III Congress of Mathematicians of Macedonia, Skopje (2005), pp. 347-356. (sa A. Šahović)

[36] *Generalized inner Product on* $L^p(R)$, $1 < p < \infty$, *Spaces and the Hilbert Transform*, Proceedings of the Electronic International Interdisciplinary Conference 2012 (2012), pp. 583-586. (sa A. Šahović i S. Pecom)

[37] *Hilbertova transformacija na prostorima* S(R) i $X = L^p(R)$, $1 < p < \infty$, Zbornik radova MCRS 2013, Proceedings of The Third Mathematical Conference of Republic of Srpska, Trebinje, 2013, Vol. 1 (2013), pp. 121-131. (sa A. Šahović i S. Pecom)

[38] *Ergodičke teoreme za kosinusne operatorske funkcije*, Proceedings of The Fourth Mathematical Conference of the Republic of Srpska, Trebinje, 2014, Volume II, (2015), pp. 37-50. (sa A. Šahović i S. Pecom)

B. STRUČNI RADOVI

[1] *Diferencijalni račun funkcija više promjenljivih*, Studentska štamparija Univerziteta, Sarajevo (2002) (sa M. Malenicom)

[2] *Integralni račun funkcija više promjenljivih*, Studentska štamparija Univerziteta, Sarajevo, (2002) (sa M. Malenicom)

[3] *Funkcionalna Analiza* I (Skripta), Prirodno-matematički fakultet, Sarajevo, 1972, 141 str.

[4] *Funkcionalna Analiza* II (Skripta), Prirodno-matematički fakultet, Sarajevo, 1973, 170 str.

[5] *Funkcionalna Analiza* III (Skripta), Prirodno-matematički fakultet, Sarajevo, 1973, 146 str.

[6] *Linearni topološki prostori* (Skripta), Prirodno-matematički fakultet, Sarajevo, 1980,150 str.

[7] *Dugoročni plan razvoja obrazovanja i naučnog kadra u matematici*, Posebna izdanja, ANUBiH, Odjeljenje prirodnih i matematičkih nauka (7), Sarajevo (1979), pp. 39-48 (sa V. Perićem)

[8] *Akademik Branislav Martić*, (*Valjevo* 1923 – *Sarajevo* 1985), Naučni skup: Doprinos Srba u BiH nauci i kulturi (specijalno izdanje), Filozofski fakultet, Pale, Univerzitet Istočno Sarajevo, Knj. 1, Pale (2007), pp. 505-515. (sa V. Perićem)

[9] *Vera* (*Popović*) Šnajder redovni profesor (*Reljevo* 1904 – *Sarajevo* 1976), Naučni skup: Doprinos Srba u BiH nauci i kulturi (specijalno izdanje), Filozofski fakultet, Pale, Univerzitet Istočno Sarajevo, Knj. 1, Pale (2007), pp. 537-541. (sa V. Perićem i M. Vuković)

anu monografija FINAL PRINT.indd 142 6/16/2023 1:57:14 PM



O AUTORKI

Mirjana Vuković

Rođena sam 1948. godine u Fojnici iako su tada moji roditelji živjeli u Sarajevu, u kom sam napravila prve korake. Osnovnu školu sam pohađala u raznim gradovima ex-Jugoslavije: Varaždin, Maribor i Sarajevo. Po završetku *Gimnazije Braća Ribar* (danas *Treća Gimnazija*), u Sarajevu, kao jedan od najboljih učenika ikad, upisala sam se na studj matematike na Odsjeku za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Sarajevu koji sam završila prva u generacji kao jedan od najboljih studenata sa svim srebrenim i zlatnom značkom i stipendjom (za najbolje studente) Univerzitetskog *Fonda Hasan Brkić*.

Akademsku karijeru započela sam na Odsjeku za matematiku PMF-a, odmah po završetku studija, kao asistent (1972), zatim sam izabrana za docenta (1979), te vanrednog (1984) i redovnog (1989) profesora. Obrazovanje sam sticala i na najpoznatijim univerzitetima u svijetu: najprije na *Moskovskom Državnom Univerzitetu Lomonosov* u Moskvi, a zatim, poput profesorice Vere Šnajder produžila na čuvenom Univerzitetu *Pierre et Marie Curie* u Parizu.

Na PMF-u u Sarajevu sam stekla titule magistra (1975) i doktora (1979) matematičkih nauka.

Moji naučni interesi koncentrisani su oko nekoliko važnih, savremenih oblasti matematičke analize i moderne algebre, pa se moji naučni radovi, koji su fundamentalno-teorijskog karaktera mogu podijeliti u dva kruga. U onim, iz prvog kruga, koji pripadaju oblasti matematičke analize sam, tokom rada na doktorskoj disertaciji (mentor akademik M. Maravić), proučavala sumabilnost višestrukih Fourierovih redova i razvitaka po sopstvenim funkcijama Laplaceovog operatora, Karamatinu teoriju i dr. Posebno ću istaći drugu grupu radova, iz apstraktne algebre, koji predstavljaju krunu mog naučnog rada i u kojim sam, zajedno sa čuvenim francuskim matematičarom Marcom Krasnerom dala odgovor na otvoreno pitanje: *pod kojim uslovima su graduirane strukture* (*grupe, prsteni, moduli*) *zatvorene u odnosu na direktnu sumu i direktni proizvod*. Kroz taj odgovor smo

anu monografija FINAL PRINT.indd 143 6/16/2023 1:57:14 PM

M. Krasner i ja došli do struktura opštijih od *Bourbaki-Krasnerovih graduiranih struktura* koje smo nazvali *paragraduiranim strukturama* (*grupe, prsteni, moduli*). One su se prvi put pojavile u našim zajedničkim radovima *Structures paragraduées* I, II, III, objavljenim u *Proceedings of Japan Academy,* a zatim i u naučnoj monografiji objavljenoj u kanadskoj ediciji *Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics*.

Može se reći da sam, pored veze sa čuvenom ruskom – *Kuroševom školom algebre*, dvostrukim nitima vezana i za *Francusku školu matematike* – jednu od najstarijih i najpoznatijih škola matematike u svijetu – i to, kako preko *Beogradske škole analize Mihaila Petrovića Alasa* i Manojla Maravića – mog mentora za doktorat, tako i preko algebre i čuvenog Marca Krasnera.

Autor i koautor sam preko 120 naučnih i stručnih radova i više od 10 knjiga i udžbenika. Posebno ću istaći već spomenutu monografiju *Structures paragraduées* (*groupes, anneaux, modules*), koja se može naći u više od 150 biblioteka širom svijeta, a uključena je i u biblioteku *Open Library* među 105 najznačajnijih knjiga iz komutativne algebre, *World Cat, Amazon Company*, itd., kao i knjige *Teorija grupa i reprezentacija s primjenama u fizici, Algebra – Teorija grupa* (*Pregled teorije i zadaci*) (u koautorstvu s V. Perićem), ali i *Diferencijalne jednačine* 1 i *Parcijalne diferencijalne jednačine* 2 i časopis *Sarajevo Journal of Mathematics* čija sam glavna urednica od 2014, itd. O kvalitetu i nivou mojih radova i knjiga najbolje govori preko 50 000 pregleda i 6 000 podrški na ResearchGateu.

Bila sam istraživač i gostujući profesor na više prestižnih univerziteta kao što su *Lomonosov – Moskovski Državni Univerzitet* u Moskvi i Univerzitet *Pierre et Marie Curie* u Parizu, Institut *Joseph Fourier* u Grenoblu, *Technische Universität – Wien* u Beču, *Univerza v Mariboru,* a predavanja po pozivu, sam držala i na brojnim drugim poznatim univerzitetima i institutima, kao što su: *Fields Institute, Toronto, Canada; Karlov Univerzitet,* Prag, Češka Republika; *Tcukuba University, Tcukuba*, Japan; *Matematički Institut* SANU, Beograd, Srbija; *Univerzitet u Mariboru*, Slovenija, itd.

Učestvovala sam kao odgovorni istraživač ili voditelj u 20-tak naučno-istraživačkih projekata uključujući i 4 inostrana: dva *Central European Research Support Schemme* i kao ko-voditeljica na francuskom projektu *Paragraded Structures and their Applications to Non-archimedian Analysis* (*Paragraduirane strukture i njihove primjene na nearhimedovu analizu*), na Institutu *Joseph Fourier*, Grenoble (s prof. A. Pančiškinom) i na projektu *Connections between Krasner-Vuković paragraded structures* (*groups, rings, modules*) *and Lie superalgebras* (*Veze između Krasner-Vuković paragraduiranih struktura i Lievih superalgebri*) u Mariboru (s prof. D. Pagonom) koji su finansirani od regije Rhône Alpes TEMPRA-PECO (2001), odnosno iz sredstava JoinEU-SEE – ERASMUS Mundus Project Partnership (2013). Cilj je bio da se „povežu rezultati dvije veličansvene škole algebre – francuske s jedne i ruske – Moskovske s druge strane.

anu monografija FINAL PRINT.indd 144 6/16/2023 1:57:14 PM

Bila sam član brojnih akademskih komisija na Odsjeku za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta i Univerzitetu u Sarajevu, od kojih ću spomenuti samo tri najznačajnije, na koje sam birana prije rata: prodekan za nauku i nastavu Prirodno-matematičkog fakulteta (1982-1984) i najmlađi, do tada izabrani, prorektor Univerziteta u Sarajevu za nauku, nastavu i naučno-istraživački rad (1988-1993), te predsjednik Sekcije za Matematiku Društva matematičara, fizičara i astronoma BiH, itd.

Za uspješan rad i doprinos razvoju Univerziteta dobila sam brojne nagrade i priznanja. Spomenuću samo najveću Republičku nagradu *Veselin Masleša* za naučni rad u matematici, *Spomen plaketu Grada Sarajeva* povodom 40 godina od oslobođenja, *Orden rada sa srebrenim vjencom* predsjedništva Jugoslavije, prije rata i *Povelju povodom 50 godina od osnivanja Univerziteta u Sarajevu* (1999), kao i prvo priznanje – zlatnu značku Univerziteta u Sarajevu.

2012. godine sam izabrana za dopisnu, a 2018. redovnu članicu Akademije nauka i umjetnosti Bosne i Hercegovine i tako postala prva žena koja je ikada izabrana u Odjeljenje prirodnih i matematičkih nauka ANUBiH, što predstavlja krunu mog cjelokupnog rada.



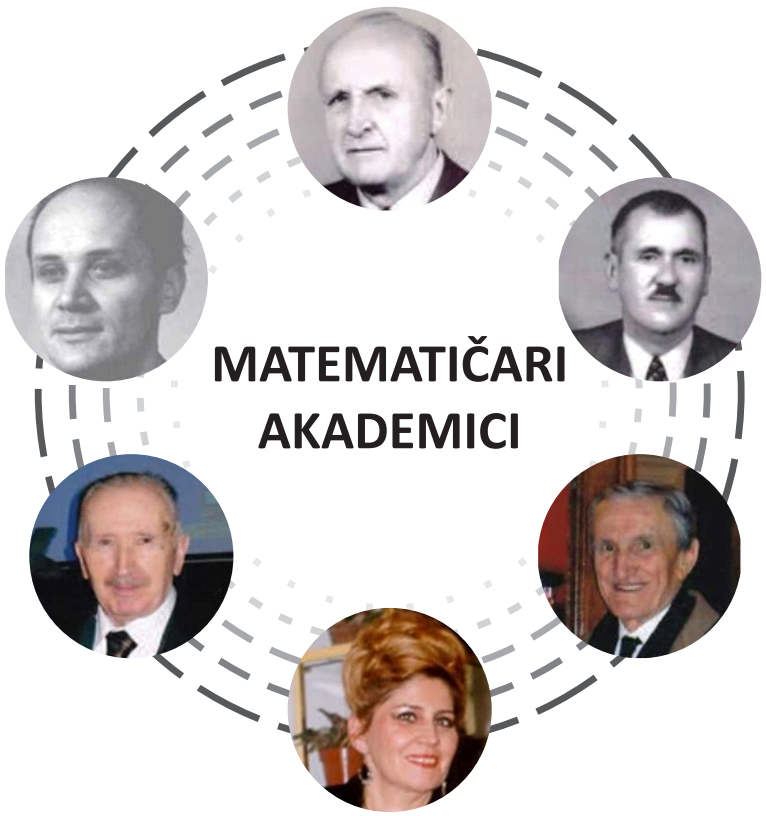
S mojim profesorom Mahmutom Bajraktarevićem nakon promocije na Univerzitetu u Sarajevu, 1979.



S mojim mentorom Manojlom Maravićem i Kemom Hanjalićem u ANUBiH, 90-tih prošlog vijeka

anu monografija FINAL PRINT.indd 145 6/16/2023 1:57:14 PM

Akademik Fikret Vajzović je u referatu za moj izbor u ANUBiH napisao: *Mirjana Vuković je jedan od najuspješnijih i najobrazovanijih matematičara na prostorima BiH. Slobodno se može reći da spada među naučnike širokog, ne samo matematičkog, nego i opšteg obrazovanja i kulture* [...]. *Sa čuvenim francuskim matematičarom Marcom Krasnerom uvela je i udarila temelje, novoj i apstraktnoj teoriji – teorija paragraduiranih struktura* (*grupe, prsteni, moduli*). *Tim pionirskim radovima se upisala u tvorce nove teorije što nije ni lako, a ni često u matematici*.



anu monografija FINAL PRINT.indd 146 6/16/2023 1:57:14 PM

LITERATURA

[1] J. Aczel, *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen,* Basel-Stuttgart-Berlin, 1961.

[2] ANSSSR i Državni komitet Savjeta ministara SSSR, *Itogi nauki i tehniki*, Matematičeskij analiz, T.12, Moskva, 1974.

[3] ANUBiH, *Bibliografija M. Maravića*, Sarajevo.

[4] J. A. Baker, *On the Functional Equation* $f(x) \cdot g(x) = \prod_{i=1}^{n} h(a_i x + b_i)$, Aequationes Math. (1973), pp. 154-162.

[5] E. D. Cashwell and C. J. *Everett, Extension of the Riesz Representation Theorem and the Solution of the Maxwell-Boltzmann Functional Equation*, Aequationes Mathematicae, 5 (1970), pp. 3l5-318.

[6] I. Cioranescu, *On the abstract Cauchy Problem for the Operator-A,* Integral Equations and Operator Theory (1984).

[7] B. Crstici, *Zentralblatt für Mathematik*, Berlin, 1979.

[8] B. Ćupurdija, *Sto godina od rođenja akademika Manojla J. Maravića*, Katalog izložbe fotografija, dokumenata i publikacija, Etnografski muzej u Beogradu, Manakova kuća, Srpski genealoški centar, Beograd, 2019, pp. 1-32.

[9] Z. Daroczy, K. Lajkó, and L. Székelyhidi, *Functional Equations on ordered Fields*, Publ. Math. (Debrecen), 24 (1977), pp. 173-179.

[10] N. Dubrovin, *Nekoliko riječi o profesoru Periću*, u: Akademiku Veselinu Periću povodom 80 godina života, Univerzitet u Istočnom Sarajevu, 2012, p. 87.

[11] A.V. Geramita and Ch. Small, *Introduction to homological methods in commutative rings*, Queen's Papers in pure and applied Mathematies, No. 43, Kingston, Ontario, 1978.

[12] R. Gilmer, *Multiplicative Ideal Theory*, Martin Dekker, New-York, 1972.

[13] *Godišnjak matice Drežničke* (časopis za nauku, kulturu, književnost i umetnost), 14, Bajmok (2020), pp. 1-10.

[14] H. Gropp, *Mathematics in Bosnia-Herzegovina, Mathematics in the Austrian-Hungarian Empire: Proceedings of a Symposium held in Budapest on* August 1, 2009 during the XXIII ICHST, Praha, (2010) Matfyzpress, pp. 75-80.

anu monografija FINAL PRINT.indd 147 6/16/2023 1:57:14 PM

[15] Grupa autora, *Partizanska Drežnica*, Historijski arhiv u Karlovcu, Zbornik 12, Karlovac (1982), 942 str.

[16] Sh. Ishikawa, *Hilbert Transforms on One-parameter Groups of Operators*, Tokyo, J. Math. 9 (1986), pp. 383-393.

[17] I. Kalkan, *Matematika kao pjesma*, KUN – Susret s dobitnicima 27- julske nagrade, Oslobođenje, 21.8.1975.

[18] S. Kisin, *Zapis o legendi fakulteta*, Godišnjak matice Drežničke, 14, Bajmok, 2020, pp. 99-102.

[19] W. Kotarski and A. Lisowska, *The Read-Bajraktarević Functional Equation and Selfsi- milarity - Maple Centre*.

[20] M. G. Krein, *Osnovnye položenija teorii predstavlenija operatorov s indeksom defekta* (*m, m*), Ukr. Matem. Žur., 1, 2 (1949), pp. 3-56.

[21] M. Kuczma, *A survey of the theory of functional equations*, Publikacije Elektrotehničkog fakulteta, Beograd, No. 130, 1964.

[22] M. Kuczma, *Functional equations in a single variable*, Polska akademia nauk, Monografie matematyczne, T. 45, Warszawa, 1968.

[23] H. Kulosman, *O mom profesoru Veselinu Periću,* u: *Akademiku Veselinu Periću povodom 80 godina života*, Univerzitet u Istočnom Sarajevu, Sarajevo, 2012, p. 88.

[24] K. Lajkó, *On the solution of a Functional Equation of F. Vajzović*, Matematički vesnik, 9 (24), 1972.

[25] M. D. Larsen and P. J. McCarthy, *Multiplicative Theory of Ideals*, Academic Press, New-York and London, 1971.

[26] Mathematics Genealgy Project:

M. Maravić: *https://www.genealogy.math.ndsu.nodak.edu/id.php?id=159053*

V. Perić: *https://www.mathgenealogy.org/id.php?id=91925*

F. Vajzović: *https://www.mathgenealogy.org/id.php?id=152144*

[27] M. Maravić – Mathematical Genealogical Tree: *http://www.anubih.ba/Journals/maravic-mgt.pdf*

[28] P. R. Massopust, *On Local Fractal Functions in Besov and Triebel-Lizorkin Spaces*, Journal Math. Analysis and Appl., Vol. 436, Issue 1 (2016), pp. 393–407.

[29] M. McClure, *The Read-Bajraktarević Operator, a preprint version of a „Mathematical graphics*", column from Mathematica in Education and Research, Vol. 11, No. 3 (2006), 7 str.

[30] M. Milanković i A. Bilimovič, *Empfehlungsschreiben – Preporuka Veri Šnajder za odlazak u Njemačku radi rada na doktorskoj disertaciji*, Beograd, april 1929.

[31] V. Perić, F. Vajzović, i M. Vuković, *Vera* (*Popović*) *Šnajder, redovni profesor* (Reljevo 1904 – Sarajevo 1976), Naučni skup: Doprinos Srba u BiH nauci i kulturi, Zbornik radova (posebna izdanja), Filozofski fakultet Univerziteta u Istočnom Sarajevu, knj. 1, Pale (2007), pp. 505-515.

[32] G. Pi1z, *Near-Rings: the theory and its applications*, Amsterdam, New-York: North- Holland publ. com., 1983.

[33] G. Pilz and A. Oswald, *Near-Rings*, Newsletter, Johannes Kepler Universität, Linz, 1985.

anu monografija FINAL PRINT.indd 148 6/16/2023 1:57:14 PM

[34] V. Popovich (Šnajder), *Sur l'extension de la method de Hele Shaw aux mouvements cycliques*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, T. 192 (1931), pp. 1703-1706.

[35] S. A. Prasad, *Reproducing Kernel Hilbert Space and Coalescence Hidden variable Fractal Interpolation Functions*, Demonstr. Math. 52 (2019), pp. 467-474.

[36] I. Sowa, *Cosine Operator Functions*, Rasprawy Mathematiczne, XLIX (1966), pp. 1-46.

[37] Univerzitet u Sarajevu, *Bibliografija doktorskih disertacija na fakultetima Univerziteta u Sarajevu* od 1952. do 1989. godine, Sarajevo, 1989.

[38] F. Vajzović, B. Martić i V. Perić, *Referat za izbor Mahmuta Bajraktarevića* (nakon odlaska u penziju), Prirodno-matematički fakultet, Sarajevo, 2.11.1981.

[39] F. Vajzović i M. Vuković, *Academician Manojlo Maravić, redovni profesor* (Drežnica 1919 – Beograd 2000) – Nekrolog, Radovi Matematički. Vol. 10 (2001), pp. 137-143.

[40] B. Vujičić, *Sjećanje na prof. Perića,* u: *Akademiku Veselinu Periću povodom 80 godina života*, Univerzitet u Istočnom Sarajevu, 2012, pp. 85-86.

[41] M. Vuković, Predlog da se Fikretu Vajzoviću dodijeli nagrada „Veselin Masleša" za 1979, 18 str. (sa M. Maravićem, K. Fincijem i D. Vujakovićem)

[42] M. Vuković, Predlog da se Fikret Vajzović izabere za dopisnog člana ANUBiH, Sarajevo 19. 4. 1990. godine, 14 str. (sa M. Maravićem i V. Perićem).

[43] M. Vuković i F. Vajzović, *Academician Veselin Perić* (1930-2009) – Obituary, Sarajevo Journal of Mathematics Vol. 6 (18), No. 1 (2010), pp. 137-143.

[44] M. Vuković (priredila), *Spomenica akademika Veselina Perića povodom 80 godina života* (*Homage to academician Veselin Perić*), ANURS, Knj. VIII, Odjelj. Prirodno-matematičkih i tehničkih nauka Knj. 15, Banja Luka (2011), 611 str.

[45] M. Vuković, *Akademiku Veselinu Periću povodom* 80 *godina života*, Univerzitet u Istočnom Sarajevu, Sarajevo, 2012, 98 str.

[46] M. Vuković, *Remembering Academician Mahmut Bajraktarević*, Sarajevo Journal of Mathematics, Vol. 12 (25), No. 2, Sarajevo (2016), pp. 143-150.

[47] M. Vuković and M. Džamonja, *Obituary – Acadmician Fikret Vajzović*, 1928 – 2017, Sarajevo Journal of Mathematics, Sarajevo Vol. 13 (26), No. 2, (2017), pp. 133-140.

[48] M. Vuković, *Od Beogradske škole Mihaila Petrovića Alasa do Sarajevske škole analize i algebre*, Naučni skup u SANU: *Mihailo Petrović – Alas, Život - Delo - Vreme, povodom sto pedeset godina od rođenja*, Beograd, 2-3, okt. 2018, Naučni skupovi, Knj. CLXXXII, Predsjedništvo Knj. 12, Beograd (2019), pp. 161-172.

[49] M. Vuković, *Vera Šnajder – First Woman Mathematician in Bosnia and Herzegovina – Bosnian Maria Curie,* Proccedings of Scientific Conference Bosnian-Herzegovina Woman Scientists and their Research Work (in Serbian), Mostar 13-14. april 2018. – Mostar, Federal Ministry of Educations and Science (FMON), Tom 2, 431-439 (2019).

[51] M. Vuković, *Remembering academician Manojlo Maravić*, Sarajevo Journal of Mathematics, Sarajevo Vol. 16 (29), No. 2 (2020), pp. 145-152.

anu monografija FINAL PRINT.indd 149 6/16/2023 1:57:14 PM

[52] M. Vuković, 100 *godina od rođenja akademika Manojla Maravića*, Godišnjak Matice Drežničke, Časopis za nauku, kulturu, književnost i umetnost (Posvećen 75. godišnjici pobede nad fašizmom), 14, Bajmok (2020), pp. 75-90.

[53] K. Zeller and W. Beckmann, *Theorie der Limitierungsverfahren*, Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzegebiete, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, Band 15, 1970.

[54] Zgrada

1) *Bogoslovije, srpsko-pravoslavne u Sarajevu:* https://www.facebook.com/StareSlikeSarajeva/photos/zgrada-pravoslavne- bogoslovije-u-sarajevu-izgrađena-1898-godine-nakon-drugog- svj/1249630818464172
2) *Gimnazije Karlova*c: https://www.facebook.com/photo/?fbid=10152390596507765&set= a.499767328815756
3) *Instituta Henri Poincaré u Parizu:* https://www.amcsti.fr/fr/membres/institut-henri-poincare/
4) *Instituta za fiziku i hemiju u Sarajevu:* Mladen Deželić – Gradnja Prirodno-matematičkog fakulteta ... u: Prirodoslovlje 15 (1-2), 79-100 (2015) na str. 89.
5) *Kapetan Mišino zdanje – Filozofski fakultet:* https://www.bbc.com/serbian/lat/srbija-62165828
6) *Katoličke crkve „Nikole Tavelića," Kovačići, Sarajevo:* https://www.nedjelja.ba/hr/english/news/st-nikola-tavelic-celebratet-in- kovacici/23184
7) *Moskovskog Državnog Univerziteta Lomonosov:* https://media.studomat.ba/2017/08/moskovski-univerzitet.jpg https://iafor.org/dvteam/lomonosov-moscow-state-university-russia/
8) *Šerijatske sudačke gimnazije:* https://bs.wikipedia.org/wiki/Šerijatska_sudačka_škola
9) *Valjevske gimnazije – Veliki jubilej Valjevske gimnazije:* https://www.novosti.rs/fotografije/936981/39784/f https://www.rasejanje.info/2020/11/23/valjevska-gimnazija-slavi-150-godina-postojanja/
10) *Velike škole u Sarajevu, danas Prva gimnazija:* https://www.klix.ba/vjesti/bih/prva-gimnazija-otvara-svoja-vrata-gostima-na-138-rodjendan/170404096 https://prva-gimnazija.edu.ba/skolska-zgrada/

anu monografija FINAL PRINT.indd 150 6/16/2023 1:57:14 PM